十二五

高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学学习与应用

常瑞玲　主编

例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{P}(1,2)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

同理，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行乘以非零数 k 相当于

$$\boldsymbol{P}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行乘以 k 加到第 3 行上相当于

$$\boldsymbol{P}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{pmatrix}.$$

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学学习与应用

常瑞玲　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据我国对高职高专高等数学教学的要求、当前高职高专学生现状和一线教师在工作中遇到的问题而编写，体现三个特点：①根据教材内容划分几大部分，采取模块学习，引导学生由点到面，形成网络，从而解题时做到举一反三；②配备习题解答和提示，为学生提供“抓手”；③适应“专升本”和参加全国建模大赛需要。

全书分教材习题解答与提示、指导与开拓、教学建模与应用三部分。

本书适合高等高专各专业学生学习参考，尤其适合有志于“专升本”和参加全国建模大赛的学生学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与应用/常瑞玲主编．—北京：中国铁道出版社，2011.8

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13393-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①常… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 159115 号

书　　名：高等数学学习与应用
作　　者：常瑞玲　主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　　　读者热线：400-668-0820
编辑助理：何　佳　　　　封面设计：付　巍
责任印制：李　佳　　　　封面制作：白　雪

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054）
印　　刷：航远印刷有限公司
版　　次：2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　　印张：12　　字数：289 千
印　　数：1～2500 册
书　　号：ISBN 978-7-113-13393-1
定　　价：20.00 元

前　言

高等数学的改革近年来一直是此起彼伏。编写组的同志根据我国对高职高专的高等数学学习要求、学生现状和一线教师在工作中遇到的实际问题，组织编写了本书。其目的主要有以下三点：

第一，模块化学习

众所周知，高等数学的改革不仅要涉及教法，而且还要研究学法，而后者对学习的效果更有直接关系。但目前高职高专的学生，由于长期养成的不良学习习惯，对数学的学习在概念的掌握上支离破碎，也导致在解题方法上往往是“依葫芦画瓢”，更别说知识的迁移和应用。因此，编写组的教师，基于多年教学经验，根据教材内容之间的关联，打破章节，划分几大部分，采用模块学习，引导学生在知识的学习中由点到面，继而形成网络，从而在解题中也能举一反三，游刃有余，使学习成为一个系统工程，让学生真正在这个过程中领悟数学的本质，提高数学素养。

第二，提供“抓手”

很多学生在学习中反映，教材可以看懂，听课也能听懂，就是解题中仍有不少困难，所以本书配备了习题解答和提示，旨在给学生在学习中提供一个“抓手”。

第三，克服学时不足，着眼可持续发展

考虑到部分学生“专升本”和参加全国建模大赛及各专业对数学知识的不同需要，本书又编写了具有一定难度的学习开拓型题目和数学模型。这样既可以弥补教材因“减少学时”带来的不足，又可以对学生的可持续发展带来一定的益处。

本书由濮阳职业技术学院常瑞玲主编，参加本书编写的有常瑞玲、刘喜梅、马书燮、张敬坤、刘艳平、任艳梅、宋林锋、郭新、张月华、周学勤、马秀芬、何青、杨信超、王晓东、张先荣、黄美霞、石玉敏、李杨、翟瑛、李金嵘、赵培贤。

虽然在编写过程中，编写组的同志们付出了很大的努力，但在实际应用当中仍不可避免地会有问题出现，其错谬之处，欢迎广大教师提出宝贵意见，以便使本书更加完善。

编　者

2011 年 6 月

目 录

第一部分　教材习题解答与提示

第一章　预备知识

习题 1-1

2. 求函数的定义域

(6) $f(\lg x)$,其中 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$.

提示　因为 $0<u<1$,所以 $0<\lg x<1$.

解之得 $1<x<10$,即 $f(\lg x)$ 定义域为 $(1,10)$.

3. 确定函数的奇偶性

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\dfrac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以该函数是奇函数.

4. 求函数的反函数

(2) $f(x)=2^x+1$.

提示　用 y 来表示 x, $2^x=y-1$, $x=\log_2(y-1)$.

