



“十一五”国家重点图书

法兰西数学
精品译丛

代数学教程

□ R. 戈德门特 著

□ 王耀东 译 张小萍 校



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书



代数学教程

□ R. 戈德门特 著

□ 王耀东 译 张小萍 校

D A I S H U X U E J I A O C H E N G



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01-2008-2672 号

Cours d'Algèbre

by Roger Godement

© 1966, Hermann, 293, rue Lecourbe, 75015 Paris

图书在版编目(CIP)数据

代数学教程 / (法) 戈德门特著; 王耀东译. — 北京: 高等教育出版社, 2013.6

(法兰西数学精品译丛)

ISBN 978-7-04-028757-8

I. ①代… II. ①戈… ②王… III. ①代数—教材
IV. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第068918号

策划编辑 王丽萍
责任校对 杨雪莲

责任编辑 李华英
责任印制 韩刚

封面设计 张楠

版式设计 余杨

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 涿州市星河印刷有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 37.75

字数 750千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版次 2013年6月第1版

印次 2013年6月第1次印刷

定价 89.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 28757-00

《法兰西数学精品译丛》编委会

主编：李大潜

编委：(按姓氏拼音次序排列)

Michel Bauderon

Jean-Pierre Bourguignon

Jean-Benoît Bost

Haïm Brezis

Philippe G. Ciarlet

Paul Malliavin

彭实戈

Claire Voisin

文志英

严加安

张伟平

助理：姚一隽

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学,在其发展过程中,一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用,作出了奠基性的贡献.他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉,在现代数学史上占据着不可替代的地位,在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名.在他们当中,包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字,也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家.由于他们的出色成就和深远影响,法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平,而且具有优秀的传统和独特的风格,一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学,在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步,并在艰难曲折中发展与成长,终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会,在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐,实现了跨越式的发展.这一巨大的成功,根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗,根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑,根源于改革开放国策所带来的强大推动,也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助.在这当中,法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响,法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用,无疑也是一个不容忽视的因素.足以证明这一点的是:在我国的数学家中,有不少就曾经留学法国,直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召,而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自已的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍,用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的

限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学(包括纯粹数学与应用数学)的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008年5月

序言

在科学系的数学教学计划中，随着相对现代和扩展的代数概念的引入，在法国编纂一本便于初学者参考的著作变得刻不容缓，呈现在读者面前的这本书尝试满足这个需要。以下我们来概述指导撰写本书的主要构思。

首先，本书以本人在巴黎讲授的在一般数学证书框架内的课程为基础，因此阅读本书除了在中学教育中获得的知识，不再要求其他知识。其次，我们补充了一些必要的几乎覆盖学士学位代数教学计划的知识（这涉及目前的数学 I 证书），该计划与一般数学的差别不大。于是本书应该可以在许多年内被纯粹和应用数学的大学生使用，它也几乎满足了对于具有一定程度理论性的物理感兴趣的人们的需要。掌握了本书内容之后，读者可以直接接触真正严谨的专门著述，不过我们显然并不希望普通读者在进入科学系一年之后立刻这么做！

本书的主题是那些如今所有人都认可的对于将来的数学家和物理学家不可或缺的内容：集合和函数，群，环，域，复数；向量空间，线性映射，矩阵；有限维向量空间，线性方程组，行列式，Cramer 公式；多项式，有理分式，代数方程；矩阵的化简。这些主题的选择显然反映了过去 50 年内数学的发展，但是我们认为这个发展应当以现今在面向专业数学家的著作中所保持的风格来表述。

许多人，尤其是大多数局限于数学应用的人，认为当为初学者写书时，试图做过分严格的证明，个个定理皆证，引进太一般的概念，使用严格定义和干巴巴的术语，是无用的，甚至是有害的。如果他们果真有理，那么这似乎说明，与有见识的专业数学家的观点相反，数学课本编写得越不严密，初学者反而越容易理解。职业拉丁语学者，作为他们的工作，懂得每天从意大利地下挖掘出的记录片段，但是没有一个人拉丁语教授会利用这些记录教初学者拉丁语——人们更愿意借助精心编写的语法进行

拉丁语教学. 在数学中也一样, 当遇到解释一个艰涩的定义, 补充一个不完善的证明, 或者揭示一个定理的内在理由这些事情时, 人们自然不能奢望初学者和专业数学家有同样的感受.

