高等学校教材

线性代数

主　编　杨海涛

副主编　翟绍辉　郭成　王莉　司新

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　杨海涛

副主编　翟绍辉　郭　成　王　莉　司　新

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书主要内容包括：行列式、矩阵、向量与向量空间、矩阵的特征值和特征向量以及二次型等，每章配有适量的例题与习题，书末附有部分习题参考答案。本书以矩阵为主线系统地介绍了线性代数的基本理论和方法。全书体系清晰、结构严谨、内容详略得当、例题习题适量、语言通俗易懂。

本书可作为高等学校理工类和经济管理类等专业线性代数课程的教材，也可供相关科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 杨海涛主编 .-- 北京 : 高等教育出版社，2013.7

ISBN 978-7-04-037536-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 118400 号

策划编辑	李晓鹏	责任编辑	李晓鹏	封面设计	于文燕	版式设计	范晓红
插图绘制	尹　莉	责任校对	孟　玲	责任印制	朱学忠		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11	版　　次	2013 年 7 月第 1 版
字　　数	190 千字	印　　次	2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	16.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37536－00

前　言

由于线性代数在工程技术和经济领域应用广泛，因而成为高等学校本科教学中重要的数学基础课程之一。本书按照高等学校理工类及经济管理类线性代数课程的基本要求，结合作者多年教学实践以及当前本科院校学生基础和教学特点编写而成。

本书以矩阵为主线较系统地介绍了线性代数的基本理论和方法。在内容体系安排上，把线性方程组解的条件与解的结构作为矩阵和向量组理论的应用。全书内容包括：行列式、矩阵、向量与向量空间、矩阵的特征值和特征向量以及二次型等内容，每章配有适量的例题、练习与习题，并附有参考答案。本书体系清晰、结构严谨、内容详略得当，可作为高等学校理工类和经济管理类专业48学时的线性代数课程教材，也可供其他专业学生和相关科技人员参考使用。

本书由杨海涛任主编，翟绍辉、郭成、王莉、司新（按教材内容编写顺序排序）任副主编，全书由杨海涛统稿、定稿。

在本书的编写过程中，参考了书后所列参考文献，在此对这些参考文献的作者表示感谢。在本书的编写和出版过程中，得到了有关专家和高等教育出版社编辑的关心和支持，在此一并表示衷心感谢！

限于编者的水平，书中难免存在不足之处，欢迎同行和读者批评指正。

编者

2013年3月

目　录

第一章 行列式

行列式是线性代数最重要的基本概念之一.它最初出现在解线性方程组的问题中,后来从方程组的求解中分离出来,形成了独立的行列式理论.本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法、按行(列)展开法则以及拉普拉斯展开定理.

§1.1 n阶行列式

本节主要介绍了排列、逆序、对换以及n阶行列式的定义.

一、排列、逆序和对换

设对n个不同的元素进行编号,则可一一对应于自然数$1,2,\cdots,n$.不失一般性,下面仅讨论1至n这样的自然数排列.

定义1 由自然数$1,2,\cdots,n$组成的一个不重复的有序数列称为一个**n级排列**,简称**排列**,一般记为$i_1i_2\cdots i_n$,或$j_1j_2\cdots j_n$.

例如,2431是一个4级排列,25314是一个5级排列.

自然数$1,2,\cdots,n$共可以组成$1\cdot2\cdot\cdots\cdot n=n!$个不同的$n$级排列.$12\cdots n$是一个$n$级排列,从左往右,具有从小到大的自然顺序,称这样的排列为**标准排列**.

定义2 在一个排列中,如果两个数(不一定相邻)的前后位置与标准排列的前后位置不同,即前面的数大于后面的数,则称它们构成一个**逆序**,一个排列中所有逆序的个数称为这个排列的**逆序数**.排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数是奇数的排列称为**奇排列**,逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例1 2431中,21,41,31,43是全部的逆序,它的逆序数就是4,即$\tau(2431)=$

4,该排列为偶排列.而25314的逆序数是$\tau(25314)=5$,该排列为奇排列.