交换 x,y 可得该函数的反函数为 $y=\log_2(x-1)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x & \text{当 } x\leqslant 0\\ 2^x & \text{当 } x>0\end{cases}$,求 $f(\Delta x)-f(0)$(Δx 表示一个数).

提示　$f(\Delta x)=\begin{cases}2+\Delta x & \text{当 } \Delta x\leqslant 0\\ 2^{\Delta x} & \text{当 } \Delta x>0\end{cases}$, $f(0)=2$

所以 $f(\Delta x)-f(0)=\begin{cases}\Delta x & \text{当 } \Delta x\leqslant 0\\ 2^{\Delta x} & \text{当 } \Delta x>0\end{cases}$.

8. 已知 $f(x)$ 是二次多项式,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$, $f(0)=0$,求 $f(x)$ 的表达式.

解　用待定系数法.设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,因为 $f(0)=0$,所以 $c=0$,即 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$,所以 $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)(a\neq 0)$.

$f(x+1)-f(x)=2ax+a+b=8x+3$ 解之得:$a=4$, $b=-1$,所以 $f(x)=4x^2-x$.

9. 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$,求 $f(\cos x)$.

解　因为 $f(\sin x)=\cos 2x+1=1-2\sin^2 x+1=2-2\sin^2 x$ 所以 $f(x)=2-2x^2$,故 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x=1-\cos 2x$.

11. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数.

提示 将圆柱的底半径 x 表示为 h 与 r 的表达式，即 $x=\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}$ 即可.

12. 设火车从甲站出发，以 0.5 km/min^2 的加速度匀加速度前进，经过 2 min 后开始匀速行驶，再经过 7 min 后以 0.5 km/min^2 的加速度匀减速停在乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数，并作出其图形.

提示 分三个时间段.

(1)0 到 2 min 的匀加速度段：$s=\frac{1}{2}at^2=0.25t^2$，$(0\leqslant t\leqslant 2)$.

(2)2 min 到 2+7=9 min 的匀速段，要考虑三点：

①2 min 末时，火车已行驶的路程 $s=1$；

②此时火车的速度 $v=at=1$；

③此时时间是 2 min 以后，因此时间应为 $t-2$ 来计算(其中 t 是从甲站出发时算起).

$$s=1+1\times(t-2)=t-1(2<t\leqslant 9);$$

(3)9 min 以后匀减速段：除上段要注意的事项外，需计算火车什么时候停下来，即火车什么时候速度为 0，为此需计算 $1-0.5(t-9)=0$ 得 $t=11$ min 即火车由甲站出发经 11 min 后到达乙站.

$$s=8+(t-9)-\frac{1}{2}\times 0.5(t-9)^2=t-1-0.25(t-9)^2$$

所以

$$s=\begin{cases}0.25t^2 & \text{当 } t\in[0,2]\\ t-1 & \text{当 } t\in(2,9]\\ t-1-0.25(t-9)^2 & \text{当 } t\in(9,11]\end{cases}.$$

综合测试题一

二、填空题

4. 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且在闭区间 $[0,2]$ 上 $f(x)=x^2-2x$，则在闭区间 $[2,4]$ 上，$f(x)=(x-2)^2-2(x-2)$.

提示 因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，从 $[0,2]$ 到 $[2,4]$ 刚好向右平移了一个周期，所以对应的表达式由 $f(x)=x^2-2x$ 变为 $f(x)=(x-2)^2-2(x-2)$.

第二章 极限与连续

习题 2-3

1. 判断题

(2)在某过程中,若 $f(x)$、$g(x)$均无极限,则 $f(x)+g(x)$无极限.(×)

提示 举反例 $f(x)=\frac{1}{x}$,$g(x)=-\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$、$g(x)$均无极限,但$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$.

(3)在某过程中,若 $f(x)$有极限,$g(x)$无极限,则 $f(x)\cdot g(x)$无极限.(×)

提示 举反例 $f(x)=x$,$g(x)=\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$有极限,而 $g(x)$无极限,但$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]=1$.

