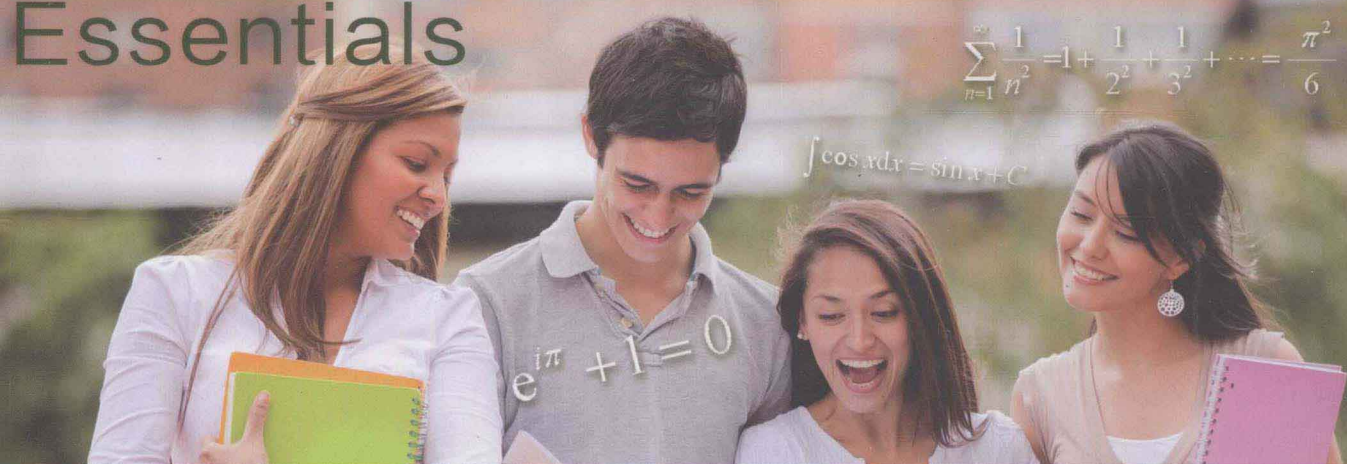


AP Calculus

以ACT和SAT (I & II) 为主干、以AP为龙头的美国留学高端课程体系，为历届富臣常春藤学员所实践，已经取得了良好的效果。

Essentials



吕小康 / 编著

AP 微积分 基础教程

双语
详解
微积分
AB &
BC 所有
考点。详解相关
TI-84计算器操作。

习题
丰富，
解答
详尽，
便于教学
和自学。附赠
AB & BC全真模拟
试题及详解各
1套。

中国人民大学出版社

www.1kao.com.cn

注册享受增值服务

010213

刮开涂层 网站注册

A P

微积分基础教程

吕小康 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

AP 微积分基础教程 / 吕小康编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2012.12
ISBN 978-7-300-16521-9

I. ①A… II. ①吕… III. ①微积分-高等学校-入学考试-美国-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 239195 号

AP 微积分基础教程

吕小康 编著

AP Weijifen Jichu Jiaocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国1考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规 格	185 mm × 260 mm 16 开本	版 次	2013 年 1 月第 1 版
印 张	25.5	印 次	2013 年 1 月第 1 次印刷
字 数	565 000	定 价	48.00 元

版权所有

侵权必究

印装差错

负责调换



Preface

AP 基础教程系列教材总序

AP 全称为美国大学先修课程 (Advanced Placement), 是美国大学理事会 (College Board) 推出的面向优秀高中学生的大学基础课。AP 考试已经在全球 80 个国家举行, 包括哈佛大学、耶鲁大学、哥伦比亚大学、麻省理工大学等在内的 3 600 多所大学认可 AP 成绩并给予通过者不同程度的学分。现在的 AP 课程分为 3 大类 30 多门, 包括语言类、数学与科学类、社会科学与历史类。AP 考试每年举行一次, 报名时间为 3 月中上旬, 考试日期为 5 月前两周, 在国内, 北京、上海、南京等多个城市有常设考点。AP 考试采用的是 5 分制, 从 1 分到 5 分, 3 分以上的成绩为大多数的大学所接受, 但顶尖级大学 (TOP 30) 多要求 4 分或 5 分。学生在入读这些大学时, 可以将考试通过的 AP 学分折抵大学学分, 减免大学课程数量, 达到缩短学时、节省学费的目的。