一般地,可按下面的方法计算逆序数:设有一个排列$i_1 i_2 \cdots i_n$,考虑数i_k,若排在i_k前且比i_k大的元素有t_k个($k=1,2,\cdots,n$),则有$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

定义3 在一个排列$i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$中,如果将两个数$i_s$和$i_t$对调,其余的数顺序不变,得到排列$i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,称这样的变换为一次**对换**.

例如,将排列14325中的数4与2作一次对换,得到新的排列12345.

定理1 任意排列经过一次对换后奇偶性改变.

证 (1)相邻的两个数对换的情形.设排列为$i_1 \cdots i_s a b j_1 \cdots j_t$,将$a$与$b$对换,则排列变为新排列$i_1 \cdots i_s b a j_1 \cdots j_t$.比较两个排列中的逆序,发现$i_1 \cdots i_s$;$j_1 \cdots j_t$中数的顺序没有改变,而且$a,b$与$i_1 \cdots i_s$和$j_1 \cdots j_t$中数的顺序也没有改变,仅仅改变了$a$与$b$的顺序.因此,经过一次对换后,新排列仅比原排列增加(当$a<b$时)或减少(当$a>b$时)了一个逆序,所以奇偶性改变.

(2)不相邻的两个数对换的情形.设排列为$i_1 \cdots i_s a j_1 \cdots j_t b k_1 \cdots k_r$,现将$a$与$b$对换,则排列变为新排列$i_1 \cdots i_s b j_1 \cdots j_t a k_1 \cdots k_r$.注意到,新排列可以由原排列将$a$依次与$j_1,\cdots,j_t,b$作$t+1$次相邻的对换,变为$i_1 \cdots i_s j_1 \cdots j_t b a k_1 \cdots k_r$,再将$b$依次与$j_t,j_{t-1},\cdots,j_1$作$t$次相邻的对换得到,共作了$2t+1$次相邻的对换.由此可知,新排列与原排列的奇偶性相反.

定理2 由$1,2,\cdots,n$构成的全部n级排列共有$n!$个,其中奇、偶排列各占一半,均为$\frac{n!}{2}$个($n \geqslant 2$).

证 由于n级排列的总个数为$n(n-1)\cdots 2 \cdot 1=n!$.设它有$s$个奇排列,$t$个偶排列.将每个奇排列中位于排列前1、2位的两个数都对换一次,就得到s个偶排列,显然有$s \leqslant t$.同理有$t \leqslant s$.所以$s=t$,即奇、偶排列的个数相等,各为$\frac{n!}{2}$个.

二、n 阶行列式的定义

定义4 由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为***n*阶行列式**,其中横排和纵排分别称为它的**行**和**列**.***n*阶行列式**表示由所

有取自不同行和不同列的 n 个元素乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的代数和，其中各项的符号是 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，这样的乘积项共有 $n!$ 个. 该定义用数学公式表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.1.1}$$

也可简记作 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 称为行列式 D 的 (i,j) 元，简称元素.

特别地，当 $n=1$ 时，$|a|=a$，一阶行列式 $|a|$ 就是数 a，不要与数的绝对值混淆.

例 2 利用 n 阶行列式定义，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ 中，乘积项 $5\times4\times6\times7$、$5\times7\times6\times4$ 与 $4\times5\times6\times7$ 的符号.

解 因为 $5\times4\times6\times7=a_{21}\times a_{13}\times a_{32}\times a_{44}$，对应的符号为 $(-1)^{\tau(2134)+\tau(1324)}=+1$.

$5\times7\times6\times4=a_{21}\times a_{44}\times a_{32}\times a_{13}$，对应的符号为 $(-1)^{\tau(2431)+\tau(1423)}=+1$.