(8)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在.(×)

提示 举反例 $f(x)=x-x_0$,$g(x)=\frac{1}{x-x_0}$,当 $x\to x_0$时,$f(x)$、$f(x)\cdot g(x)$的极限都存在,但 $g(x)$的极限不存在.

3. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=1$,求常数 a 与 b 的值.

提示 因为$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$,$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=1$,所以$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$,即 $1+a+b=0$,$a=-b-1$,所以 $x^2+ax+b=x^2-(b+1)x+b=(x-b)(x-1)$,

所以$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-b)(x-1)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(b-x)=1$,所以 $b=2$.

习题 2-4

1. 计算下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+3x}{\tan x+2x}$.

解 分子、分母同除以 x,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+3x}{\tan x+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+3}{\frac{\tan x}{x}+2}=\frac{4}{3}$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-c}\right)^x=2$,求 c 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x-c}\right)^{x-c}\cdot\left(1+\frac{c}{x-c}\right)^c$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{c}}\right]^c\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x-c}\right)^c=\mathrm{e}^c.$$

习题 2-6

1. 判断题

(2)若 $f(x)$在点 x_0处连续,$g(x)$在点 x_0处不连续,则 $f(x)\cdot g(x)$在 x_0处必不连续.(×)

提示 请看例子,$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq 0 \\ 0 & \text{当 } x=0 \end{cases}$,$g(x)=\begin{cases} -1 & \text{当 } x\leqslant 0 \\ 1 & \text{当 } x>0 \end{cases}$,

而 $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} -x\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x<0 \\ 0 & \text{当 } x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x>0 \end{cases}$,易知 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,$g(x)$在 $x=0$ 处不连续,但 $f(x)\cdot g(x)$在 $x=0$ 处连续.

综合测试题二

一、填空题

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$________.

提示 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

11. 设 $\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,$\psi(x)=1-\sqrt[3]{x}$,则当 $x\to 1$ 时,$\varphi(x)$是 $\psi(x)$的________阶无穷小.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+x}=\dfrac{3}{2}$,

所以 $\varphi(x)$是 $\psi(x)$的同阶无穷小.

四、计算下列极限

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|x|}{x}\right)$.

提示 当 $x\to+\infty$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}=\dfrac{3}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x}=1$,

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}+\frac{|x|}{x}\right)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

当 $x\to-\infty$时,$\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}=\dfrac{3}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}=-1$,

所以
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}+\frac{|x|}{x}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a.$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{4(x-1)}$.

解 设 $x-1=y$ 则 $x=y+1$. 当 $x\to 1$ 时 $y\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{4(x-1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(\pi y+\pi)}{4y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-\sin\pi y}{4y}=-\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\pi y}{\pi y}=-\dfrac{\pi}{4}.$

五、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & 当\ x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & 当\ x<0\end{cases}\quad(a>0)$,

当 a 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

解之得

$$a=1.$$

六、已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 等价无穷小，求 a.

解 要使 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 等价，必须满足

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$. 因为 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{\dfrac{1}{2}x^2\left(\sqrt[3]{(1+ax^2)^2}+\sqrt[3]{1+ax^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a}{\sqrt[3]{(1+ax^2)^2}+\sqrt[3]{1+ax^2}+1}=\frac{2a}{3},$$

解之得

$$a=\frac{3}{2}.$$

七、设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+ax^2-x+4}{x+1}=b$(常数)，求 a,b.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+ax^2-x+4}{x+1}=b$，

所以 $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+ax^2-x+4)=0$，解之得 $a=-4$，

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x^2-1)-4(x^2-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)(x-4)=10,$$

所以 $b=10$.

八、求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点，并对间断点分类.

解 该函数是初等函数，在定义域内连续，只需找无定义的点.

因为 $x=1$ 时，$f(x)$ 无意义，所以 $x=1$ 是该函数的间断点.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，所以 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

因为 $1-e^{\frac{x}{1-x}}=0$ 时，$f(x)$ 亦无意义，所以 $x=0$ 也是该函数的间断点.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

十、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<f(x)<b$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=\xi$.