还必须注意到, 20 世纪初数学的进步使有诚意的人们进行数学教育实质性的变革成为可能. 一些简单且普遍的新概念显著地扩展了传统推理的应用范围, 一些新的证明发现后, 使得昔日对于初学者太困难的证明, 现在也可以接受了. 而且对于严格性的关注, 原先总认为是数论专家们的特长, 30 年来已渗透到数学的所有分支, 现在还 (不同程度成功地) 渗透到部分学校教材, 有些人还明显地走在了专业数学家的前面. 这种变革以及有时与之伴随的对于变革成果的夸大宣传, 并没有阻止一些数学应用者的抗议, 他们困难于理解其子女的教材而烦恼; 有时还会听到人们对于数学家的指责, 说他们夸大自己贡献的重要性, 并且转移初学者对于更实际的问题的注意力. 无疑这类指责不无道理; 但是人们为什么不议论一下, 比如说, “探索宇宙” 的专家, 他们总觉得请求巨额资金去认识金星是天经地义的, 可在他们的眼皮底下, 却还有几百万人在为免于饿死而苦苦挣扎. 数学至少有一个好处, 那就是花费不多.

面对一些人当中激起的日益严重的憎恶和惊慌情绪 —— 这种情绪在 Paolo Ucello^(*) 的《褻渎圣饼》中如此淋漓尽致地表现出来 —— 必须挑明我们同众多人士之间存在的意见分歧. 他们要求一般科学家, 尤其是数学家, 要培养大量为人类生存急需的技术人员. 而我们认为在我们生活于其中的、科学上和技术上超发展的“伟大” 国家里, 数学家乃至许多其他人的首要任务是培养他们并不需要的人 —— 即能够独立思考, 摆脱错误推理和模棱两可话语的人, 这些人认为真理的传播, 举例说, 比彩色的和立体的卫星电视更重要, 他们是自由的人而非技术统治下的机器人. 遗憾的是, 培养我们所缺少的这样的人的最好方式是不给他们讲授数学科学和物理学, 因为知识的这些分支是不管大量人类问题的, 高度文明化的社会的首要任务是调和这些人类问题, 但这是应当受到质疑的. 即使如此, 你至少可以尝试在数学教学中, 激发人们对于自由和批评的欲望, 并且使他们习惯于把自己看作具有理解能力的人.

为了适合作为本书对象的初学者, 我们努力以专业数学家的语言与他们交谈, 明确地并且一劳永逸地定义所有数学术语, 清晰地陈述所有定理, 并且除了为使本书保持合理的篇幅的少数例外, 完整地证明这些定理^(**).

还有, 我们在建立形式尽可能一般化的定理时努力遵循以下显然的原则, 即对于初学者, 坚持一般化不能导致简单结果的证明变得本质上复杂了, 也不能使一般

(*) Paolo Ucello (保罗·乌切洛, 1397 — 1475), 原名保罗·迪·多诺 (Paolo di Dono), 意大利画家, 以其艺术透视之开创性闻名. 由于他所绘飞禽精致而有“飞鸟”之称, “乌切洛”即意大利语飞鸟之意, 其著名作品包括描述“圣罗马诺之战”的三件套油画. ——译者注

(**) 大部分没有证明的命题在 §0 到 §5. 对于初学者, 叙述集合论和形式逻辑, 而不承认许多“显然”的结果, 这不成问题. 关于逻辑推理的 §0 的目的不仅是要向初学者指出“许可的”推理和“不许可的”推理 (这对于试卷的阅读是必不可少的), 而且告诉他们“数学哲学”并不必然归结为没有结构的文字游戏.

