高等学校教材

高等数学

上册

主编　赵天绪　阎恩让

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

上册

主编　赵天绪　阎恩让

编著　何广平　苏忍锁　刘淳安　何俊红

杨　芳　于建伟　杨亚强

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分为上、下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等，作为附录在书末还编写了高等数学中几种常用曲线、常用积分公式、中学数学基础知识等。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、数学软件与数学建模等。

本书适合高等学校理工科非数学类专业本、专科学生作为教材使用，也可作为工程技术人员及自学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册／赵天绪，阎恩让主编. --北京：高等教育出版社，2013.7
ISBN 978-7-04-037213-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… ②阎… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 068036 号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　特约编辑 查 杰　封面设计 王凌波
版式设计 余 杨　插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	20.25	版 次	2013 年 7 月第 1 版
字 数	370 千字	印 次	2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	29.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 37213-00

前　言

改革开放以来，我国经济快速发展，综合国力不断提升，随之而来的是各行各业对知识型人才需求的增加，为我国高等教育的大发展带来了新的机遇。特别是在上世纪末教育部“面向21世纪教育振兴行动计划”及教育工作会议的推动下，高等教育不断普及、深化，国民接受高等教育的机会越来越大，过去那种“精英式”的高等教育已被“普及式”的大众教育所替代。随之而来，我们的高等教育也面临不少新问题：本科生的入学人数急剧增加，学生在知识基础、综合能力、整体素质等方面的差异较大，这在地方院校尤为突出。这些新问题的出现对大学数学的教学改革和教材建设也提出了新的要求。

高等数学作为高等学校理工科非数学类专业本科生必修的基础理论课，在培养高素质科学技术人才中发挥着不可替代的作用。高等数学教学及教材在注重传授知识的同时，也要努力培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力以及自主学习的能力，并逐步培养学生的创新精神和创新能力。要实现这样的教学目标，教材建设是必不可少的环节之一。

面对大众化教育给地方高等院校带来的新问题和高等数学课程的教学目标，编写一套以地方院校理工科非数学类专业本科生为主要对象的高等数学教材是非常必要的。我们在进行省级教改项目“新形势下地方院校大学数学课程教学改革与实践(编号:11BY86)”研究的基础上，开展了高等数学教材建设，组织编写了这套教材，在力争做到能适合理工科非数学类专业本科生的教育现状，有利于实现该类专业的数学教学目标，适合新世纪人才培养要求的同时，还努力做到以下几个方面：(1) 与中学数学教学内容紧密衔接。例如，弱化了中学数学中已有的集合、函数等内容，强化了中学数学中没有的极坐标等内容，同时把高等数学中用到而在中学数学没有涉及的知识点作为附录，以备学生学习使用。(2) 适当降低例题、习题难度，做到节后有习题，章后有总习题，题型全面，题量适当，由易到难。(3) 强化知识的应用，介绍了数学软件和数学建模的相关知识，使学生初步了解应用数学知识解决实际问题的基本方法。(4) 章后有小结，对每一章的基本理论、基本方法等进行了全面总结，为学生掌握本章内容提供

方便。

本教材是按照理工科非数学类专业学生学习本课程应达到的要求编写的，其中带 * 的部分可供某些相关专业选用，也是对选用专业学生的基本要求。各院校根据自身情况，在达到基本要求的基础上还可以提出一些较高或特殊要求。

本教材分为上、下两册，由我校多年来一直从事该课程教学的教师编写，具体分工为：第 1 章、附录Ⅲ，苏忍锁；第 2、3 章，于建伟；第 4、5 章，刘淳安；第 6 章，杨芳；第 7 章的第 1 节至第 3 节，赵天绪；第 7 章的第 4 节至第 6 节，杨亚强；第 8 章，何俊红；第 9 章，何广平；第 10 章，阎恩让；第 11 章，杨芳；第 12 章及附录Ⅰ、附录Ⅱ，杨亚强。上册由阎恩让统稿，下册由苏忍锁统稿。

本教材的编写参考了许多优秀的大学高等数学教材，我们对其作者及同行表示感谢。由于水平有限，本书一定还有不足，恳请读者和同行在使用中批评指正，以便修订完善。

作　者

2013 年 1 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章

函数与极限

函数是对现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象. 它是微积分学研究的基本对象，因而是高等数学中最基本的概念之一. 极限在数学中用来描述自变量在某一变化过程中函数值的变化趋势，是微积分学研究的基本工具和重要的理论基础. 本章主要讨论函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的运算和性质.