证明 构造函数 $F(x)=f(x)-x$ 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因为 $a<f(x)<b$ 所以 $F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$，根据零点定理，在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

第三章 导数与微分

习题 3-1

6. 试求曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上与直线 $x-4y=5$ 平行的切线方程.

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3-\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}[3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]$,

所以 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{3}\lim[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=x^2,$$

设切点为 (x_0,y_0),则切线斜率为 $k_{切}=y'|_{x=x_0}={x_0}^2$,

直线 $x-4y=5$ 的斜率为 $k=\frac{1}{4}$,

${x_0}^2=\frac{1}{4}$,$x_0=\pm\frac{1}{2}$,得切点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{24}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{24}\right)$.

过切点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{24}\right)$ 的切线方程为 $y-\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,即 $3x-12y-1=0$,

过切点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{24}\right)$ 的切线方程为 $y+\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)$,即 $3x-12y+1=0$.

7. 试讨论分段函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & 当\ x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & 当\ a\leqslant x<b,\\ \dfrac{x-b}{b-a}+1 & 当\ x\geqslant b\end{cases}$$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的可导性.

解 (1)给自变量在 $x=a$ 处以改变量 Δx,

当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=\frac{a+\Delta x-a}{b-a}-\frac{a-a}{b-a}=\frac{\Delta x}{b-a}$,

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{b-a}.$$

当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=0$,

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

$f'_-(a)\neq f'_+(a)$,$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

(2) 给自变量在 $x=b$ 处以改变量 Δx,

当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=f(b+\Delta x)-f(b)=\frac{b+\Delta x-b}{b-a}+1-\left(\frac{b-b}{b-a}+1\right)=\frac{\Delta x}{b-a}$,

$$f'_+(b)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{b-a},$$

当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=f(b+\Delta x)-f(b)=\frac{b+\Delta x-a}{b-a}-\frac{b-a}{b-a}=\frac{\Delta x}{b-a}$,

$$f'_-(b)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{b-a},$$

$f'_-(b)=f'_+(b)$，$f(x)$在 $x=b$ 处可导．

提示　在讨论分段函数在分段点处的可导性时，一般需用定义判断．先求出其左导数和右导数，再看二者是否相等．

习题 3-2

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=-2x^2\cdot\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^2}$.

解　$y'=(-2x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{-2})'=-5x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-3}=-5x\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{2}{x^3}$.

提示　几个幂函数乘积求导，要先将它们化为幂的形式 $x^{a_1}\cdot x^{a_2}\cdots x^{a_n}=x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$，再进行求导，这样更加简便．

(4) $y=\mathrm{e}^2-\dfrac{\pi}{x}+x^2$.

解　$y'=\left(\mathrm{e}^2-\dfrac{\pi}{x}+x^2\right)'=\dfrac{\pi}{x^2}+2x$.

提示　求函数的导数时，首先要分辨清函数的种类，然后再利用相应的公式去求，如本题中$(\mathrm{e}^2)'=0$，而不是$(\mathrm{e}^2)'=2\mathrm{e}$.

(12) $y=a^x\mathrm{e}^x-\dfrac{\log_a x}{\ln x}$.

解　$y'=\left[(ax)^x-\dfrac{\ln x}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right]'=(ax)^x\ln(ax)-\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)'=(\ln a+1)a^x\mathrm{e}^x$.

提示　本题要先将函数作适当的变形，然后再进行求导，否则会很麻烦．

2. 求下列函数的导数：

(21) $s=\mathrm{e}^{\cos^2\frac{1}{x}}$.

解
$$s'=\mathrm{e}^{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\cos^2\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot 2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)'$$
$$=\mathrm{e}^{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot 2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\mathrm{e}^{\cos^2\frac{1}{x}}.$$

(23) $y=\ln\arctan\dfrac{1}{1+x}$.

