31st IMO 1990·中国

数学奥林匹克

胡大同　陶晓永　编

第31届国际数学竞赛预选题

北京大学出版社

数学奥林匹克

31届国际数学竞赛预选题

胡大同　陶晓永　编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　6.25　印张　136千字

1991年7月第一版　1991年7月第一次印刷

印数：00001-31,000册

ISBN7-301-01517-8/G·87

定价：3.20元

前　言

国际数学奥林匹克（IMO）是一种光明正大的竞赛．这种竞赛的目的不是争夺金牌的个数或者总分第一，而是为了及早发现人才，予以培养；为了加强国际间的交流，互相学习；为了促进数学的普及、繁荣与发展．

近年来，每一届IMO都有100多道预选题提交选题委员会．这些问题是“奥林匹克数学”的一个重要组成部分，它的特点用一句话来概括，就是“初等的知识，高等的思想”．

我们认为将这批题目整理出来，公之于众是符合上述几项目的的，对于IMO自身的发展也是有百益而无一害的．

本书基本上根据各国提供的材料进行整理．

本届（31届）IMO中国队领队、南京师范大学数学系单墫教授对每一道题都进行了仔细的核对和校阅，更正了一些错误（如意大利第4题（总45题），提供国所给的答案与解均是错误的，根据单墫教授过去的一篇论文可知，目前最好的结果是$\leqslant n^2-2n-4$；又如北朝鲜第2题（总68题）题目条件是不充分的，现改成本文所述），换去了一些繁琐的解法并对文字进行了修饰，使得解答更加简明．在此，我们对单墫教授表示衷心的感谢！

在本书中，我们还收入了匈牙利、加拿大、美国以及亚太地区1990年的竞赛试题，我们希望这些资料能对读者有

所收益。

非常感谢北京大学出版社的邱淑清、王明舟两位编辑，没有他们的大力支持，这批宝贵的资料是不可能及时问世的。

由于水平及时间所限，不妥之处，仍恐难免，敬请读者批评指正。

编　者

90年10月10日

目　　录

各国和地区提供给第31届(1990年)IMO的问题及解答

问　　题

1．(澳大利亚)　$\triangle ABC$中，O为外心，H是重心，作$\triangle CHB, CHA$和AHB的外接圆，依次记它们的圆心为A_1, B_1, C_1。

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$，且这两个三角形的九点圆重合。

2．(澳大利亚)　求证：

$$1990\times\left\{\frac{1}{1990}C_{1990}^{0}-\frac{1}{1989}C_{1989}^{1}+\frac{1}{1988}C_{1988}^{2}-\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^m}{1990-m}C_{1990-m}^{m}+\cdots-\frac{1}{995}C_{995}^{995}\right\}+1=0.$$

