“十二五”规划教材

概率统计与SPSS应用

(第2版)

于义良 罗蕴玲 安建业 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

“十二五”规划教材

概率统计与SPSS应用

（第2版）

于义良 罗蕴玲 安建业 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是天津市普通高等学校本科教学质量与教学改革研究计划项目“基于应用型人才培养的大学数学综合改革与实践”(津教委高[2012]32号)的研究成果。其基本内容是依据国家非数学类专业数学教学指导委员会分委员会于2005年提出的关于“概率论与数理统计”课程教学基本要求确定的。本书将概率统计理论和世界公认的标准统计软件——SPSS软件相结合，基于SPSS软件介绍实际应用，易学易用。使用者在学习相关理论的基础上，可以轻松完成统计计算和分析，实现理论到实践的转化。

全书分为8章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征；统计估值、统计检验、方差与协方差分析、相关与回归分析，以及20个演示实验。其特点是，内容可视化，计算软件化，方法现实化，技能突出，实用性强。

本书是天津市“十二五”规划教材，可作为高等学校非数学类本科专业学生的教材，也可作为应用统计工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计与SPSS应用/于义良，罗蕴玲，安建业编著.
—2版. —西安：西安交通大学出版社，2013.5
ISBN 978-7-5605-5200-2

Ⅰ.概… Ⅱ.①于…②罗…③安… Ⅲ.①概率统计-软件包-高等学校-教材 Ⅳ.O211-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第079899号

书　　名　概率统计与SPSS应用(第2版)
编　　著　于义良　罗蕴玲　安建业
责任编辑　任振国

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安明瑞印务有限公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张**15.5　**字数**286千字
版次印次　2013年5月第2版　2013年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-5200-2/O·426
定　　价　27.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前言

随着科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及与提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体公民的必修课，数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已提到教育教学改革“重中之重”的地位，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。

天津商业大学“大学数学基础课程教学团队”是天津市级教学团队，经过多年的教学研究和实践，组织具有丰富教学经验的第一线教师，于 2009 年编著出版了《概率统计与 SPSS 应用》，经过三年多的教学实践，我们对书中的内容作了订正和调整，现奉献给大家。

《概率统计与 SPSS 应用》是天津市普通高等学校本科教学质量与教学改革研究计划项目——基于应用型人才培养的大学数学综合改革与实践(津教委高[2012]32 号)的成果，是天津市“十二五”规划教材。

这部教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，“教、学、做”融为一体，内容体系整体优化，使读者实现由知识向能力的转化，比如分析、处理和解决复杂问题的能力，就业、创新和创业能力等。

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、做好数学的信心，比如常见概率分布、抽样分布基本定理、置信区间、两类错误等。

第三，以计算机为工具，传统内容与信息技术应用有机融合，注重基本知识、基本思想、基本能力的培养，对繁、难、抽象的内容，充分利用当今极为流行的 SPSS 软件来实现，比如分布函数值的计算、点估计、区间估计、假设检验、方差分析、协方差分析、相关分析、回归分析等。

总之，本书融入软件，突出技能，实用性强。内容可视化，您不再被抽象而烦

恼；计算软件化，您不再被繁难而困扰；方法现实化，您不再被无用而厌学。

书中涉及的20个演示实验和SPSS数据文件均可在“天津市大学数学精品资源网”上下载，也可以和作者联系索取，E－mail：yuyil88@126.com。

主编于义良教授是天津市高等学校首届教学名师，曾到澳大利亚La Trobe大学学习考察，亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践，他们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用，“做中学，学中悟，悟中醒，醒中行”做得非常出色。可喜的是本书恰好在这方面做了有益的尝试。