$4\times5\times6\times7=a_{13}\times a_{21}\times a_{32}\times a_{44}$，对应的符号为 $(-1)^{\tau(1234)+\tau(3124)}=+1$.

例 2 中，4、5、6、7 来自不同行不同列，元素乘积的结果唯一，乘积项的符号相同，即乘积的顺序也不改变乘积的符号. 是因为当按不同顺序做乘积时，改变相乘顺序，则元素的行下标排列和列下标排列同时对换，同时改变奇偶性，二者排列逆序数之和的奇偶性不会改变，所以乘积的符号相同. 因此，对于 n 阶行列式 D，n 个元素只要来自不同行不同列，乘积唯一，元素顺序不影响符号，所以符号唯一，行列式的结果唯一，行列式的定义有意义. 因此可以给出行列式的另外两个定义.

从第 1 行、第 2 行、第 3 行、…、第 n 行按顺序取不同列的 n 个元素，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1.2}$$

同理，从第 1 列、第 2 列、第 3 列、…、第 n 列按顺序取不同行的 n 个元素，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \qquad (1.1.3)$$

例 3 利用 n 阶行列式定义计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 和三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 由行列式定义,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

如图 1.1,将 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为主对角线,主对角线上的元素称为主对角元,将 a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为副对角线. 二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积,这称为**二阶行列式的对角线法则**.

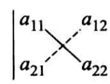

图 1.1

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + (-1)^{321} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(132)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

三阶行列式形式上具有下面的特点:

(1) 共有 6 = 3! 项;

(2) 每一项都是不同行、不同列的三个元素的乘积;

(3) 其中三项附有"+"号,三项附有"-"号.

三阶行列式可用对角线法则记忆,如图 1.2. 即平行于主对角线(以实线联结)的三个元素乘积是代数和的正项,平行于副对角线(以虚线联结)的三个元素乘积是代数和的负项. 对角线法则只适用于二、三阶行列式,不适用于高于三

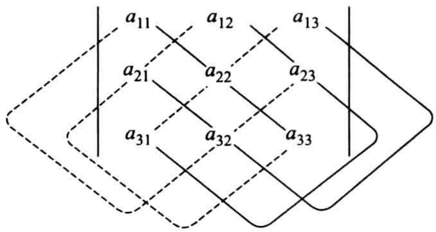

图 1.2

阶的行列式.

例 4 求 n 阶**下三角行列式**(对角线以上的元素全为零) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,**上三角行列式**(对角线以下的元素全为零) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 以及**对角行列式**(对角线以外的元素全为零) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$ 的值.

解 在下三角行列式中,第 1 行的元素除了 a_{11} 以外全为零,因为取第 1 行的其他数做乘积都是 0,故只考虑取 $j_1=1$ 的数 a_{11} 做出乘积. 第 2 行中,除 a_{21},a_{22} 外,其余元素全为零,那么乘积一定为零,因此只考虑 $j_2=1,2$ 两种情况. 由于 a_{11} 位于第 1 列,所以只能从第 2 行中取位于第 2 列的数 a_{22}. 这样逐步推下去,在 $n!$ 个的乘积中,除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余的项全为零,而这一项列标的排列 $12\cdots n$ 是偶排列,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,上三角行列式的值也是主对角元的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,对角行列式的值为 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

例 5 设 $D=\begin{vmatrix}1 & \lambda \\ 2 & \lambda^2\end{vmatrix}$,问 λ 为何值时,$D=0$.

解 由行列式的定义得,$D=\lambda^2-2\lambda$,由 $D=\lambda^2-2\lambda=0$,得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$,即当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时,$D=0$.

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix}.$$

解 根据三阶行列式的对角线法则,

$$\begin{aligned}D&=(-3)\times(-3)\times5+0\times(-1)\times(-1)+4\times2\times0\\&\quad-4\times(-3)\times(-1)-(-3)\times(-1)\times0-0\times2\times5=33.\end{aligned}$$

例 7 解方程

$$\begin{vmatrix}x & 6 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1\end{vmatrix}=0.$$

解 原行列式方程等价于 $x^2+x-6=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=3$.