AP 的所有课程和考试均由著名的大学教授团队和高中教师一起设计, 使用的教材均为美国大学主流教材。其试卷也由美国大学理事会公开招聘、统一培训的专业人士批改, 其中多数是大学专业教师。设计 AP 课程的包括耶鲁大学、普林斯顿大学的著名教授和全美最著名的高中教师。例如, 斯坦福大学获得普利策奖的大卫·肯尼迪 (David Kennedy) 教授以及 27 岁即成为哈佛大学经济学终身教授、前美国总统经济顾问委员会主席曼昆 (Gregory Mankiw) 都曾分别担任过 AP 美国历史和 AP 经济课程开发委员会的主席。AP 的作用主要有三点: (1) 配合 ACT、SAT 和 TOEFL 成绩, 申请名牌大学和奖学金; (2) 抵扣大学学分, 缩短大学教育时间, 降低大学教育成本; (3) 在国内提前解决学习方式适应问题。

在美国, 能参加 AP 课程学习的学生本身就十分优秀, 且具有出众的学习能力。提交 AP 成绩能够使美国一流名校确信学生敢于挑战难度。据 AP 官方统计, 进入名牌大学的

学生平均都会提交 2~3 门的 AP 成绩来增加申请时的优势筹码。在这种情况下, 如果一个学生未在申请名校时提交 AP 成绩, 只依靠学校成绩就很难在众多申请者中脱颖而出。另外, 根据美国教育部的研究报告, 在高中期间上了 AP 课程的学生, 大学的毕业率远高于没有上过 AP 的学生。上过 2 门以上 AP 课程的 61% 的学生可以在四年以内获得学士学位, 上过 1 门的有 45%, 而没有上过 AP 的学生中只有 29% 能够在四年内获得学士学位。同时, 根据美国大学理事会 2010 年的研究报告, 如果多读一年公立大学, 则意味着要多交 8 000 美元~19 000 美元的学费(选择州内公立大学入学的学费平均为 7 662 美元一年; 选择州外公立大学入学的学费为 18 529 美元一年)。而私立大学的学费则更可能高达 4 万美元~5 万美元一年, 如果能以 AP 成绩完成抵扣而提前或准时毕业, 可以有效地降低家庭的经济支出。

2000 年后, AP 考试的参加人数扩展迅速。我们根据 AP 官方于 2012 年提供的数据制作了图 1 和图 2, 从中可以直观地了解到 AP 项目的全球发展趋势。

