数学建模方法进阶

王宏洲　李学文　董　岩　李炳照　编

清华大学出版社

数学建模方法进阶

王宏洲　李学文　董　岩　李炳照　编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是基于作者多年从事本科生、研究生数学建模以及相关课程教学的经验，综合参考了国内外数学建模教材、竞赛优秀论文、有关问题的学术文献等编写而成。全书从数学建模方法论开始，以丰富的实际案例为点，以各类数学方法为线，并包含了一些比较深刻的数学方法和思维方式。本书可以作为高等学校各专业大学生、研究生学习数学建模课程、参加数学建模竞赛的教材，也可以作为研究人员研究相关课题的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法进阶 / 王宏洲等编. --北京：清华大学出版社，2013
ISBN 978-7-302-32567-3

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①数学模型－高等学校－教材　Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 109897 号

责任编辑：陈　明　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：17.25　　**字　　数**：372 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：33.60 元

产品编号：048814-01

FOREWORD

前言

高等院校培养人才，除了要求学生掌握知识、技能之外，近年来也越来越重视科研、创新能力的培养，而高水平的研究成果都需要有严谨、深刻的数学理论作为支持。对于有志进入科研领域的年轻学生来说，骤然从经典知识的学习转向灵活运用专业知识、数学理论做出创新成果，难度可想而知。面向高校大学生、研究生开设数学建模课程，则可以在很大程度上帮助他们克服这些难题。

从 2002 年起，北京理工大学面向全校本科生、工科研究生开设了数学建模课程。我们一开始考虑以比较复杂的数学理论、数学模型作为主要内容，但实际效果并不好。由于选修本课程的学生专业分散，因此试图以复杂案例来贴近专业方向不同的学生并不可行；另一方面，专注于讲解过于复杂的数学方法也不符合数学建模类课程的目的。经过几年的探索，我们认为，首先应该详细介绍如何从查阅文献入手，找到学生感兴趣的领域、问题的最前线；在此基础上，再通过一些实例来说明如何在阅读学术文献的基础上利用数学建模方法发展出自己的钻研思路和成果。同样重要的是，通过一些简单数学模型案例，介绍数学建模的基本思路和方法，以及数学的各个分支在现实中的背景和应用。在课程后期，对数学模型案例中的方法进行延伸，介绍相关更深层次数学理论的发展和应用。

通过这样的内容组织，可以帮助本科生、研究生了解科研工作的一般规律，掌握数学建模的基本方法和一些比较深入的数学方法。为此我们选择了一些基于较新的数学理论的数学模型案例，编成一本教材，希望能对有志于科研工作的年轻学生提供一些帮助。

本书在统一筹划的基础上，分工编写。其中第 1～7 章，以及第 12 章的主要内容由王宏洲编写，李炳照编写了第 6 章中的 6.4 节和第 7 章中的 7.4 节；第 8～11 章，以及第 16 章由李学文编写；第 13～15 章由董岩编写。王宏洲负责最后的内容整合。

本书的出版得到了北京理工大学研究生院、教务处的大力支持和资助，编者还特别感谢清华大学出版社陈明、赵从棉对本书从策划到编辑加工的热心支持和辛勤劳动。

限于作者水平，书中难免有错误和不妥之处，所引用的结果和文献也会有所遗漏，希望能得到广大读者的批评指正。

编　者

2013.5

CONTENTS

目录

第 1 章

从实际问题到数学模型

数学模型，一般可以定义为为了一个特定目的，根据事物表现出来的规律，经过必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。数学建模就是建立数学模型的整个过程。

1.1 建立数学模型的步骤

Mark Meerschaert 在其编著的《Mathematical modeling》[1] 一书中，将数学建模分为五个步骤，分别是：

(1) 提出问题　列出与问题相关的变量，给出关于这些变量的假设以及关系式，然后用明确的数学语言写出这个问题的目标的表达式。比如在预测中国人口数量时(图 1.1)，如果只考虑人口总数对人口变化的影响，不考虑外部环境、资源以及人口的性别结构、年龄结构等复杂因素，则与这个问题有关的变量有：