3．(澳大利亚)　整数9可表成两个连续整数的和$9=4+5$，同时，它恰可用两种不同的方法写成连续整数和：

$$9=4+5=2+3+4.$$

是否有这样的整数，它可以表成1990个连续整数的和，并且恰有1990种不同的方法表成连续整数和。

4．(加拿大)　n个国家，每个国家有3个成员，m个委员会$A(1), A(2), \cdots, A(m)$称为一个“圈”．若

(1) 每个委员会有n个成员，每个国家各一名；

(2) 每两个委员会的成员不完全相同；

(3) 委员会$A(i)$和$A(i+1)$没有公共成员（约定$A(m+1)=A(1)$）；

(4) 若$1<|i-j|<m-1$，则委员会$A(i)$和$A(j)$至少有一个公共成员．

问：是否存在一个由11个国家的成员组成的1990个委员会构成一个“圈”？（注：原题为15个国家）

5．（哥伦比亚） 恰有1990个边长为整数的$\triangle ABC$满足

(1) $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BAC$；

(2) $AC=b$．

求b的最小值．

6．（哥伦比亚） 设函数f：$(\boldsymbol{Z}^{+})^3\to\boldsymbol{N}$满足

$$f(x,y,z)=f(x-1,y,z)+f(x,y-1,z)+f(x,y,z-1)$$

及$f(0,0,0)=1$．并且在上述的关系反复使用时若x',y'或z'中出现负数，则

$$f(x',y',z')=0.$$

证明：若x,y,z是一个三角形的三条边长时，则对任意的整数$k,m>1$．

$$[f(x,y,z)]^k/f(mx,my,mz)$$

都不是整数．

7．（古巴） A和B是平面α内的两点，过A,B的直线为r．r分成的一个半平面内，有n个不同的点$P_1,P_2,\cdots,P_n$．

证明：由A,B到P_i（$i=1,2,\cdots,n$）的距离所构成的集

合中，至少有$\sqrt{n}$个不同的元素。

8．（捷克） 设 p,k 和 x 是自然数，满足不等式

$$x<\left[\frac{p(p-k+1)}{2(k-1)}\right]\ (p\geqslant k),$$

这里$[q]$表示不超过 q 的最大整数。

求证：若将 x 个球放入 p 个盒子中，无论怎样分配，必有 k 个盒子中含有相同的球数。

9．（捷克） 设$n\geqslant 3$．考虑在同一圆周上的$2n-1$个互不相同的点所成的集合 E．将 E 中一部分点染成黑色，其余的点不染颜色．如果至少有一对黑点，以它们为端点的两条弧中有一条的内部(不包含端点)恰含 E 中 n 个点，则称这样的染色方式是好的．如果将 E 中 k 个点染黑的每一种染色方式都是好的，求 k 的最小值．（本届第二赛题）

10．（捷克） 设全体正整数集可以分割成 r 个互不相交的子集

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r=N.$$

证明：必有一个子集 A_i 具有下面性质P：存在一个正数 m，使得对任意k，总能在 A_i 中找到 k 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 满足

$$0<a_{j+1}-a_j\leqslant m\ (1\leqslant j\leqslant k-1).$$

11．（捷克） 在一群数学家中，每一个人都有一些朋友(关系是相互的)．

证明：存在一个数学家他所有朋友的朋友的平均数不小于这群人的朋友的平均数。

12．（捷克） 对于集合$\{1,2,\cdots,n\}$的任一排列p，记

$$d(p)=|p(1)-1|+|p(2)-1|+\cdots+|p(n)-n|,$$

又用 $i(p)$ 表示 p 的反序数即，满足 $1\leqslant i<j\leqslant n$，$p(i)>p(j)$ 的数对 (i,j) 的数目。求所有的实数 c，使得不等式

$$i(p)\leqslant c\cdot d(p)$$

对任一自然数 n 及任一排列 p 均成立。

13.（芬兰） 设6个城市 A,B,C,D,E,F 为正六边形的顶点。G 位于这正六边形的中心，六边形的边是连结这些城市的道路。此外，城市 B,C,E,F 都与 G 相连。由于下雨，一条或几条道路可能被损坏。实际上，人们能够利用连接相邻两城市的道路的概率为 p。