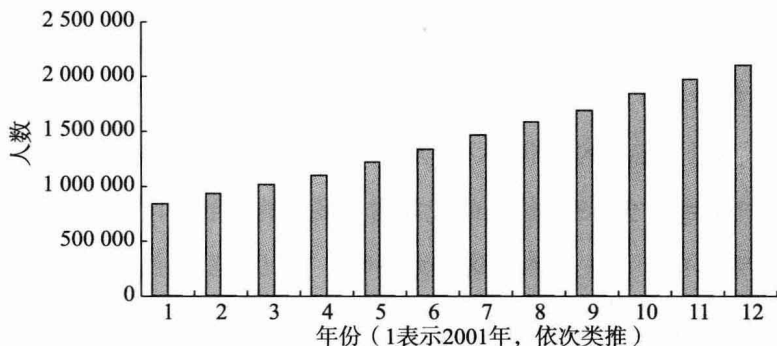


图 1 2001—2012 年 AP 考试人数递增趋势

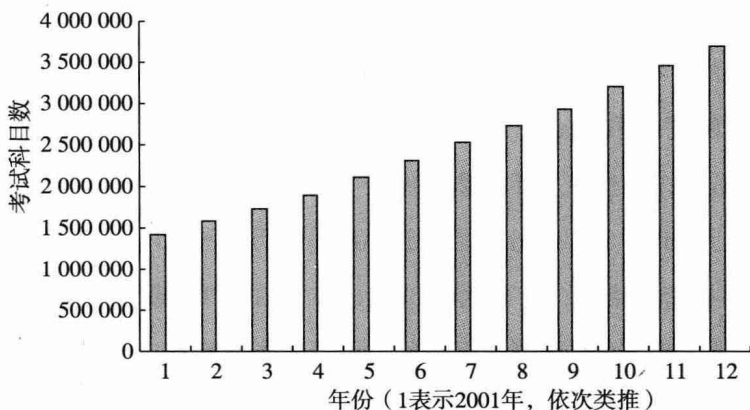


图 2 2001—2012 年 AP 考试科目数递增趋势

与此同时, 中国考生的数目也在飞速增长, 从 2009 年的不到 500 人, 3 年内迅速发

展到 2012 年的 1.2 万人，并一举成为最大的海外 AP 考试参加国。而根据美国开放报告的数据，2011 年成功申请到美国大学本科教育的学生不过 5.7 万多人。2012 年的留学人数当然会比这更多，但从比例中也大致可以看出，有一大部分中国留美学生已经在国内接触过 AP 课程。在这种大背景下，国内成绩中等的学生要上美国一流的大学，国内成绩优秀的学生要上美国顶尖的大学，AP 课程是必不可少的选择。

2013 年，在中国大陆开考的 AP 课程将达到 21 门。涵盖的科目除了有数理化生以外，还有音乐、艺术、历史、经济、计算机、外语等，其中很多课程并不适合一般中国学生。如美国历史、美国政治等需要有很强的英文能力和思考深度，考生往往很难在规定时间内完成数篇难度和长度绝不低于 SAT 作文的论述题，而音乐理论、艺术史、拉丁语类等课程在中国中学里相当不普及，中国学生基础太弱，也不太适合一般学生报考。一般而言，中国学生学 AP、考 AP，可以先从自己比较擅长的、有基础的、对英文水平要求相对较低的学科入手，微积分 AB、微积分 BC、统计学、化学、物理 B、物理 C（分为力学与电磁学，需要微积分基础）、微观经济学、宏观经济学等课程比较适合中国学生。

另外，英语语言类课程是美国大学的基础课程，类似于中国大学的大学语文，属于美国大学里的最基础课程，也是最受欢迎的课程之一。尽管它对中国学生而言难度较大，但仍建议中国学生选修，以掌握主流美国大学的主流课程，并通过这一课程的学习，反过来促进其英语理解与写作水平的提高。这对于学生在考完 AP 之后继续冲刺托福或 ACT、SAT 考试是有极大帮助的，因此也建议基础较好的同学参加这门考试。当然，对于学有专长的同学，选择参加一些“冷门”的科目，可以增加课程选择的多样性，在力所能及的情况下，也是可以采取的一种报考策略。总体而言，高一（极优秀的同学可以在初三时开始）、高二时先参加能够获得高分的科目，高三时再冲刺感兴趣的科目，是比较适宜的 AP 备考战略。

为了满足国内学生日益增长的学习 AP 课程的需求，富臣教育特意邀请富有经验的大学专业教师和富臣职业 AP 授课教师，组织编写了 AP 基础教程系列教材，旨在为广大 AP 学子提供内容框架上的搭建和解题方法上的点拨，同时向中学生介绍美国大学课程的基本理念和相关内容。每本书都兼顾课程知识体系的自身完整性以及知识点与 AP 考试的契合性，既能照顾 AP 的难度，又不完全拘泥于考试本身而有适当的拔高，以体现大学学习的专业性和严肃性。因此，本系列教材既可以作为已经学过 AP 相关内容的同学的应急考前辅导书，又可以作为从零开始的同学的基础教材，循序渐进地讲解各专业课程知识，并结

合富臣职业团队的 AP 辅导经验介绍相关的考试技巧。本系列教材还可以作为使用美国本土教材的国际学校或公立学校国际部的教师和学生选用为辅导教材或自学教材，也可以作为培训学校的独立培训教材使用。