化的结果实际上是没有用的. 在线性代数中就是这样——人们通常把问题归结为有限维实向量空间——我们总是至少采用任意交换域上的向量空间的观点, 或者甚至非交换域上的, 那里取消了交换性假设; 仅用到加法和乘法的最简单的概念, 甚至对于任意环上的模表述的. 模在分析之外的数学的所有其他分支里, 都扮演至少与向量空间一样重要的角色, 因为模的概念当中包含了交换群的概念. 虽然限制到实向量空间带来的简化远比这种限制必然导致的一般性的缺失有价值, 但是恰恰是**无需附加的努力就能够学习到越来越普遍的结果的这种可能性**, 使得年轻人快速地达到百年来数学研究的前沿, 而这段时间内人们的研究发现硕果累累.

没有习题的书对于初学者来说是要影响其使用的. 在本书中有几百个习题, 分成三类. 一些是课文中陈述的理论的实际的甚至是数值的举例, 初学者不解决相当数量的这类习题就不可能获得计算技术. 另外一些习题是课文的基本理论的补充, 演练这些习题, 读者将会习惯于运用课文中所使用的语言和推理模式; 这类习题中不是非常容易的, 就在前面标注 ¶. 最后一类是对于课文的重要的补充而且其解答是困难的, 这些习题专门针对那些真正对数学有兴趣的超前的学生; 这些习题前面冠以两个甚至三个 ¶.

我们认为, 解一个习题不能只靠匆匆打的一个“草稿”就自以为差不多明白了, 如果这样做对于解数值计算的习题是允许的, 那么对于偏重理论的习题, 必须**完整地**撰写出解答, 并且应当构造它们的真正的证明. 通过这种方式, 也只有通过这种方式, 学生们才能获得清晰而正确的语言, 按照专业术语的本意使用它们, 在数学里, 这是理解一个主题的最明确的标志.

最后, 与面向初学者的著作的传统相反, 我们向读者提供经过精心选择的书目组成的参考文献, 其中的大部分出自一流数学家. 读者得到并且使用一部分这样的书, 就能了解其他可能的观点和养成查阅参考书的习惯, 我们认为对于初学者这是大有裨益的.

1962年7月

法兰西数学精品译丛

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
★28417-1	广义函数论	L. 施瓦兹
★25801-1	微分几何	M. 贝尔热、B. 戈斯丢
★26362-6	拓扑学教程	G. 肖盖
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
★29467-5	解析与概率数论导引	G. 特伦鲍姆
★33238-4	概率与位势 (第 I 卷)	C. 德拉歇利、P.-A. 梅耶
★31960-6	无穷小计算	J. 迪厄多内
★33238-4	广义系统的精确控制、摄动和稳定性 (第一卷) 精确控制论	J.-L. 利翁斯
★28757-8	代数学教程	R. 戈德门特
	概率与位势 (第 II 卷)	C. 德拉歇利、P.-A. 梅耶
	金融数学导引	El Karoui, E. Gobet
	完全集与三角级数	Jean-Pierre Kahane
	分析与代数原理 (及数论)	Pierre Colmez

说明：加★者已出版。

网上购书：academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, www.joyo.com, www.dangdang.com

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇
款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街 4 号

电 话：010-58581118/7/6/5/4

传 真：010-58581113

通过邮局汇款：

地 址：北京西城区德外大街 4 号

户 名：高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账：

户 名：高等教育出版社有限公司

开 户 行：交通银行北京马甸支行

银行账号：110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目录

第一章 集合论	1
§0 逻辑推理	2
1. 逻辑完美的构思 (2) 2. 数学的真实语言 (3) 3. 初等逻辑运算 (5)	
4. 公理和定理 (6) 5. 逻辑公理和重言式 (7) 6. 关系中的代换 (10)	
7. 量词 (12) 8. 量词使用规则 (13) 9. Hilbert 运算, 组成准则 (16)	
§0 习题 (18)	
§1 相等和属于关系	21
1. 相等关系 (21) 2. 属于关系 (22) 3. 一个集合的子集 (23) 4. 空集 (25)	
5. 一个和两个元素的集合 (26) 6. 一个给定集合的子集的集合 (27)	
§1 习题 (28)	
§2 函数概念	28
1. 序偶 (28) 2. 两个集合的笛卡儿乘积 (30) 3. 图像和函数 (31)	
4. 像和逆像 (34) 5. 函数的限制和延拓 (35) 6. 复合映射 (36)	
7. 单射 (39) 8. 满射和双射 (40) 9. 多变量函数 (43) §2 习题 (45)	
§3 并集和交集	47
1. 两个集合的并集和交集 (47) 2. 一族集合的并集 (48) 3. 一族集合的交集 (49)	
§3 习题 (51)	
§4 等价关系	53
1. 等价关系 (53) 2. 集合关于一个等价关系的商集 (55)	
3. 定义在商集上的函数 (58) §4 习题 (61)	