天津市教育委员会高教处、西安交通大学出版社对该项目的研究给予了热心的指导和支持，在此一并致以最诚挚的感谢。

我们期盼着本书能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和效率。

编　者

2013.05

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

生活在一个日新月异、千变万化的世界中，每个人时刻都要面对许多生活中碰到的问题。例如："明天是雨天还是晴天，是否可以出去旅游"；"明天的股市是上涨还是下跌，是买还是卖"；"下个月某空调器的销售量是多少，如何组织货源"；"今年夏季长江流域的降水量有多少，怎样组织抗洪"；"在下届奥运会中我国体育健儿能拿多少金牌，如何争取金牌总数第一"等等，这些问题的发生与发展是受诸多因素的影响，因而这些问题的结果也是不确定的，不可预知的。但是，事实证明在许多不确定问题中隐藏着一种确定性的规律。也正因为如此，人类才在不断摸索和研究中使许多以前认为不可想象的问题得到解决，人类才取得了如此辉煌的进步。N. Weiner 说："数学的伟大使命是在混沌中发现有序。"

本章的目的就是从基本问题出发，引出随机事件的概念，试图从最简单的随机现象（偶然现象）中去探求必然的规律。

1.1　随机事件

我们先做一个简单的试验：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数。

投掷骰子演示实验

显然，这个试验具有如下特点：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不只一个（出现 1 点，出现 2 点，…，出现 6 点），而究竟出现哪个结果，在试验之前不能预言；

(3) 试验之前可以预知试验中一切可能的结果（六种结果），每次试验中出现且只出现可能结果中的一个。

我们把具有上述三个特点的试验称为**随机试验(random experiment)**，简称**试验(experiment)**，记为 E。本书中所谈的试验，均为随机试验。我们就是研究随机试验中这些可能结果出现的规律。

试验中的每个可能的结果称为**样本点(sample)**,用 ω 表示,全体样本点构成的空间称为**样本空间(sample space)**,用 Ω 表示。从集合论的观点看,样本空间就是针对某试验的所有可能结果构成的全集,而样本点就是构成样本空间的元素。样本空间 Ω 的子集称为**随机事件(random event)**,简称**事件(event)**,一般用大写字母 $\boldsymbol{A,B,C,\ldots}$ 表示。我们称一事件在一次试验中出现(或发生)了,是指该次试验出现的结果(样本点)属于该事件(子集),否则称该事件没有出现(或发生)。易见 Ω 在每次试验中均要出现,故又称为**必然事件(certainty)**。Φ 在每次试验中均不出现,故称为**不可能事件(impossible event)**。

在上面掷骰子的试验中,我们设

ω_i 代表出现的点数为 $i(i=1, 2, \cdots, 6)$,则 ω_i 为样本点,且记 $A_i=\{\omega_i\}$;

B="出现的点数是 2 或者 3";

C="出现的点数大于 1 小于 5";

D="出现的点数是偶数"

则样本空间为:

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\};$$
$$B=\{\omega_2, \omega_3\};$$
$$C=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\};$$
$$D=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

显然 $A_i(i=1, 2, \cdots, 6), B, C, D$ 均为事件。而事件"出现的点数小于 7"是必定要出现的,它就是一个必然事件。实际上它包括了所有的样本点,即为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$。而事件"出现的点数大于 6"是不可能出现的,它就是一个不可能事件。实际上它不包含任何样本点,即为一个空集 Φ。

由集合和随机事件之间的关系,可得到如下的结论。

(1) $A\subset B$:A 是 B 的子集。它表示若事件 A 出现,则事件 B 一定出现。

(2)$A\cup B$(或 $A+B$):A 与 B 的并(或和)。它表示一个新的事件,即事件 A 和事件 B 至少有一个出现。同样事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件至少有一个出现。

(3)$A\cap B$(或 AB):A 与 B 的交(积)。它表示一个新的事件,即事件 A 和事件 B 同时出现。同样事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件同时出现。

(4)$A\cap B=\Phi$:它表示事件 A 和事件 B 不可能同时出现,我们称 A 与 B 为**互不相容,简称互斥(mutually exclusive events)**。

(5)$A\cap B=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$:它表示事件 A 和事件 B 出现且只出现其中一个,我们称 A 与 B 为对立,并称 B 为 A(或 A 为 B)的**对立事件(complementary**

event)，记为 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$)。

(6)$A-B$：A 与 B 的差，它表示事件 A 出现而事件 B 不出现。显然 $A-B=A\overline{B}$，同时 $B-A=B\overline{A}$.