值得一提的是，本系列教材的所有图书在出版之前均已经过数个轮次的内部培训使用。实际上，为了能够把握 AP 考试的动态，从 2009 年起，我们每年均会派出骨干教师队伍参加 AP 的年会和在国内各地举办的各种教学研讨会，与 AP 官方培训教师 and 国内同行切磋教学和应试经验，同时将这些经验应用于富臣内部学员的教学实践。由于认识到对英语并未完全过关的中国学生单纯使用国外英语教材的不足，我们从 2009 年起便着手编辑内部培训讲义，并经过任课教师与专业人员的反复讨论，同时根据学生反馈意见进行了仔细的删改与校对，最终才定稿出版。原讲义中的许多疏漏之处，已经消灭在多轮次的内部试讲过程中。因此，本系列教材的出版是所有编写人员、培训老师和诸多富臣 AP 学子共同努力的心血结晶，我在这里也要向所有使用过内部讲义的富臣学子表示衷心的感谢！同时，这也决定了富臣的 AP 基础教程系列教材比起某些为追求市场影响而短期编排的辅导教材具有更高的专业品质，接受过更严格的实践检验。当然，这并不是说富臣的这些教材已经达到完美的状态，对于其中依然可能存在的失误之处，我们衷心期盼广大学子与同行提出诚恳的批评与建议！

最后，我谨代表富臣教育所有教师和工作人员，祝愿所有 AP 学子能够从 AP 基础教程系列教材中获得实实在在的收益，并最终奔赴理想的美国大学，开启辉煌人生的崭新篇章！

富臣教育校长 刘胜利



Preface

前言

AP 微积分介绍与应考指南

一、微积分学的基本特征

“在一切理论成果中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样，被看做人类精神的最高胜利了。”这是恩格斯的一句名言。微积分的创立是数学发展过程中的里程碑，开创了传统数学向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段。我国数学家梁宗巨教授曾称：“如果将整个数学比做一棵大树，那么初等数学是树根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分。”这是以比喻形象地说明了微积分在数学领域内部的基础地位。同时，微积分在数学之外的物理、工程、生物、医学和社会科学等学科的广泛应用，也使得它成为沟通自然科学和社会科学的一座桥梁，同时也使得微积分的学习成为各个国家高等教育的重要内容之一。

总体而言，微积分是以函数为研究对象，以极限方法为基本研究方法的数学学科。“极限”的思想贯穿着整个微积分学的始终。自然界中的很多量，仅靠有限次的代数运算是确定不了的，而必须通过分析一个无限变化过程的变化趋势才能确定下来，这就产生了极限分析方法。以极限方法研究变化率问题产生了微分学；以极限方法研究微小量的积累问题产生了积分学；而牛顿—莱布尼茨公式则揭示了两者的内在联系，建立了统一的微积分学。因此，严格意义上，我们只能说牛顿和莱布尼茨发展和整合了微积分学，而不是创造了微积分学，其数学基础在他们之前就已经形成了。

AP 微积分介绍的是微积分学的基本内容，包括微分学、积分学和无穷级数三大块内容，并且局限于一元函数的微积分学，而不涉及更复杂的多元函数的微积分学。它分为两个层次：Calculus AB 与 Calculus BC，它们之间是包含与被包含的关系，即 BC 包含 AB 的全

部内容，并且还包含其他更高难度的内容。这有点类似于国内的文理科数学的分类。同比于国内大学的常规微积分课程设置，微积分 AB 差不多相当于国内文科高等数学中的内容与难度（教学时长通常为 1 个学期），而微积分 BC 则差不多相当于国内普通理科的微积分课程的内容与难度（教学时长通常为 1 个学年）。对于将来在美国学习生物化学、社会科学、普通商科及管理类的学生而言，BC 内容差不多已经涵盖整个大学本科的教学内容；也就是说，如果能够拿到 5 分而学校又承认 AP 学分的话，就意味着大学四年没有必要再修习微积分课程。当然，对于从事专业数学、物理、计算机、工程及经济、金融等学科的学生而言，BC 的内容依然不能满足其学科的要求，尚需进行进一步的学习。例如数学专业和工程类专业通常会修习数学分析（目前通常认为数学分析就等同于微积分）或高等数学的课程，微积分的内容就包括在其中。