问：A 与 D 之间的连通不被破坏的概率是多少？

14.（芬兰） 我们称实轴上的一个集合 S 是"超稳定的"，若对集合 S 的任一伸缩变换 A：

$$A(x)=x_0+a(x-x_0)\quad(a>0)$$

必有变换 B，$B(x)=x+b$，使得 S 在变换 A 和变换 B 下的象是一致的，即对任意 $x\in S$，必有一个 $y\in S$ 使

$$A(x)=B(y),$$

并且，对任意 $t\in S$，必有一个 $u\in S$ 使

$$B(t)=A(u).$$

求一切"超稳定"的集合。

15.（法国） $\triangle ABC$ 中各边不等，G,K,H 分别为重心、内心与垂心，证明 $\angle GKH>90^\circ$。

16.（法国） 称整数 $k(\geqslant1)$ 具有性质 P，若至少有一个 $\geqslant1$ 的整数 m 不能表为

$$m=\varepsilon_1z_1^k+\cdots+\varepsilon_{2k}z_{2k}^k$$

的形式，其中 z_i 为正整数或零，$\varepsilon_i=1$ 或 $-1(1\leqslant i\leqslant2k)$。

证明有无穷多个k具有性质P。

17．（法国） 一次会议有1990位数学家参加，每人至少有1327位合作者。证明可以找到4位数学家，他们中每两个人都合作过。

18．（西德[①]） 求具有以下性质的最小的自然数n并予以证明：

$1/n$的二进制表示中，1至1990的二进制表示全部在小数点后出现（由连续的数字组成）。

19．（西德） A,B两选手按以下规则轮流取数：

开始时，给定一个自然数$n_0>1$。在已知n_{2k}时，选手A可取任一$n_{2k+1}\in\boldsymbol{N}$，使

$$n_{2k}\leqslant n_{2k+1}\leqslant n_{2k}^2.$$

然后选手B取数$n_{2k+2}\in\boldsymbol{N}$，使

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}=p^r,$$

其中p为一素数，$r\in\boldsymbol{N}$。

如果A取到1990，则规定A胜，如果B取到1，则规定B胜。

对于什么样的n_0，A可设法取胜？对于什么样的n_0，B可设法取胜？对于什么样的n_0，A,B不分胜负？

（本届第5赛题）

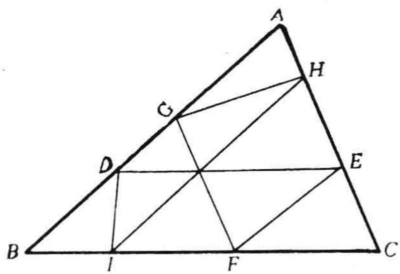
20．（西德） 三维欧氏空间是否可表成无公共点的圆（周）的并集？

---

① 当时东、西德未统一。

21．（希腊）　过$\triangle ABC$内一点O引三边的平行线（如图）$DE /\!/ BC$，$FG /\!/ CA$，$HI /\!/ AB$．点D, E, F, G, H, I都在$\triangle ABC$的边上．S_1表示六边形$DGHEFI$的面积，S_2表示三角形ABC的面积．求证：

$$S_1 \geqslant \frac{2}{3} S_2.$$



22．（希腊）　设$f(0)=f(1)=0$，及

$$f(\nu+2)=4^{\nu+2} f(\nu+1)-16^{\nu+1} f(\nu)+\nu 2^{\nu^2},$$

$$\nu=0,1,2,\cdots.$$

求证：$f(1989), f(1990), f(1991)$均被13整除．

23．（匈牙利）　对于给定的正整数k，定义$f_1(k)$为k的数字和的平方，并令

$$f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k)),$$

求$f_{1991}(2^{1990})$的值．

24．（匈牙利）　求t，使方程组

$$\begin{cases} x+y+z+v=0, & (1) \\ (xy+yz+zv)+t(xz+xv+yv)=0 & (2) \end{cases}$$

有唯一的实数解.

25. (匈牙利) $\triangle ABC$ 的内心为K, AB, AC 的中点分别为 C_1 和 B_1. 直线 C_1K 交 AC 于 B_2, 直线 B_1K 交 AB 于 C_2, 若$\triangle AB_2C_2$ 的面积与$\triangle ABC$ 的面积相等, 求$\angle CAB$ 的度数.

26. (冰岛) 证明: 有无穷多个自然数 n, 使平均数

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$$

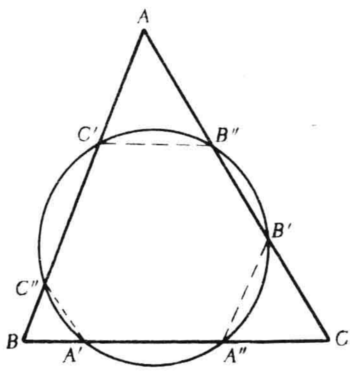
为完全平方数. 第一个这样的数当然是 1, 请写出紧接在 1 后面的两个这样的自然数.