解
$$y'=\frac{1}{\arctan\frac{1}{1+x}}\left(\arctan\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{1}{\arctan\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1}{1+x}\right)'$$
$$=\frac{1}{\arctan\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)=\frac{-1}{(x^2+2x+2)\arctan\frac{1}{1+x}}.$$

提示　复合函数求导时分层是关键．要做到既不漏也不多，如

$(\sin^2\sqrt{x})'=2\sin\sqrt{x}(\sin\sqrt{x})'=2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}=\sin 2\sqrt{x}$，漏掉了最内层对$\sqrt{x}$的求导，同样$(\sin^2 3x)'=2\sin 3x(\sin 3x)'(3x)'$，多乘了$(3x)'$，这两例的做法都是错误的．

7. 用对数微分法求下列函数的导数：

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}}$.

解　等式两边同取自然对数，得　$\ln y=\ln(\sqrt{x+1}-\ln\sqrt[3]{(x+2)(x+3)^2})$，

即
$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+3),$$

两边对 x 求导
$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2}{3(x+3)},$$

整理，得
$$y'=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x+2)(x+3)^2}}\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2}{3(x+3)}\right].$$

提示　等式两边同取自然对数后，一定要将乘积或商的对数都变为和或差的对数后，两边再对 x 求导，这样计算简便．如本题不能在第一个等式两边对 x 求导，否则计算会很麻烦．

习题 3-3

1. 求函数 $y=x^2+x$ 在 $x=3$ 处，在 Δx 等于 0.1，0.01 时的增量与微分．

解　这里 $x=3,\Delta x=0.1,\mathrm{d}x=\Delta x=0.1$，

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-(x^2+x)=(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2$，

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.1}}=(2\times3+1)\times0.1+0.1^2=0.71.$$

$\mathrm{d}y=(2x+1)\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.1}}=(2\times3+1)\times0.1=0.7.$

类似地，可得

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.01}}=(2\times3+1)\times0.01+0.01^2=0.0701,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0.01}}=(2\times3+1)\times0.01=0.07.$$

3. 求下列函数的微分：

(5) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

解　$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$

$$=\frac{-2x\mathrm{d}x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{当 } x\in[-1,0)\\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{当 } x\in[0,1]\end{cases}.$$

5. 当 $|x|\ll1$ 时，证明近似公式 $\tan x\approx x$.

证明　设　$f(t)=\tan t,t_0=0,\Delta t=x$，

则　$t=x,f(t_0)=0,f'(t)=\sec^2 t,f'(0)=1.$

$f(t)\approx f(t_0)+f'(t_0)\Delta t$，故　$\tan x\approx\tan 0+\sec^2 0\cdot x=x.$

6. 利用微分求函数的近似值：

(1) $\cos 59°$.

解　设 $f(x)=\cos x$，　$x_0=60°=\dfrac{\pi}{3}, x=59°$，

则 $f'(x)=-\sin x, \Delta x=x-x_0=-1°=-\dfrac{\pi}{180}, f(x_0)=\dfrac{1}{2}, f'(x_0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$,故　$\cos 59°\approx\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)=0.5151$.

习题 3-4

1. 求下列各函数的二阶导数.

(6) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　$$y'=\frac{2x\sqrt{1+x^2}-x^2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{2x\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{2x+x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}},$$

$$y''=\frac{(2+3x^2)\sqrt{(1+x^2)^3}-(2x+x^3)\dfrac{3}{2}\sqrt{(1+x^2)}2x}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{(2+3x^2)\sqrt{(1+x^2)^3}-3x(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{(2+3x^2)\sqrt{1+x^2}-3x(2x+x^3)}{\sqrt{(1+x^2)^5}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$$

2. 求下列各函数在指定点的二阶导数值.

(2) $y=\ln(\ln x), x=e^2$.

解　$y'=\dfrac{1}{x\ln x}$,

$$y''=-\frac{(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2},\quad y''|_{x=e^2}=-\frac{\ln e^2+1}{(e^2\ln e^2)^2}=\frac{-3}{4e^4}.$$

3. 设 $y=x^2\ln x(x>0)$,求 $y^{(4)}$.

解　$y'=3x^2\ln x+x^2$，　$y''=3(2x\ln x+x)=6x\ln x+5x$，

$y'''=6(\ln x+1)+5$，　$y^{(4)}=\dfrac{1}{x}$.