§5 有限集和自然数	62
1. 等势集 (63) 2. 集合的基数 (64) 3. 基数的运算 (66) 4. 有限集和自然数 (69)	
5. 自然数集合 \mathbf{N} (71) 6. 数学归纳法推理 (73) 7. 组合分析 (74)	
8. 有理整数 (77) 9. 有理数 (81) §5 习题 (82)	
第二章 群, 环, 域	85
§6 运算	85
1. 运算, 结合性和交换性 (85) 2. 可对称元 (88)	
§7 群的概念	91
1. 群的定义, 例子 (91) 2. 群的直积 (94) 3. 群的子群 (95)	
4. 子群的交, 生成元 (99) 5. 置换和对换 (101) 6. 陪集 (102)	
7. n 个对象的置换数 (105) 8. 群的同态 (106) 9. 同态的核与像 (108)	
10. 应用到循环群 (111) 11. 作用在一个集合上的群 (112) §7 习题 (113)	
§8 环和域	119
1. 环的定义, 例子 (119) 2. 整环和域 (122) 3. 模 p 整数环 (124)	
4. 二项式公式 (126) 5. 和的乘积展开 (128) 6. 环的同态 (129) §8 习题 (131)	
§9 复数	139
1. 平方根 (139) 2. 预备知识 (139) 3. 环 $K[\sqrt{a}]$ (140)	
4. 二次扩张的可逆元 (143) 5. 交换域的情形 (145) 6. 复数的几何表示 (146)	
7. 三角函数的乘法公式 (149) §9 习题 (151)	
第三章 环上的模	156
§10 模和向量空间	156
1. 环上的模的定义 (156) 2. 模的例子 (158) 3. 子模, 向量空间 (160)	
4. 右模和左模 (161)	
§11 模内的线性关系	162
1. 线性组合 (162) 2. 有限生成模 (164) 3. 线性关系 (165) 4. 自由模, 基 (167)	
5. 无穷线性组合 (169) §§10, 11 习题 (170)	
§12 线性映射, 矩阵	175
1. 同态的定义 (175) 2. 从有限生成自由模到任意模内的同态 (177)	
3. 同态和矩阵 (179) 4. 同态和矩阵的例子 (182)	
§13 同态和矩阵的加法	186
1. 加法群 $\text{Hom}(L, M)$ (186) 2. 矩阵的加法 (187)	
§14 矩阵的乘积	188
1. 模的自同态环 (188) 2. 两个矩阵的乘积 (189) 3. 矩阵环 (192)	
4. 同态的矩阵表示 (194) §§12, 13, 14 习题 (195)	