27. (冰岛) 一个平面分一个直(圆锥)为两部分. 这平面与圆锥底面圆周相切并且过高的中点. 求较小部分体积与整个圆锥体积之比.

28. (印度) 设 ABC 是一个任意的锐角三角形. 圆 Γ 满足下列条件:

(i) 圆 Γ 与$\triangle ABC$ 的三边(线段)都有公共点;

(ii) 以上述六个公共点为顶点构成的凸六边形, 三组对边平行 (注: 六边形可能是退化的, 即有两个或更多的顶点重合, 这时"对边平行"按通常的极限观点来定义).



试求：圆 Γ 的中心轨迹(图)并说明如何作出这一轨迹。

29. （印度） 定义函数 $f(n)$ $(n\in \boldsymbol{N})$ 如下：设

$$(2n)!/\{n!(n+1000)!\}=A(n)/B(n),$$

这里 $A(n)$，$B(n)$ 是互质的正整数。

若 $B(n)=1$，则 $f(n)=1$；

若 $B(n)\neq 1$，则 $f(n)=B(n)$ 的最大质因数。

求证：$f(n)$ 的值是有限的，并求出它的最大值。

30. （印度） 在一个圆中，两条弦 AB，CD 相交于 E 点。M 为弦 AB 上严格在 E，B 之间的点。过 D，E，M 的圆在 E 点的切线分别交直线 BC，AC 于 F，G。

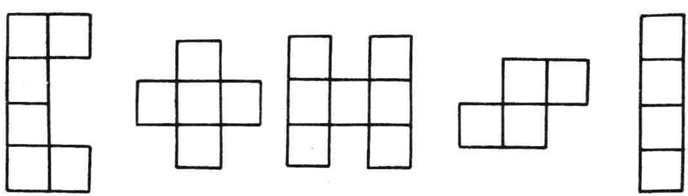
已知 $\dfrac{AM}{AB}=t$。求 $\dfrac{GE}{EF}$（用 t 表示）。

（本届第 1 赛题）

31. （印度） 集 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$。S 的 引元子集，如果元素和被 5 整除，则称为是好的。

求 S 的好子集的个数。

32. （伊朗） 能否用如下 5 种形式的小块（图中每一正方形代表一个单位立方体）构造一个平行六面体，各边都是 >1 的整数，体积为 1990。



33．（伊朗） 设集合S有1990个元素，P是集合S的一个100-塔(即由S中100个元素排成的数列)的集合。S中的任意一个有序数对至多在集合P的一个元素中出现(即若$x=(\cdots a\cdots b\cdots)$，则称有序数对$(a,b)$在塔$x$中出现)。

求证：P至多含有800个元素。

34．（伊朗） 空间中n个不共面的点。求证：必存在一个圆，它恰好经过其中三个点。

35．（伊朗） 证明：若$|x|<1$，则

$$\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots$$
$$=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots.$$

36．（爱尔兰） $\triangle ABC$中，设L是经过顶点C且与AB平行的一条直线。角A的平分线与BC边交于D，与L交于E。角B的平分线与AC边交于F，与L交于G。若$GF=DE$。求证：$AC=BC$。