习题 3-5

1. 求方程所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(5) $e^{xy}+y\ln x=\sin 2x$.

解　$e^{xy}(xy)'+y'\ln x+y\cdot\dfrac{1}{x}=\cos 2x(2x)'$

$e^{xy}(y+xy')+y'\ln x+\dfrac{y}{x}=2\cos 2x$

$$y'=\frac{2x\cos 2x-y-xye^{xy}}{x^2e^{xy}+x\ln x}.$$

4. 求参数方程所确定的函数的导数.

(1) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t} \\ y=\sqrt{1-t} \end{cases}$.

解 $x'_t=\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$，　$y'_t=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}$，　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$.

(3) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{cases}$.

解 $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$，　$y'_t=3b\sin^2 t\cos t$，　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{b\sin t}{-a\cos t}=-\dfrac{b}{a}\tan t$.

6. 已知曲线 $\begin{cases} x=t^2+mt+n \\ y=pe^t-2e \end{cases}$ 在 $t=1$ 时过原点，且在 $t=0$ 处的切线与直线 $2x+3y-5=0$ 平行，求常数 m,n,p.

解 当 $t=0$ 时，得 $x=0$，$y=0$，即切点为 $(0,0)$.

$$x'_t=2t+m,\ y'_t=pe^t,\ y'_x=\frac{pe^t}{2t+m},$$

过切点 $(0,0)$ 的切线斜率为 $k_{切}=y'_x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\dfrac{pe^0}{2\times0+m}=\dfrac{p}{m}$，

又直线 $2x+3y-5=0$ 的斜率为 $k=-\dfrac{2}{3}$，

$$\frac{p}{m}=\frac{2}{3},\quad 即\ 2m+3p=0, \tag{1}$$

由曲线在 $t=1$ 时过原点，可得 $1+m+n=0$，$pe^0-2e=0$，

即
$$m+n=-1, \tag{2}$$
$$p-2=0, \tag{3}$$

联立(1)，(2)，(3)式得 $m=-3$，$n=2$，$p=2$.

综合测试题三

五、设函数 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x) & 当\ x\geqslant 0 \\ & 当\ x,x<0 \end{cases}$，试讨论 $x=0$ 处的可导性.

提示 因为 $f(x)$ 是分段函数，$x=0$ 是分界点，所以该题用定义求导.(参照 3－1 第 7 题)

六、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 当\ x\leqslant 1 \\ ax+b & 当\ x>1 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，试讨论 a,b 应为多少？

解 给自变量在 $x=1$ 处以改变量 Δx，

当 $\Delta x>0$ 时，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=a(1+\Delta x)+b-1$，

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0^+}[a(1+\Delta x)+b-1]=a+b-1,$$

当 $\Delta x<0$ 时，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2$，

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0^-}[2\Delta x+(\Delta x)^2]=0,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，必须 $a+b-1=0$，

又
$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a\Delta x)}{\Delta x}=a,$$
$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，必须 $a=2$. 这时得 $b=1$.

十、求解下列各题：

2. 设方程 $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^3\end{cases}$，确定了函数 y，求 y''_x.

解 由方程可得 $x'_t=2at$， $y'_t=3bt^2$， $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3bt}{2a}$，

又
$$(y'_x)'_t=\frac{3b}{2a},\quad 即\ y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{3b}{4a^2t}.$$

3. 求 $(e^{-2x})^{(n)}$.

提示 由 $(e^{-2x})'=-2e^{-2x}$，$(e^{-2x})''=(-2)^2e^{-2x}$，$(e^{-2x})'''=(-2)^3e^{-2x}$，…，可得 $(e^{-2x})^{(n)}=(-2)^ne^{-2x}$.

4. 设方程 $\begin{cases}x=a\cos^3\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$，确定了函数 y，求 y''_x.

解 $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$， $y'_t=3b\sin^2 t\cos t$， 即 $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{b}{a}\tan t$，

又
$$(y'_x)'_t=-\frac{b}{a}\sec^2 t,\quad y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

提示 求参数方程所确定函数的二阶导数时，不必死记公式．利用二阶导数的定义去求即可．