作为高等数学的内容（虽然现在在国内高二时，也在文理科数学书中介绍了非常粗浅的微积分内容，但其在整个高中数学中的作用仍然是聊胜于无），微积分的内容天然是比较抽象的，对代数运算和抽象思维的要求比较高。学生在学习过程中，必须适应数学内容的抽象性和数学语言的符号化特征，同时还需要适应从有限运算到无限运算的转变，否则就很难学好微积分。但是，在所有 AP 课程中，我依然认为微积分是最适合中国考生的一门学科。这不是因为它简单，而是因为它“亲切”。当然这里的“亲切”是有特殊含义的。微积分是一门典型的数学学科，在这里，你能看到言简意赅的定义、一丝不苟的证明、眼花缭乱的符号、层出不穷的公式、花样繁多的技巧——总之，从小建立的有关数学的所有印象，都可以在微积分这一门课程里找到印证。它的学习方法也非常“简单”：你以前是如何学数学的，或者你周围的数学好的同学、长辈是怎样学数学的，你就应当如何学习微积分。而对中国学生的另外一个有利因素是：AP 微积分的英文描述非常少，多数题目都是借用公式和符号进行表达，文字只起相对次要的辅助作用，题目的已知条件、关键变量和待解变量等通常一目了然。应当说，只要系统地学习过英文或双语版微积分的基本知识，就不应当存在看不懂题的情况，而只可能存在看得懂、做不出的情况；也就是说，AP 微积分考试几乎不存在语言障碍，只存在数学障碍。而数学能力相对英语能力而言，本身又是中国学生的强项，因此说 AP 微积分最适合中国考生完全是合理的。

另外，AP 微积分对中国学生的一个便利之处还在于：微积分的教材几乎是全球通用的，其编写体例、符号表达、例题分析和实战题型几乎没有太多的差异性——如果有，那就是国外的微积分教学更注重图形结合，利用计算机和计算器的先进功能，对数形结合的

分析要求更多；而国内的微积分教学更加传统，更加强调传统的抽象运算和数学技巧的使用。但两者之间的差别是非常细微的，对于初学者而言，几乎可以忽略。

二、AP 微积分的考试类型、评分标准与考纲

AP 的微积分考试，一年之内 AB 与 BC 只能选择一科（因为考试时间相重），但并不要求一定得先考 AB 再考 BC。实际上，如果选择 BC 就可以不考 AB，因为 BC 中包含 AB 的子得分；每年的考题中，会有部分考题是相同的（这有点像国内的文理科数学高考卷）。题型分为两大类：45 道单项选择题（5 选 1）和 6 道大题（Free Response Questions）。其中，选择题和大题又各自分为两个部分，这主要以能否使用计算器为划分标准（见表 1）。

表 1 AP 微积分考试题型与题量

题型	计算器	题量	时长
选择题 I	不允许	28	55 分钟
选择题 II	允许	17	50 分钟
大题 I	允许	2	30 分钟
大题 II	不允许	4	60 分钟

选择题的前 28 题为非计算器题，不得使用计算器，时间是 55 分钟；后 17 题为计算器题，可以（但有些并不需要）使用计算器，时间是 50 分钟。选择题总时间为 1 小时 45 分钟，休息 10 分钟后开始考大题。自 2011 年起，大题的计算器题由过去的 3 道变成 2 道，时间为 30 分钟；非计算器题为后 4 道，时间为 1 小时。大题的总时间为 1 个半小时。总考试净时长为 3 小时 15 分钟。AP 自 2011 年起在中国大陆开放了若干考点，考生可就近参加考试。

AP 微积分考试的评分是 5 分制。选择题与大题各占全部分值的 50%，原始分满分 108 分，故选择题和大题的原始分各为 54 分。具体而言，选择题每题答对得分，答错不倒扣分（2011 年开始的新政策），总分 54 分。大题每题原始分满分为 9 分，权重系数为 1（即如果原始分得分为 3 分，则最后得分就为 3）。最后加总后，通过分数转换表，将所有分数转化为 5 分制。AB 与 BC 的转换略有不同，BC 的要求略高于 AB。每年的等级分数对应的原始分区间略有变化，但总体趋势非常稳定。一般而言，取得原始分 $\frac{2}{3}$ 以上的分数，应当能够确保得到 5 分。表 2 是迄今为止最新公布的分数转换标准。

表 2 AP 微积分的等级分与原始分转换表 (2007 年)

等级分	AB 原始分	BC 原始分	评价
5	68—108	69—108	优秀 Extremely well qualified
4	52—67	59—68	良好 Well qualified
3	39—51	44—58	及格 Qualified
2	27—38	26—43	可能及格 Possibly qualified
1	0—26	0—25	无建议 No recommendation