- 人口数量(x)
- 时间(t)
- 人口出生率(r)
- 人口死亡率(d)

变量之间的关系式：

- 人口基数越多，则单位时间内新增人口就越多，即

$$\Delta x = rx\Delta t$$

- 人口基数越多，则单位时间内死亡人口就越多，即

$$\Delta x = -dx\Delta t$$

目标：

- 给出人口数量(x)的计算公式

上面所述就是第一步需要完成的工作。

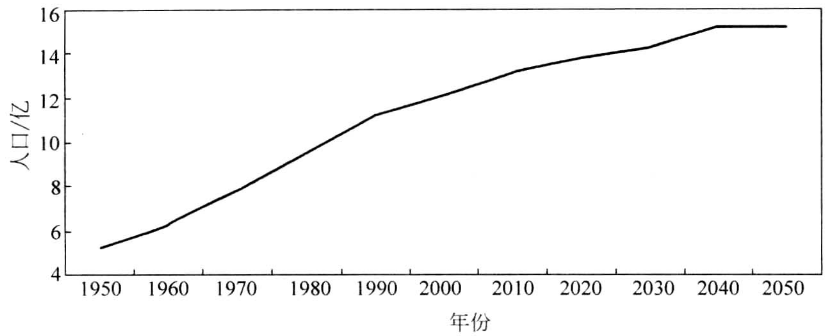

图 1.1

(2) 选择建模方法　即采用何种数学方法来建立关于实际问题的数学框架。比如预测人口、天气、产品销量时，微分方程、差分方程以及一些概率统计方法等都是可选的建模方法。具体采用何种方法不能主观臆断，应该在了解相关的研究文献的基础上做出选择。

(3) 推导模型的数学表达式　根据第一步确定的相关变量、变量之间的关系和建模的目标，利用第二步确定的建模方法，给出合理的数学表达式。

比如预测人口时，根据第一步确定的相关变量和变量之间的关系式，我们可以得到一段时间内人口变化的等式：

$$\Delta x = (rx - dx)\Delta t \tag{1.1}$$

如果在第二步选择了差分方程方法建模，以年为时间单位，则可以得到第 k 年与第 $k+1$ 年人口数量的变化公式：

$$x(k+1) - x(k) = (r-d)x(k) \tag{1.2}$$

如果在第二步选择了微分方程方法建模，将式(1.1)两边除以 Δt 并令 $\Delta t \to 0$，可以得到如下一阶线性常系数常微分方程：

$$x'(t) = (r-d)x(t) \tag{1.3}$$

(4) 求解模型　即利用数学推导或者数值算法，给出数学模型的解。在上面的人口模型例子中，求解模型(1.2)非常简单，设 $x(0)$ 为人口的初始值，则

$$x(k+1) = (1+r-d)x(k) \quad 或 \quad x(k) = (1+r-d)^k x(0), \quad k \geqslant 1 \tag{1.4}$$

求解模型(1.3)可以用分离变量法，直接计算出

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{(r-d)t} \tag{1.5}$$

其中 x_0 为人口的初始值。也可以将模型(1.3)离散化，比如选择步长为 h，求其数值解：

$$x(t+h) - x(t) = (r-d)x(t)h \tag{1.6}$$

(5) 回答问题　这里所说的“回答问题”，是解释数学模型求得的结果在现实背景下的意义。因为我们在模型中使用的数学方法无论简单还是复杂，只对现实问题感兴趣的人们并不关心，他们只想知道最终的答案是什么，所以我们有必要将数学语言“翻译”成

