西安交大考研

# 数学考研新干线

2014版

# 高等数学

主　编　武忠祥

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

# 2014 版

# 数学考研新干线

# 高等数学

主　编　武忠祥

副主编　张　宇　杨　超





西安交通大学出版社

0130502000

## 内容简介

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)编写的辅导讲义,力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

**图书在版编目(CIP)数据**

2014 版数学考研新干线.高等数学/武忠祥主编.—西安:西安交通大学出版社,2013.5
ISBN 978-7-5605-5059-6

Ⅰ.①2… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 029265 号

**书　　名**　数学考研新干线　高等数学(2014 版)
**主　　编**　武忠祥
**责任编辑**　叶　涛

**出版发行**　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
**网　　址**　http://www.xjtupress.com
**电　　话**　(029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
**传　　真**　(029)82668280
**印　　刷**　陕西元盛印务有限公司

**开　　本**　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 14.25　**字数** 339 千字
**版次印次**　2013 年 5 月第 4 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-5605-5059-6/O·420
**定　　价**　28.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

# 前 言

本书在2013版基础上,根据考研数学试题的变化趋势,对其部分内容进行了适当的调整和补充。另外,各章都新增加了练习题精选和练习题答案与提示,以便考生通过练习掌握各章的题型和解题方法。

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成.全书共分九章及一个附录,每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧两部分组成.

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑.同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧.

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面.其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要.

希望本讲义能对复习考研的同学有较大的帮助.由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正.

祝同学们在考研的路上一路顺利!

编　者

2013年元月

# 目 录

# 第一章　函数 极限 连续

## 第一节　函数

### ■ 考试内容要点精讲

**1. 函数的概念(定义、定义域、对应法则、值域)**

**2. 函数的性态**

1) 单调性

定义　单调增：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

单调不减：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

判定　(1) 定义;

(2) 导数:设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导,则

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增;

b) $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减.

2) 奇偶性

定义　偶函数: $f(-x) = f(x)$;奇函数: $f(-x) = -f(x)$.

判定　(1) 定义;

(2) 设 $f(x)$ 可导,则:

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数;

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数;

连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

3) 周期性

定义　$f(x+T) = f(x)$

判定　(1) 定义;

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数;

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

4) 有界性

定义　若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$; 则称 $f(x)$ 在 $I$ 上有界.

判定　(1) 定义；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(3) $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界；

(4) $f'(x)$ 在区间 $I$(有限) 上有界 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $I$ 上有界.

**3. 复合函数与反函数**(函数分解成简单函数的复合，分段函数的复合)

**4. 基本初等函数与初等函数**

**基本初等函数：**

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为初等函数. 了解它们的定义域、性质、图形.

**初等函数：**

由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

## ■　常考题型的解题方法与技巧

### 题型一　复合函数

**例 1.1**　已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$，$(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1,a-1]$.　　(B) $[1,a+1]$.

(C) $[a,a+1]$.　　(D) $[a-1,a]$.

**解**　应选(B).

**例 1.2**　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

**解**　由 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，知

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x)\quad(x\leqslant 0)$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad(x\leqslant 0)$$

**例 1.3**　设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leqslant|x|\end{cases}$. 试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

**解**　$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leqslant|x|<2\\ 1, & |x|<1\text{ 或 }|x|\geqslant 2\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

## 题型二　函数性态

**例 1.4**　下列四个函数

(1) $x\sin\frac{1}{x}$　(2) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$　(3) $\frac{\sin x}{x}$　(4) $x\sin x$

在区间$(0,+\infty)$上有界的共有

(A) 0 个.　(B) 1 个.　(C) 2 个.　(D) 3 个.

**解**　应选(C)

(1) 由于 $x\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0,+\infty)$上连续,且

$$\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}\text{(等价无穷小代换)}$$
$$=1$$

则 $x\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上有界.

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$,令 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$　($n$ 为正整数)

则 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$　(当 $n\to\infty$ 时)

$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上无界.

(3) 由于$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上连续,且

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0,$$

则$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上有界.

(4) 令 $g(x)=x\sin x$,取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$　($n$ 为正整数)

$$g(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\quad(\text{当 } n\to\infty \text{ 时})$$

则 $g(x)=x\sin x$ 在$(0,+\infty)$上无界.

**例 1.5**　以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在$(0,1)$内有界,则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界,则 $f'(x)$ 在$(0,1)$内有界.

**解法 1**　直接法

由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，故选(C).

**解法 2**　排除法

令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，显然，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(A)、(B)都不正确.

令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(D)不正确.

故应选(C).