§1.1 练　　习

1. 求下列排列的逆序数:

(1) 41253;　　(2) 3712465;

(3) 24531876;　　(4) $n(n-1)(n-2)\cdots321$.

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{22}$ 的项.

3. 已知由 1,2,3,4,5 组成一个偶排列 $32x5y$,求 x,y.

4. 在六阶行列式中,下列两项各应带什么符号.

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;(2) $a_{33}a_{42}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

5. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 3 \\ 1 & 4\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$.

6. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2009 & 2008 & 2007 \\ 7 & 9 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -9 & 8 \\ 8 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} 1 & & \\ 4 & 2 & \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 41 & 7 \\ 107 & 37 \end{vmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$.

7. 按行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式的性质

本节主要介绍行列式的重要性质，然后进一步讨论如何利用性质来计算行列式的值.

定义 5　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D 的转置行列式,记作 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 将 D 按行的顺序取元素,

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

设 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$,其中 $b_{ij}=a_{ji}$,将 D^{T}按列的顺序取元素,

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由此性质可知,行列式的行和列具有同等的地位,行具有的性质列也同时具有.因此对于以下性质仅对行或列一种情况作出证明.

性质 2 若互换行列式的两行(列),则行列式变号.

证 设行列式 $D_1=\det(b_{ij})$是由行列式 $D=\det(a_{ij})$互换第 s,t 两行得到的,即 $b_{sj}=a_{tj},b_{tj}=a_{sj}$,其余元素均未变,则

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n}\\ &=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n}\\ &=\sum(-1)(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &=-\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &=-D. \end{aligned}$$

通常以 r_i表示行列式的第 i 行,以 c_i表示行列式的第 i 列.互换 i,j 两行,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$,互换 i,j 两列,记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1 若行列式 D 中有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证 将 D 中相同的这两行互换,根据性质 2,有 $D=-D$,则 $D=0$.

性质 3 行列式 D 某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式.

证 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由行列式定义，

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{sj_s})\cdots a_{nj_n}=k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{sj_s})\cdots a_{nj_n}=kD.$$

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子都可以提到行列式的外面.

推论 3 若行列式有两行(列)的所有元素成比例,则此行列式等于零.

证 由推论 2,将这两行(列)的比例系数提到行列式外面,余下的行列式中就有两行(列)相同,再由推论 1,可知行列式等于零.

第 i 行乘以 k,记作 $r_i\times k$;第 i 列乘以 k,记作 $c_i\times k$;第 i 行(列)提出公因子 k,可记作 $r_i\div k(c_i\div k)$.

性质 4 若行列式 D 的某一行(列)的每个元素都是两数之和,则 D 可表示成两个行列式 D_1 与 D_2 的和,其中 D_1、D_2 对应的行(列)分别以这两个数为元素,其他行(列)的元素与 D 相同,即

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=D_1+D_2. \end{aligned}$$

证 由行列式定义,

$$\begin{aligned} D&=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &=D_1+D_2. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

证 以下仅证列的情况.不失一般性,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上去,则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D+0$$

$$=D.$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上去,记作 r_i+kr_j;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记作 c_i+kc_j.

性质 2、性质 3、性质 5 介绍了行列式关于行(列)的三种运算,即交换两行(列),$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;某行(列)乘以数 $k(k\neq0)$,$r_i\times k(c_i\times k)$;某行(列)乘以数 k 加到另外一行(列)上去,$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.利用它们可简化行列式的计算.特别是 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 可以把行列式中的许多元素化为 0,这样可以将行列式化为上三角行列式,由 1.1 节例 4 的结论,直接算得行列式的值.

例 8 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=}\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$