一般而言, 美国大学要求考到 4 分以上才可以抵扣学分; 而名牌大学如哈佛、斯坦福等, 多数都要求 5 分才可抵扣学分. 表 3 给出 2011 年微积分 AB 与 BC 的成绩分布 (历年成绩分布非常接近, 没有显著变化):

表 3 2011 年 AP 微积分成绩分布

等级分	AB		BC	
	人数	百分比	人数	百分比
5	54 555	21.4	40 546	47.6
4	41 830	16.4	13 557	15.9
3	47 151	18.5	14 251	16.7
2	27 273	10.7	5 040	5.9
1	84 548	33.1	11 800	13.9
4 分以上	96 385	37.8	54 103	63.5
总计	255 357	100	85 194	100

可见参加 AB 考试的人数比 BC 要多得多, 是美国最受欢迎的 10 大 AP 课程之一. 但是 BC 的高分率却比 AB 高很多, 这并不是因为 BC 简单, 而主要是因为 BC 考生的基础水准较高, 许多考生可能是上一年参加完 AB 考试后再进入 BC 考试的. 许多没有基础, 或者基础不好的同学, 都选择了 AB, 于是造成 AB 的低分率较高. 但是作为中国学生, 应当坚定一次通过 BC 的信心, 在中国人的强项上拿到该拿的分数.

下面是 AP 官方给出的微积分 AB 与 BC 的内容, 凡是 BC 内容, 均做出 BC 标记, 同时对关键内容做出中文说明.

I. Functions, Graphs and Limits 一、函数、图形与极限

Analysis of graphs 图形分析

With the aid of technology, graphs of functions are often easy to produce. The emphasis is on the interplay between the geometric and analytic information and on the use of calculus both to predict and to explain the observed local and global behavior of a function.

Limits of functions (including one-sided limits) 函数的极限 (包括单侧极限)

- An intuitive understanding of the limiting process
- Calculating limits using algebra
- Estimating limits from graphs or tables of data

Asymptotic and unbounded behavior 渐近性与无界性

- Understanding asymptotes in terms of graphical behavior
- Describing asymptotic behavior in terms of limits involving infinity
- Comparing relative magnitudes of functions and their rates of change (for example, contrasting exponential growth, polynomial growth and logarithmic growth)

Continuity as a property of functions 连续

- An intuitive understanding of continuity (The function values can be made as close as desired by taking sufficiently close values of the domain.)
- Understanding continuity in terms of limits
- Geometric understanding of graphs of continuous functions (Intermediate Value Theorem and Extreme Value Theorem)

(BC) Parametric, polar and vector functions 参数方程、极坐标与向量

The analysis of planar curves includes those given in parametric form, polar form and vector form.

II. Derivatives 二、导数

Concept of the derivative 导数的概念

- Derivative presented graphically, numerically and analytically
- Derivative interpreted as an instantaneous rate of change
- Derivative defined as the limit of the difference quotient
- Relationship between differentiability and continuity

Derivative at a point 函数在某点的导数

- Slope of a curve at a point (Examples are emphasized, including points at which there are vertical tangents and points at which there are no tangents.)

- Tangent line to a curve at a point and local linear approximation
- Instantaneous rate of change as the limit of average rate of change
- Approximate rate of change from graphs and tables of values

Derivative as a function 作为函数的导数

- Corresponding characteristics of graphs of f and f'
- Relationship between the increasing and decreasing behavior of f and the sign of f'
- The Mean Value Theorem and its geometric interpretation
- Equations involving derivatives (Verbal descriptions are translated into equations involving derivatives and vice versa.)