现实语言。

比如对于模型求解的结果(1.4),如果给定出生率(r)、死亡率(d)、人口的初始值 $x(0)$,则第 k 年的人口预计将达到 $(1+r-d)^k x(0)$;对于式(1.5),给定出生率(r)、死亡率(d)和人口初始值 x_0,任意时刻 $t>0$ 的人口数量预计为 $x_0 e^{(r-d)t}$;对于式(1.6),也可以类似给出解释。

在上述“五步”之外,数学建模还有一个极为重要的环节,即了解背景资料、研读相关的研究文献。对于科研工作者来说,这一环节尤为重要,因为这是创新科研工作的基本步骤。了解背景、研读文献应该在“五步法”的第一步之前全部完成,从而为随后的工作指引正确的方向、奠定良好的基础。

概括起来,数学建模的完整过程可以参考图 1.2:

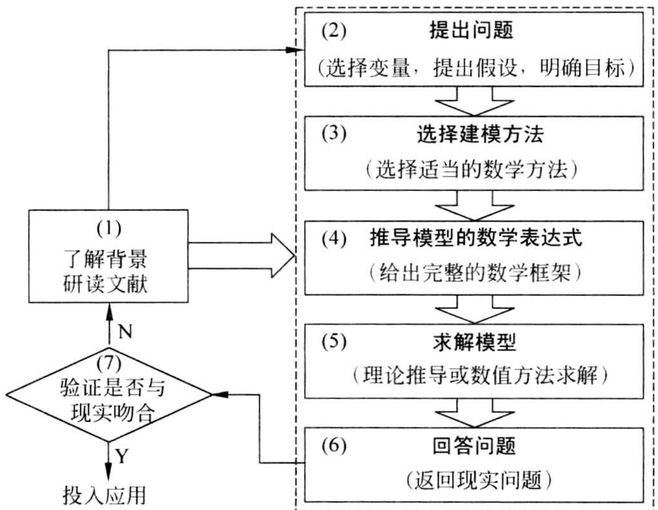

图 1.2

1.2 数学建模方法的分类

数学建模方法大体上可以分为两类,一类是所谓的机理分析方法,另一类是测试分析方法。机理分析方法是指借助对研究对象的认识,分析其内在规律,从而建立起数学模型的方法;而测试分析是在研究对象的内在规律难以获得情况下,通过输入、输出数据的对比和分析,建立数学模型的方法。在数学建模实践中,两者结合才是最常用的建模方法,即通过机理分析建立数学框架,通过测试分析确定模型中包含的参数或关系。

根据是否考虑现实问题中存在的随机因素或模糊因素,数学建模方法也可以分为确定

性方法和不确定性方法。比如在前面提到的人口预测问题中，我们没有考虑疾病、自然灾害等不确定性因素对人口的影响，所以均属于确定性模型。应该说在各个研究领域，经典的数学模型很少考虑不确定因素，一些探索性的结果只能在比较新的研究文献中看到，这是因为不确定因素理解和处理起来都有相当的难度。不过这也为科研工作者提供了广阔的空间。

数学建模方法还有一些其他的分类，这里不再一一赘述。

1.3 数学建模与科研探索

高水平的科研成果必须有坚实的数学理论框架，这已经成为当前科研领域的共识，不过具体地如何看待带有数学框架的科技文献，以及如何在此基础上做出自己的研究成果，却是一个复杂的问题。

首先，要注意选择适当的参考文献。一方面，要尽量选择学术声誉较高的期刊上发表的文献。好的文献不但会详细阐述相关研究发展脉络，论证过程比较规范，所采用的研究方法和获得的结果也具有较高的参考价值，是进入相关领域的良好基础。另一方面，已经进入到某个细分的科技领域，并不意味着研究者的兴趣必须被限制在某个范围内，我们完全可以选择一些自己感兴趣的方向、文献进行研究。比如说，计算机专业的研究生如果对项目管理、企业管理、市场营销感兴趣，完全可以查阅两个领域的交叉文献作为自己的研究基础。