37．（爱尔兰） 一位古怪的数学家。有一个梯子共n级，他在梯子上爬上爬下，每次升a级或降b级。这里a,b是固定的正整数。

如果他能从地面开始，爬到梯子的最顶上一级然后又回到地面。

求：n的最小值(用a,b表示)并加以证明。

38．（爱尔兰） 设α是二次方程$x^2=1990x+1$的正根，对任意自然数m,n，定义：

$$m*n=mn+[\alpha m][\alpha n],$$

这里$[x]$表示不超过x的最大整数。证明：对一切自然数p，q，r，

$$(p*q)*r=p*(q*r)。$$

39.（爱尔兰）　设a,b,c是整数，求证：存在整数p_1，$q_1,r_1;p_2,q_2,r_2$满足

$$a=q_1r_2-q_2r_1,$$

$$b=r_1p_2-r_2p_1,$$

$$c=p_1q_2-p_2q_1。$$

40.（以色列）　由给定的三个字母X,Y,Z，可以用任意方法构造字母序列，如$XZ,ZZYXYY,XXYZX$等。对任意一个给定的序列，可以执行如下的运算：

T_1：若最后的字母为Y，我们可在它的后面加YZ。例如

$$T_1(XYZXXY)=(XYZXXYYZ)。$$

T_2：若序列中含有YYY，我们可以把它们擦去，换成一个字母Z。例如

$$T_2(XXYYZYYYX)=(XXYYZZX)。$$

T_3：形如Xp（这里p是任一子列）的序列，可用XpX来代替。例如

$$T_2(XXYZ)=(XXYZX)。$$

T_4：在包括一个或若干个Z的序列中，我们可以将第一个Z换成XY。例如

$$T_4(XXYYZZX)=(XXYYXYZX)。$$

T_5：XX,YY,ZZ可以去替换成X。例如

$$T_5(ZZYXYY)$$

可以变成

$$XYXX, XYXYY \text{ 或 } ZZYXX\text{。}$$

问：能反复运用上述运算将 XYZ 变成 $XYZZ$ 吗？证明你的结论。

41．（以色列） 若 n 是任意一个正整数，计算

$$S_n=\sum_{r=0}^{n}2^{r-2n}\cdot C_{2n-r}^{n}\text{。}$$

42．（意大利） 在单位圆上求 n 个点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使 $\sum\limits_{1\le i<j\le n} p_ip_j$ 最大。

43．（意大利） 设 V 是欧氏空间中整点的一个有限集，S_1,S_2,S_3 分别是 V 中的点在 yz,zx,xy 平面内的射影的集合。求证：

$$|V|^2\le|S_1||S_2||S_3|\text{。}$$

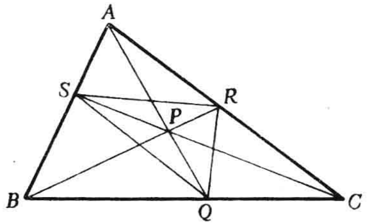
44．（意大利） 证明：对任意自然数 n，二项式系数 C_n^h（$0\le h\le n$）中，奇数的个数是 2 的幂。

45．（意大利） 一个岛上的游客试图得到宝藏。为此，他们要按如下规则打开漆有 n 种不同颜色的一系列的门。规则如下。

1）每个游客有 n 把钥匙，每种颜色各一把；

2）每把钥匙一旦用了，则必须一直用到损坏为止，中间不许更换；

3）每把钥匙可以打开与它颜色不同的门，在开与它同色的门时损坏。



求：门的序列的“长度”至少是多少时，每一位游客都不能得到财宝？

46. （日本） 设P是$\triangle ABC$的一个内点。Q,R,S分别是A,B,C与P的连线和对边的交点(如图)。求证：

$$\triangle QRS\text{的面积}\leqslant\frac{1}{4}\triangle ABC\text{的面积}.$$

47. （日本） 考虑以$(0,0),(0,m),(n,0),(n,m)$为顶点的矩形，其中m,n均为奇数。

将这矩形分拆为三角形，使得每个三角形的顶点为整点，至少有一条边与坐标轴平行，并且这边上的高为1。

证明在个分拆中至少有两个三角形，它们各有两条边平行于坐标轴。

48. （日本） 证明：$\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{1990}$是无理数。

49. （卢森堡） 设AB，AC为圆O的两条弦，垂直于BC的直径分别交AB于F，AC于G（F在圆内）。过G作切线，T为切点。证明F是T在OG上的正射影。

50. （墨西哥） 某学校课间休息时，n个孩子围成一个圆坐下做游戏。

老师按顺时针方向一边走一边按照下面的规则给孩子们分发糖果：

选一个孩子，给他及下一个孩子各一块糖，然后，越过