Second derivatives 二阶导数

- Corresponding characteristics of the graphs of f , f' and f''
- Relationship between the concavity of f and the sign of f''
- Points of inflection as places where concavity changes

Applications of derivatives 导数的应用

- Analysis of curves, including the notions of monotonicity and concavity
- (BC) Analysis of planar curves given in parametric form, polar form and vector form, including velocity and acceleration
- Optimization, both absolute (global) and relative (local) extrema
- Modeling rates of change, including related rates problems
- Use of implicit differentiation to find the derivative of an inverse function
- Interpretation of the derivative as a rate of change in varied applied contexts, including velocity, speed and acceleration
- Geometric interpretation of differential equations via slope fields and the relationship between slope fields and solution curves for differential equations

(BC) Numerical solution of differential equations using Euler's method

(BC) L'Hospital's Rule, including its use in determining limits and convergence of improper integrals and series

Computation of derivatives 求导运算

- Knowledge of derivatives of basic functions, including power, exponential, logarithmic, trigonometric and inverse trigonometric functions
- Derivative rules for sums, products and quotients of functions
- Chain rule and implicit differentiation

(BC) Derivatives of parametric, polar and vector functions

III. Integrals 三、积分

Interpretations and properties of definite integrals 定积分的定义与性质

- Definite integral as a limit of Riemann sums
- Definite integral of the rate of change of a quantity over an interval interpreted as the change of the quantity over the interval
- Basic properties of definite integrals (examples include additivity and linearity)

Applications of integrals 积分的应用

Appropriate integrals are used in a variety of applications to model physical, biological or economic situations. Although only a sampling of applications can be included in any specific course, students should be able to adapt their knowledge and techniques to solve other similar application problems. Whatever applications are chosen, the emphasis is on using the method of setting up an approximating Riemann sum and representing its limit as a definite integral. To provide a common foundation, specific applications should include finding the area of a region (including a region bounded by polar curves), the volume of a solid with known cross sections, the average value of a function, the distance traveled by a particle along a line, the length of a curve (including a curve given in parametric form), and accumulated change from a rate of change

Fundamental Theorem of Calculus 微积分学基本定理

- Use of the Fundamental Theorem to evaluate definite integrals
- Use of the Fundamental Theorem to represent a particular antiderivative, and the analytical and graphical analysis of functions so defined

Techniques of antidifferentiation 积分技巧

- Antiderivatives following directly from derivatives of basic functions

(BC) Antiderivatives by substitution of variables (including change of limits for definite integrals), parts, and simple partial fractions (nonrepeating linear factors only)

(BC) Improper integrals (as limits of definite integrals)

Applications of antidifferentiation 积分的应用

- Finding specific antiderivatives using initial conditions, including applications to motion along a line

- Solving separable differential equations and using them in modeling (including the study of the equation $y' = ky$ and exponential growth)

- Solving logistic differential equations and using them in modeling

Numerical approximations to definite integrals 定积分的近似运算

Use of Riemann sums (using left, right and midpoint evaluation points) and trapezoidal sums to approximate definite integrals of functions represented algebraically, graphically and by tables of values

(BC) IV. Polynomial Approximations and Series 四、无穷级数

Concept of series 级数的概念

A series is defined as a sequence of partial sums, and convergence is defined in terms of the limit of the sequence of partial sums. Technology can be used to explore convergence and divergence.

Series of constants 常数项级数

Motivating examples, including decimal expansion

Geometric series with applications

The harmonic series

Alternating series with error bound

Terms of series as areas of rectangles and their relationship to improper integrals, including the integral test and its use in testing the convergence of p-series

The ratio test for convergence and divergence

Comparing series to test for convergence or divergence

Taylor series 泰勒级数

Taylor polynomial approximation with graphical demonstration of convergence (for

example, viewing graphs of various Taylor polynomials of the sine function approximating the sine curve)

Maclaurin series and the general Taylor series centered at $x = a$

Maclaurin series for the functions e^x , $\sin x$, $\cos x$, and $1/(x-1)$

Formal manipulation of Taylor series and shortcuts to computing Taylor series, including substitution, differentiation, antidifferentiation and the formation of new series from known series

Functions defined by power series

Radius and interval of convergence of power series

Lagrange error bound for Taylor polynomials

从以上介绍可以看出，极限、导数（微分）和积分是 AB 和 BC 共有的内容，而级数则是 BC 特有的。更详细地，大家可以参考本书目录，总结哪些属于 AB、哪些属于 BC，从而选择合适自己应考范围的内容进行相应学习。