高质量的科技文献中，一个结构严谨、论证严密的数学模型通常是必不可少的。前面已经介绍过，数学建模的基本过程可以分为五个步骤，这些步骤在每一个含有数学模型的科技文献中都是必不可少的，而且其中每一步骤都可以作为研究和创新的对象。

对于第一步提出问题，我们需要找出文献中选择相关变量时的依据，根据自己掌握的资料或研究课题考虑是否需要对变量做适当的增减，变量之间的关系是否需要重新定义。

对于第二步选择建模方法，我们应该在阅读充足的相关文献后，掌握其中常用的建模方法，然后考虑两个发展方向：一是能否更换一种新的建模方法；二是了解文献中常用的建模方法是否有最新的研究进展，能否应用在我们的研究课题中。

对于第三步推导模型的数学表达式，如果我们采用了新的建模方法，自然需要重新推导模型的表达式；即使在第二步对建模方法没有太好的改进思路，也可以在第三步尝试采用新的数学方法，推导出更合理的表达式来。

对于第四步求解模型，新的理论推导方法或者效率更高、精度更好的数值算法都是很好的研究目标。

对于第五步回答问题，同样的数学结果，在面临不同的现实问题或者现实问题的环境有所变化时，都应该给出相应的解释，并对现实问题提出一系列的结论或指导性意见。这里有非常广阔的空间可供发挥。

当然，科研创新的范畴非常广泛，远远不是对已有文献的改进所能完全涵盖的，不过阅读文献、了解问题的研究进展和思路、从中发现或创造出新的思路，却是科研创新的基本方法。对于初涉科研工作的青年人来说，这也是一个很好的入门方式。

参考文献

[1]　Meerschaert M. Mathematical modeling [M]. 3rd Ed. San Diego：Academic Press，2007.

第2章 差分方程方法建模

如果我们希望了解事物特征随着时间或空间变化呈现出的演变情况，那么微分（差分）方程方法就是一种比较理想的建模方法。借助理论体系相对完整的微分（差分）方程理论，不但可以系统地分析研究对象特征的变化规律、预测其未来性态，还可以从中发现控制和影响研究对象特征变化的手段。

比较常见的应用微分（差分）方程研究的现实问题有：

（1）物体的运动、振动、受力形变等；

（2）生物（动植物、微生物）的数量变化或密度变化；

（3）物质、能量的扩散、传递；

（4）化学反应过程；

（5）消费品在市场上的销售过程；

（6）信息、病毒、疾病的扩散与传播等。

目前来说，常微分方程和差分方程的定性分析方法比较完备，数值求解和分析方法也很容易掌握，便于取得深入的研究成果。偏微分方程则相对复杂很多，除了少数经典问题之外，一般的偏微分方程无论进行定性分析还是数值求解，都需要掌握比较深厚的理论基础。

另外，建立常微分方程和偏微分方程模型时，一个基本假设是事物的特征关于时间或空间连续可微，如果模型为高阶微分方程，则还要求事物的特征关于自变量高阶可微，这对于很多现实问题而言是比较苛刻的。如果有必要，可以适时的转化为差分方程，或者改用其他的动态模型方法。

遵循从易到难的原则，本章主要介绍差分方程方法建模。

差分方程可以定义为包含变量当前值和此前若干阶段取值的等式，它主要用于表现离散变量的变化规律。差分方程方法建模的优点是模型的物理意义非常明确、易于解释，给定初始值之后就可以计算得到完整的解，而且既可以通过数值解、图形比较直观地分析方程中含有的参数变化对解的影响，也可以利用定性分析方法作理论研究。下面先介绍一些差分

方程常用的符号和基本概念。

1. 差分与差分方程

对于一个数列$\{x_n\}$，$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ 称为 x_n 在 n 处的一阶差分，$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$称为二阶差分。有的文献中可能会有不同的定义，通常会做出明确说明。