§15 逆矩阵和基的变换	199
1. 模的同构群 (199) 2. 群 $GL(n, K)$ (199)	
3. 例子: 群 $GL(1, K)$ 和 $GL(2, K)$ (200) 4. 基的变换: 过渡矩阵 (202)	
5. 基的变换对于一个同态的矩阵的影响 (204) §15 习题 (207)	
§16 线性映射的转置	215
1. 模的对偶 (215) 2. 有限生成自由模的对偶 (216) 3. 模的二次对偶 (218)	
4. 同态的转置 (220) 5. 矩阵的转置 (221) §16 习题 (224)	
§17 子模的和	225
1. 两个子模的和 (225) 2. 模的直积 (227) 3. 子模的直和 (228)	
4. 直和与投影 (229) §17 习题 (231)	
第四章 有限维向量空间	235
§18 有限性定理	236
1. 其核与像均为有限生成的同态 (236) 2. Noether 环上的有限生成模 (237)	
3. 主理想整环上的自由模的子模 (238) 4. 应用到线性方程组 (239)	
5. Noether 环的其他特征 (240) §18 习题 (242)	
§19 维数概念	244
1. 基的存在性 (244) 2. 由线性方程组定义向量子空间 (246)	
3. 线性方程组相容性条件 (247) 4. 线性关系的存在性 (249)	
5. 维数概念 (251) 6. 基和维数的特征 (253) 7. 同态的核与像的维数 (254)	
8. 同态、向量族和矩阵的秩 (255) 9. 矩阵的秩的计算 (257)	
10. 从其方程计算向量子空间的维数 (259) §19 习题 (260)	
§20 线性方程组	265
1. 记号和术语 (265) 2. 线性方程组的秩, 解的存在性条件 (266)	
3. 相伴齐次方程组 (267) 4. Cramer 方程组 (267)	
5. 线性无关的方程组: 化简为 Cramer 方程组 (269) §20 习题 (271)	
第五章 行列式	275
§21 多重线性函数	275
1. 多重线性映射的定义 (275) 2. 多重线性映射的张量积 (279)	
3. 几个代数等式 (281) 4. 有限生成自由模的情形 (284)	
5. 基的变换对于张量分量的影响 (291) §21 习题 (293)	
§22 交错双线性和三重线性映射	298
1. 交错双线性映射 (298) 2. 有限生成自由模的情形 (299)	
3. 交错三重线性映射 (302) 4. 关于一个基的展开 (303) §22 习题 (306)	
§23 交错多重线性映射	308
1. 置换的表示 (308) 2. 多变量函数的反对称化 (313) 3. 交错多重线性映射 (314)	

4. 在同构于 K^p 的模上的交错 p -重线性函数 (316)	
5. 向量组、矩阵和自同态的行列式 (319)	
6. 有限维向量空间基的特征 (322)	
7. 交错多重线性映射: 一般情形 (325)	
8. 线性无关性的判别法 (327)	
9. 线性方程组的相容性条件 (329)	
§23 习题 (332)	
§24 行列式	335
1. 行列式的基本性质 (335)	
2. 行列式按一行或一列的展开 (337)	
3. 伴随矩阵 (341)	
4. Cramer 公式 (343)	
§24 习题 (344)	
§25 仿射空间	351
1. 平移向量空间 (351)	
2. 与一个向量空间相伴的仿射空间 (352)	
3. 仿射空间内的重心 (354)	
4. 仿射空间内的线性流形 (357)	
5. 由直线生成线性流形 (361)	
6. 有限维仿射空间, 仿射基 (362)	
7. 线性流形维数的计算 (363)	
8. 仿射坐标下线性流形的方程 (365)	
第六章 多项式和代数方程	367
§26 代数关系	368
1. 环的元素上的单项式和多项式 (368)	
2. 代数关系 (369)	
3. 交换域的情形 (371)	
§26 习题 (374)	
§27 多项式环	377
1. 一个未定元情形的预备知识 (377)	
2. 一个未定元的多项式 (378)	
3. 多项式记号 (380)	
4. 多个未定元的多项式 (382)	
5. 偏次数和总次数 (383)	
6. 系数在一个整环内的多项式 (384)	
§28 多项式函数	386
1. 多项式的值 (386)	
2. 多项式函数的和与乘积 (387)	
3. 无限域的情形 (389)	
§§27, 28 习题 (391)	
§29 有理分式	398
1. 整环的分式域: 预备知识 (398)	
2. 分式域的构造 (399)	
3. 域的公理的验证 (402)	
4. 环 K 嵌入到它的分式域 (403)	
5. 系数在一个域内的有理分式 (405)	
6. 有理分式的值 (406)	
§29 习题 (410)	
§30 导子和 Taylor 公式	414
1. 环的导子 (415)	
2. 多项式环的导子 (416)	
3. 偏导子 (417)	
4. 复合函数的导子 (419)	
5. Taylor 公式 (420)	
6. 交换域的特征 (422)	
7. 方程根的重数 (423)	
§30 习题 (426)	
§31 主理想整环	429
1. 最大公因子 (429)	
2. 互素元素 (431)	
3. 最小公倍 (431)	
4. 素因子的存在性 (433)	
5. 素元的性质 (434)	
6. 素因子分解的唯一性 (435)	
7. 借助素因子分解求最大公因子和最小公倍 (437)	
8. 主理想整环上的分式的部分分式分解 (439)	
§31 习题 (440)	