三、应考策略及本书利用指南

目前，国内外有关微积分的教材不胜枚举。以国内为例，几乎有多少所大学，就有多少本微积分教材（这也在一定程度上说明了微积分课程的普及性），但是专门为 AP 量身定做的微积分教材还相当稀少。国外的微积分教材和相关的 AP 培训书籍也比较丰富，但是对中国学生而言，仍然存在一定的语言障碍。而我始终坚持的一个观点是：一个人的语言能力与数学能力几乎无半点关联。我们总是听到一些美国人抱怨中国人的英语不好；托福考了 100 多分看英文电影、听新闻节目仍是一头雾水；遇到老美真容，自己一张嘴就脸红露怯的英语学习者也不在少数——但是有多少普通美国人（进入 MIT、加州理工之类的 Freak 除外）敢对中国学生的数学能力说一个“不”字？这就像一个美国本土乒乓球教练敢于质疑中国乒乓球国手的实战能力一样，完全不可理喻。类似地，我们当中多数未来的“美国大学生”，不论学了多少年的英语，过了多少类型（或者同一类型许多频次）的英语考试，其英语水平与本土学生的相比，差不多相当于国内 CBA 之于 NBA 的水平。

因此，在微积分及一般性的数学类学科的学习中，我们完全可以在一定程度上“屏蔽”语言因素，而只关注数学内容本身；待数学基础打扎实后，再补足相关的专业语言表达也不迟。这就决定了我在编写此书时，最为关注的就是微积分的本质内容。其一般方式就是中

文讲解、英文练习。实际上，多数习题中的英文表达也非常简练，完全构不成阅读障碍。当然，在讲解过程中，所有重要的概念和定理，都会给出英文名称，以便同学们及时熟悉这些英文词汇。同时，在例题中也会配备英文例题，并以 AP 格式进行书写，请同学们注意总结和模仿。在练习题的配置上，也注意中英结合的方式。每节最后均会给出丰富的中文习题，以便学生掌握和复习相关内容；每章最后都会给出 AP 风格的英文习题，以便大家检测本章内容。全书最后还配有 AB 及 BC 全真英语模拟试题各 1 套，以便临考前调整考试状态。为了方便大家自学，除了少数基础的题目外，绝大多数的习题都配有详解，可以帮助大家进行检查校正，或者提供做题的基本思路。为了方便大家检索相关知识，本书在附录中除了列出 AP 微积分本身的公式外，还将微积分学可能涉及的常见初等数学公式一并列出。同时，本书提供初等数学和微积分学的核心数学词汇的中英文对照表，可供同学们检查备用。

为了顺利地通过 AP 考试，在完成本书的学习后，大家还应至少做完 2003 至 2011 年的全部大题（包括 A 卷和 B 卷，可以在官网下载得到，包括答案）。由于 Collage Board 对中国学生的考试能力“望而生畏”，为了保证 AP 的学术声誉，因此 AP 大陆地区的考试对试卷的保密性和监考严格性超越所有其他类型的考试，一定程度上甚至超过了国内的高考。比如，考试过程中会伴有全程摄像，要求考生将做完的题用胶带粘住防止“跨区”回看，等等。因此，考生务必在平时学习和训练中，一步一个脚印地掌握所有知识点并熟悉所有考试题型，凭借自己真本事拿分，而不要寄希望于任何非常态的行为或无法把握的运气。

事实上，有一点大家可以放心，AP 的出题风格非常稳定，只要大家同时做完 A、B 卷的大题，就一定能够掌握其大致的风格。选择题的资源相对较少，但是一般选择题的难度不会很大，带难度的题一般不会超过 5 道，因此关键还在于对大题的把握性。一般而言，大题的出题点如下：一道运动问题（涉及导数和积分运算，在 BC 中为平面运动问题，涉及速度和加速度向量的表示）、平面图形的面积和旋转体或截面面积已知的体积问题（定积分）、一至两道图表或表格题（一般为积分近似运算或微分中值定理相关问题）、一道微分方程或相关变化率问题、一道导数及其应用的综合问题（AB）或极坐标相关问题（BC），BC 的最后一道大题几乎固定为无穷级数部分的泰勒展开及余项误差估计的内容。抓住了这些点，就可以纲举目张，有的放矢。

需要说明的是，本书求极限、导数和积分的部分运算题计算难度较大，超过了 AP 考试要求的难度（但并没有超出一般美国大学本科教材的难度），目的在于强化大家的计算