由 x_n 及其差分所构成的方程 $\Delta^k x_n = f(n, x_n, \Delta x_n, \cdots, \Delta^{k-1} x_n)$称为 k 阶差分方程。

2. 常系数齐次线性差分方程的解

对于形如

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0 \tag{2.1}$$

的 k 阶常系数线性差分方程，首先求解 k 次方程 $a_k y^k + a_{k-1} y^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$。若方程有 k 个不同的实根 $y_1, y_2, \cdots, y_k$，则式(2.1)的通解为

$$x_n = c_1 y_1^n + c_2 y_2^n + \cdots + c_k y_k^n$$

若方程有一个 m 重根 y，则式(2.1)通解中的对应项为

$$y^n, ny^n, \cdots, n^{m-1} y^n \tag{2.2}$$

若方程有一对单重复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$，则式(2.1)通解中的对应项为

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(n \arctan \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \arctan \frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{2.3}$$

若方程存在 m 重复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$，则式(2.1)通解中的对应项结合式(2.2)和式(2.3)可得。

3. 常系数线性差分方程的解

对于形如

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = b(n) \tag{2.4}$$

的常系数线性差分方程，设其对应齐次方程 $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0$ 的通解为 $\bar{x}_n$，另有式(2.4)的一个特解 x_n^*，则式(2.4)的通解为 $x_n = \bar{x}_n + x_n^*$。

至于更复杂的情形，比如方程(2.4)中的系数可以随 n 变化，$b(n)$的形式比较复杂，或者常系数线性差分方程组、非线性差分方程等，其中部分简单问题的解析解计算方法可以在一些微分方程教材中看到[1]。另外需要注意的是，对于非线性差分方程(组)，如果希望作一些定性分析，可以借助其线性近似方程，或者直接转化为微分方程形式作近似讨论。

2.1　种群的指数增长模型

自然界中很多生物种群的增长都具有特定的阶段性，如每年结一次种子的橡树，每年在特定季节洄游产卵的太平洋鲑鱼，只在雨季食物充沛时繁殖的非洲角马，实验室里繁殖的果蝇等。如果生存环境没有大的变化，则在每个繁殖周期里这些生物种群新生的数量都与种

群总量成正比，当然，种群总量中也会有一定比例死亡。

以实验室培养果蝇为例，假设实验室的环境始终保持稳定，不考虑自然灾害、疾病、资源突然短缺等因素的影响，建立模型来预测种群总量变化。另外假设：

（1）第 n 个繁殖周期，果蝇的总量为 $x(n)$；

（2）每个繁殖周期，果蝇以一定的比例 r 产生下一代；

（3）每个繁殖周期，果蝇有一定的比例 d 死亡；

（4）不考虑果蝇的年龄结构、性别结构等。

这里考虑使用差分方程方法来建立模型，则相邻两个繁殖周期果蝇数量变化

$$x(n+1)-x(n)=rx(n)-dx(n) \quad \text{或} \quad x(n+1)=(1+r-d)x(n) \tag{2.5}$$

差分方程(2.5)的通解为 $x(n)=x(0)(1+r-d)^n$，这也是此模型被称为指数增长模型的缘由。如果给定初值 $x(0)$，我们就可以预测此后任何时间段的果蝇数量。

指数增长模型是一种非常简单易行的预测办法，不过它的缺陷也是显而易见的。照此预测，假设果蝇的繁殖率 r 为 0.5，死亡率 d 为 0.1，果蝇的初始数量 $x(0)$ 为 100 个，则到第 7 个繁殖周期果蝇总数已经上升到初始值的 10 倍多，到第 10 个繁殖周期总数会上升到初始值的近 30 倍，如图 2.1 所示。