1.1 函数

1.1.1 区间 邻域

集合是现代数学中一个重要的基本概念. 我们常将一些感兴趣的研究对象的总体叫做一个集合. 在微积分中我们常遇到的集合是**数集**,也就是实数集 **R** 的非空子集. 区间和邻域是我们最常用到的数集. 下面给出一些常用区间的记号,其中 $a<b$ 是任意实数.

1. **开区间** $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.
2. **闭区间** $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.
3. **左开右闭区间** $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.
4. **左闭右开区间** $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

以上 4 种区间称为以 a,b 为端点的**有限区间**. 另外还有 5 种**无限区间**:

5. $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$.
6. $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$.
7. $(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$.
8. $(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$.
9. $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,即实数集 **R**.

我们知道,实数集 **R** 的元素与数轴上的点之间有一一对应关系，通常把一个实数说成是一个点(它在数轴上的对应点). 这样，上述各种区间均可以在数

轴上表示出来(请同学们自己作出).

为了讨论方便,我们引入点的邻域的概念.

设 x_0 是实数,$\delta>0$,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ **邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$. 称点 x_0 为邻域中心、δ 为邻域半径. 而$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**. 在数轴上,点 x_0 的 δ 邻域表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合,即 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$. 当 $\delta>0$ 越小时,$x\in U(x_0,\delta)$表示点 x 与点 x_0 越靠近.

1.1.2 函数的概念

定义1 设 D 是一数集,x 是在 D 中取值的变量,y 是在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值的变量. 若对于变量 x 在 D 内的每一取值,按照某一对应法则 f,变量 y 总有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 是 x 的**函数**,记为 $y=f(x),x\in D$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 对于 $x\in D$,由对应法则 f 确定的对应值 $y\in\mathbf{R}$ 称为函数在点 x 处的**函数值**,也记作 $y=f(x)$.

在中学数学中,我们讨论过集合与映射. 按照映射的概念,函数定义中的对应法则 f 构成数集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射. 因此,函数 $y=f(x),x\in D$ 也被看做是特殊的映射 $f:D\to\mathbf{R}$,即函数是由数集到实数集的一个映射. 数集 D 称为函数 f 的**定义域**,记为 D_f;数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 f 的**值域**,记为 R_f. 关于函数概念我们作以下几点说明:

(1) 定义域 D_f 和对应法则 f 是确定函数的两大要素,是判定两个函数是否为相同函数的依据. 如果两个函数的定义域相同、对应法则也相同,那么这两个函数就是**相同的函数**,否则就是不同的函数.

(2) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,其定义域根据自变量所表示的实际意义来确定;另一种是对由抽象的算式表达的函数,我们约定其定义域是使得算式有意义的一切自变量的取值所组成的数集,称为函数的**自然定义域**.

(3) 对于函数 $y=f(x)$,点 $P(x,y)$(横坐标 $x\in D_f$,纵坐标 y 是 x 对应的函数值)称为一个**图像点**. 所有图像点的集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$构成函数 $y=f(x)$的**图像**. 一般而言,函数的图像是一条平面曲线. 但平面曲线未必都是某一函数的图像.

(4) 表示一个函数,就是要明确告知函数的定义域和对应法则. 根据对应法则的表示方法的不同,表示函数的方法主要有三种:解析法、列表法和图形法.

高等数学中讨论的函数,大多由解析法表示. 这是由于对解析式可以进行各种运算,便于函数性质的研究. 这里有一点需要指出:用解析法表示函数,不一定总是用一个式子表示,也可以按定义域分段用几个式子来表示一个函数,这样的函数我们称之为**分段函数**.

下面举几个函数的例子.

例 1 函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

称为**绝对值函数**,其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $R_f=[0, +\infty)$,它的图像如图 1-1 所示.

例 2 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**,定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图像如图 1-2所示.

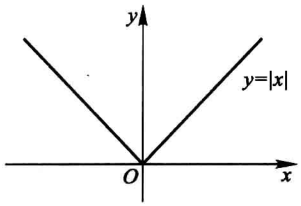

图 1-1

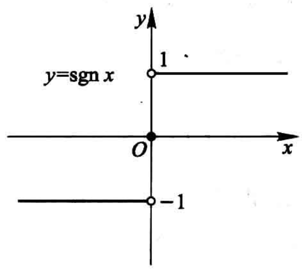

图 1-2

例 3 设 x 为实数,用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如,$[-\pi]=-4$,$[2.3]=2$,$[6]=6$. 对任意 $x \in \mathbf{R}$,有 $[x] \leqslant x < [x]+1$.

函数

$$y = [x], x \in (-\infty, +\infty)$$

称为**取整函数**. 它的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,值域为整数集 $\mathbf{Z}$.