**例 1.6**　设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

**解**　令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

$F(x)$ 单调减，由 $a<x<b$ 知

$F(b)<F(x)$，即 $\dfrac{f(b)}{g(b)}<\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)g(b)>f(b)g(x)$

故应选(A).

**例 1.7**　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

**解**　本题要用到一个常用的结论：

若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f(x)<f(x_0)$；当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f(x)>f(x_0)$. 若 $f'(x_0)<0$ 有相应的结论.（利用导数定义和极限的保号性易证明此结论）

由以上结论知(C)正确.

**注**　本题选(A)是一种典型的错误，原因是由 $f'(x_0)>0$，得不到一定存在 $x_0$ 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下：

$$令\ f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1>0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则 $f'(x_n)=1-2=-1<0$.

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $f'(y_n)=1+\dfrac{4}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}>0$.

由于以上的两种点 $x_n$ 和 $y_n$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在，则在 $x=0$ 的任何邻域内既存在的导数为正的点，也存在导数为负的点，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

**例 1.8**　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

**证**　(1) 由于 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$.

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{x}(-x+2u)f(u)(-\mathrm{d}u)\quad(\text{令 } t=-u)\\&=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u\\&=F(x)\end{aligned}$$

则 $F(x)$ 为偶函数.

也可由 $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，及 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数，$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为偶函数.

(2) 由 $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 知

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\\&=x[f(\xi)-f(x)]\quad(\text{其中 }\xi\text{ 介于 0 与 }x\text{ 之间})\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

则 $F(x)$ 单调不减.

# 第二节　极限

## ■　考试内容要点精讲

### 1. 极限概念

1）数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

2）函数极限：

（1）自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = A$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = A$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to-\infty}f(x) = A$$

（2）自变量趋于有限值时函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{左极限}}$　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = f(x_0^-)$；

$\boxed{\text{右极限}}$　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = f(x_0^+)$；

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x) = \lim_{x\to x_0^-}f(x) = A$$

$\boxed{\text{几个值得注意的极限}}$

① $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\dfrac{1}{x} = +\dfrac{\pi}{2}$.

③ $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

④ $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = +\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$；$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

**2. 极限性质**

1) 局部有界性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 某去心邻域内有界.

2) 有理运算性质：若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$.

那么：$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

两个常用的结论：

① $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$;

② $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, $\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$.

3) 保号性：设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则

(1) 若 $A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(2) 若 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geqslant 0$ (或 $f(x) \leqslant 0$) $\Rightarrow A \geqslant 0$ (或 $A \leqslant 0$).

4) 极限与无穷小之间的关系：

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

**3. 极限存在准则**

1) 夹逼准则：若存在 $N$，当 $n > N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

2) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

**4. 无穷小量**

1) 无穷小量的概念：

若 $\lim f(x) = 0$，称 $f(x)$ 为无穷小量($x \to x_0$ 或 $x \to \infty$).

2) 无穷小的比较：设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$.

(1) 高阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$；记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$；

(2) 同阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$；

(3) 等价：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$；记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

(4) 无穷小的阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$，称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 $k$ 阶无穷小.

3) 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量之和仍为无穷小；

(2) 有限个无穷小量之积仍为无穷小；

(3) 无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

**5. 无穷大量**

1) 无穷大量的概念：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

2) 常用的一些无穷大量的比较：

(1) 当 $x\to+\infty$ 时

$\ln^{\alpha}x \ll x^{\beta} \ll a^{x}$

其中 $\alpha>0,\beta>0,a>1$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时

$\ln^{\alpha}n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}$

其中 $\alpha>0$, $\beta>0$, $a>1$.

3) 无穷大量与无界变量的关系：无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量

无穷大量一定是无界变量;但无界变量不一定是无穷大量.

数列$\{x_n\}$是无穷大量：$\forall M>0,\exists N$,当$n>N$时,恒有$|x_n|>M$.

数列$\{x_n\}$是无界变量：$\forall M>0,\exists N$,使$|x_N|>M$.

**例** 数列 $x_n=[1+(-1)^n]n$ 是无界变量,但不是无穷大量.

4) 无穷大量与无穷小量的关系：

无穷大量的倒数是无穷小量;无穷小量(恒不为零)的倒数是无穷大量.

## ■ 常考题型的解题方法与技巧

### 题型一 极限的概念、性质及存在准则

**例 1.9** "对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$,总存在正数 $N$,当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 $a$ 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

**解** 本题主要考查对数列$\{x_n\}$收敛于 $a$ 定义的理解. 其定义是"对任意给定的$\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$"由$\varepsilon$的任意性可知,这与本题中的说法是等价的,故应选(C).

**例 1.10** 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 $n$ 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 $n$ 成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在. (D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

**解法 1** 直接法

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,