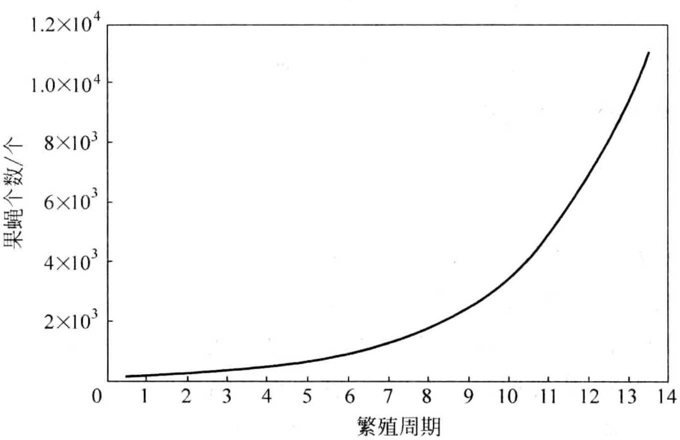

图 2.1

这种情况无论在自然环境还是实验室环境下都很难实现，因为生存资源不可能无限，种群个体数量增多之后，对空间、食物、配偶的争夺都会加剧，导致增速放缓。不过用来作短期预测，或者对精度要求不高时，差分方程形式的指数增长模型还是非常有效的。比如根据当年人口估测明年人口，由当年市场规模增长预测明年情况等。

2.2　阻滞增长模型

我们要研究的问题是，由于没有考虑种群个体数量增多之后增速逐渐放缓的事实，需要对指数增长模型进行改进。这里依然假设果蝇的生存环境始终保持稳定，并假设：

(1) 果蝇的繁殖率 r 会随着总数 $x(n)$ 增加而减少；

(2) 果蝇的死亡率 d 会随着总数 $x(n)$ 增加而增加；

(3) 受生存资源限制，果蝇总数不会无限制增长，上限为 N；

(4) 同样不考虑果蝇的年龄结构、性别结构等。

为简化问题起见，我们将 r 设为最简单的减函数 $r(x)=a-bx$，将 d 设为最简单的增函数 $d(x)=p+qx$，其中 a、b、p、q 均为非负常数。于是模型(2.5)变成如下形式：

$$x(n+1)=(A-Bx(n))x(n) \tag{2.6}$$

其中 $A=1+a-p$，$B=b+q$。

由于生存资源有限，如果 $x(n)>N$，则应有 $x(n+1)<x(n)$；如果恰好有 $x(n)=N$，则应该有 $x(n+1)=x(n)$。据此可知，$A=1-BN$，于是式(2.6)可以写成

$$x(n+1)=(1-BN-Bx(n))x(n)$$

一般来说，非线性差分方程求通解比较困难，我们可以尝试用级数求和、数学归纳法来给出通解。以式(2.6)为例，可以通过观察

$$x(1)=(A-Bx(0))x(0)=Ax(0)-Bx^2(0)$$

$$x(2)=Ax(1)-Bx^2(1)=A^2x(0)-(AB+A^2B)x^2(0)+2AB^2x^3(0)-B^3x^4(0)$$

$$\vdots$$

尝试给出 $x(n)$ 的通项公式。

由于考虑了种群个体数量上升对种群后续增长的阻滞作用，所以式(2.6)通常称为阻滞增长模型。模型(2.6)也是微分方程形式的 Logistic 模型的离散形式，后面将会提到。至于模型(2.6)的图像，随着 A、B 取值的不同会有差异。

2.3　含成熟周期的种群规模变化

一般生物从诞生到成年、可以产生下一代，都需要一定的时间，也就是说，在指数增长模型(2.5)中，用 $rx(n)$ 来表示新增个体数量不太合理，因为 $x(n)$ 中包含有未成年个体，对种群繁殖没有作用。这里要解决的问题就是：在考虑生物种群成长周期的条件下，给出种群总数的变化规律。

假设果蝇的生存环境始终保持稳定，而且

(1) 第 n 个繁殖周期，果蝇的总量为 $x(n)$；

(2) 果蝇需要 k 个繁殖周期才能进入成年期；