§32 多项式除法	445
1. 一个未定元的多项式除法 (445)	
2. 一个未定元的多项式环中的理想 (448)	
3. 几个多项式的最大公因式和最小公倍式 (449)	
4. 应用到有理分式 (451)	
§32 习题 (453)	
§33 代数方程的根	461
1. 根的最大数目 (461)	
2. 代数闭域 (464)	
3. 系数在代数闭域内的方程根的数目 (466)	
4. 系数在代数闭域内的不可约多项式 (468)	
5. 实系数不可约多项式 (469)	
6. 方程的根与系数的关系 (471)	
§33 习题 (472)	
第七章 矩阵的化简	484
§34 特征值	484
1. 特征向量和特征值的定义 (484)	
2. 矩阵的特征多项式 (485)	
3. 特征多项式的形式 (487)	
4. 特征值的存在性 (488)	
5. 化成三角矩阵 (489)	
6. 特征值都是单特征值的情形 (492)	
7. 可对角化的自同态的特征 (495)	
§34 习题 (497)	
§35 矩阵的典范形式	511
1. Hamilton-Cayley 定理 (511)	
2. 幂零自同态分解 (513)	
3. 幂零自同态的结构 (515)	
4. Jordan 定理 (517)	
§35 习题 (520)	
§36 Hermit 型	527
1. 半双线性型, Hermit 型 (527)	
2. 非退化型 (530)	
3. 同态的伴随同态 (532)	
4. 关于非退化 Hermit 型的正交性 (535)	
5. 正交基 (540)	
6. 规范正交基 (543)	
7. Hermit 型的自同构 (544)	
8. 正定 Hermit 型的自同构: 化成对角形 (546)	
9. 迷向向量和不定型 (551)	
10. Cauchy-Schwarz 不等式 (552)	
§36 习题 (554)	
参考文献	567
记号索引	572
术语索引	575

第一章 集合论

§0 至 §5 的目的是引进集合与函数的概念, 没有这些概念, 我们在数学上什么也不能做. 反之, 使用这些概念, 我们能够做一切. 这些概念, 至少在本书所呈现的一般形式下, 在 19 世纪末之前还没有被剥离出来. 过去, 人们不明晰地谈论集合, 函数概念则涵盖了不同的对象; 代数函数, 解析函数, 可导函数, 连续函数, 等等, 单变量函数, 两个变量函数, 单复变量函数, 等等. 体现了数学的历史发展过程中所加的种种限制. 当今所有这些概念都是唯一的更加一般的集合概念的特殊情形, 这个概念观念上比它所包含的所有特殊情形更简单. 同时集合论的语言 (人们有时会修改其术语, 但不会修改基本概念) 正在广泛推广, 而是否应用集合论则变成了判断一个论述是否清晰和严格的条件.

下面几节对于阅读本书后续部分几乎是不可或缺的. §1 和 §2, §3 的第 1 小节立即就有重要的应用; 读者可以在需要 §4 时才认真研究它. 对于已经熟悉自然数的主要性质的读者来说, §5 则有点儿不太实用, 而本节的第 7 小节将经常被用到.

至于 §0, 这是数理逻辑的一个引论; 我们试图提供数学家构思他们所关心的对象的方式的大致想法, 并且在此汇集了一些特别重要的推理模式. 这一节, 跟 §1、§2、§3 一样, 开始不必仔细阅读, 因为这里的概念经常被用到, 读者不但必然会逐渐熟悉它们, 而且在多数情况下还会很快地熟悉它们.

最后我们建议初学者不要惧怕这里的艰涩的外表, 尽管前几节无疑是极其抽象的. 给初学者的最好的劝告是完全忘记他可能已经了解的数学 (特别是整个初等几何, 除了“几何变换”的一般概念, 它和这里所处理的课题无任何关系). 还建议大家准确无误地援引专业术语的定义.