对任意 $n \in \mathbf{Z}$,当 $n \leqslant x < n+1$ 时,$[x]=n$. 由此得到函数 $y=[x]$ 的图像如图 1-3 所示.

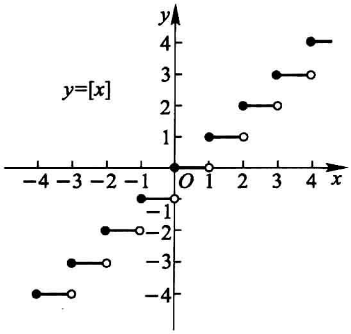

图 1－3

1.1.3 函数的几种特性

1. 有界性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，数集 $E \subset D_f$. 如果存在常数 $M>0$，使得对一切 $x \in E$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 E 上**有界**；否则称函数 $f(x)$ 在 E 上**无界**. 当函数 $f(x)$ 在整个定义域 D_f 上有界时，又称函数 $f(x)$ 为**有界函数**.

例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，但在 $(0,+\infty)$ 上无界. 函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$，$y=\sin x$ 均为有界函数.

2. 单调性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $I \subset D_f$. 如果对区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；如果对区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增加的函数的图像在给定区间上随 x 的逐渐增加而逐渐上升（图 1－4），单调减少的函数的图像在给定区间上随 x 的逐渐增加而逐渐下降（图 1－5）.

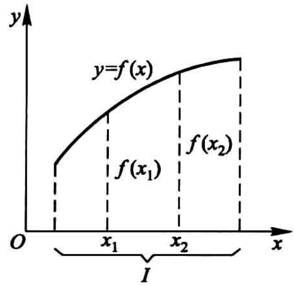

图 1-4

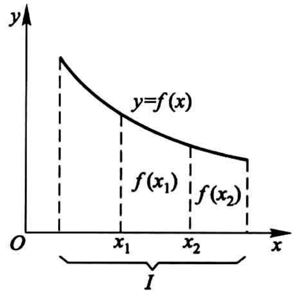

图 1-5

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的；而 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 奇偶性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，且当 $x\in D_f$ 时，$-x\in D_f$（即 D_f 关于原点对称）. 如果对任意 $x\in D_f$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意 $x\in D_f$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称（图 1-6），奇函数的图像关于原点对称（图 1-7）.

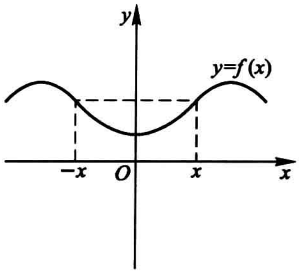

图 1-6

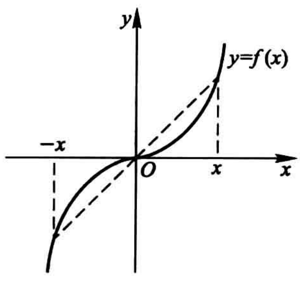

图 1-7

例 4 证明：函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

证 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，关于原点对称. 对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= \lg[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)] \\ &= \lg[(\sqrt{x^2+1})^2-x^2] \\ &= \lg 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

即 $f(-x)=-f(x)$. 所以,$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

4. 周期性

定义5　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f. 若存在实常数 $T>0$,使得当 $x\in D_f$ 时,都有 $x+T\in D_f$, 且对任意 $x\in D_f$,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**周期函数**, 常数 T 称为函数 $f(x)$的一个**周期**.

图1-8表示一个以 $T>0$ 为周期的周期函数. 在每个长度为 T 的区间上, 函数图像有完全相同的形状.

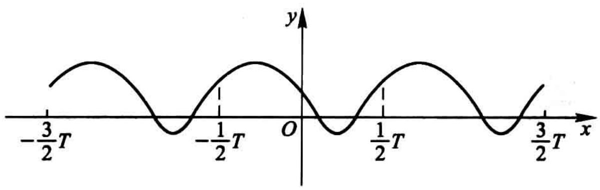

图1-8

容易知道,若 $T>0$ 是函数 $f(x)$的周期,则 $nT(n=1,2,3,\cdots)$也都是 $f(x)$的周期. 可见任一周期函数必有无穷多个周期. 如果周期函数 $f(x)$的无穷多个周期中存在一个最小数 T_0,则称 T_0 为 $f(x)$的**基本周期(最小正周期)**. 通常我们说周期函数的周期一般是指其基本周期. 例如,$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的周期是 2π,而 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期为π. 下例说明,周期函数未必都有基本周期.

例5　函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}, \\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com