(7)$\overline{A\cup B}$：它是事件 A 和事件 B 至少出现一个的对立事件。显然它表示事件 A 和事件 B 都不出现，即$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。同样 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。

(8)$\overline{A\cap B}$：它是事件 A 和事件 B 同时出现的对立事件。显然它表示事件 A 和事件 B 至少有一个不出现，即$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。同样 $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。

下面我们用图形(图 1.1.1)将上面的结论直观地显示出来，见图 1.1.1。

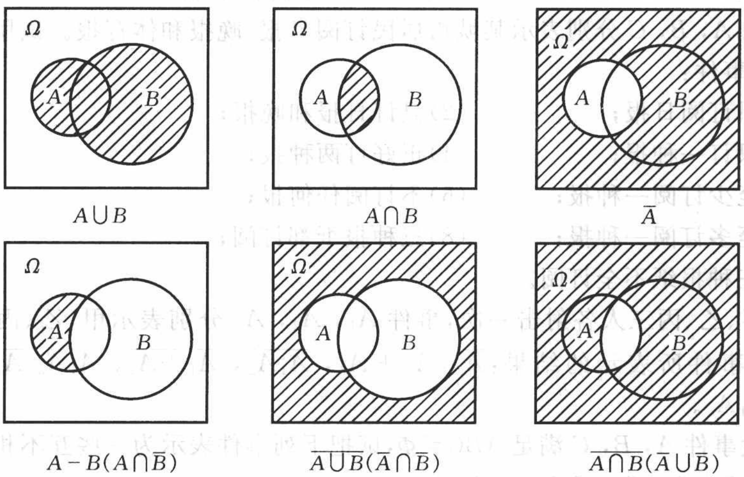


图 1.1.1

从上面的图示中，还可以得到以下一些关系：

$A\cap B\subset A$；$A-B\subset A$，且 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$AB\subset A$；$A\overline{B}$，$\overline{A}B$ 与 AB 两两互斥，$A=A\overline{B}\cup AB$，$A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup AB=A\overline{B}\cup B=B\overline{A}\cup A=A\cup(B-A)$；$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cup B}\neq\overline{A}\cup\overline{B}$，…

结合前面的试验以及字母 $\omega_i(i=1,2,\cdots,6)$，B，C，D 表示的意义，我们有

$B\subset C$；　　　　$C\cup D=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$；

$C\cap D=\{\omega_2,\omega_4\}$；$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$；

$\overline{C\cup D}=\{\omega_1,\omega_5\}$；$\overline{C\cap D}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\}$；

$C-D=\{\omega_3\}$；　　$D-C=\{\omega_6\}$

大家还可以验证其它的一些等式或不等式。

以上一些表示法，为我们今后处理某些复杂事件带来很大方便。

练习 1.1

1. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A，B，C 分别表示“第一次出现正面”，“两次出现同一面”，“至少有一次出现正面”。试写出样本空间及事件 A，B，C 中的样本点。

2. 在掷两颗骰子的试验中，事件 A，B，C，D 分别表示“点数之和为偶数”，“点数之和小于 5”，“点数相等”，“至少有一颗骰子的点数为 3”。试写出样本空间及事件 AB，$A+B$，$\overline{A}C$，BC，$A-B-C-D$ 中的样本点。

3. 以 A，B，C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报。试用 A，B，C 表示以下事件：

(1)只订阅日报；　(2)只订日报和晚报；

(3)只订一种报；　(4)正好订两种报；

(5)至少订阅一种报；　(6)不订阅任何报；

(7)至多订阅一种报；　(8)三种报纸都订阅；

(9)三种报纸不全订阅。

4. 甲、乙、丙三人各射击一次，事件 A_1，A_2，A_3 分别表示甲、乙、丙射中。试说明下列事件所表示的结果：$\overline{A}_2$，A_2+A_3，$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_1+A_2}$，$A_1A_2\overline{A}_3$，$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$。

5. 设事件 A，B，C 满足 $ABC\neq\Phi$，试把下列事件表示为一些互不相容的事件的和：$A+B+C$，$AB+C$，$B-AC$。

6. 若事件 A，B，C 满足 $A+C=B+C$，试问 $A=B$ 是否成立？举例说明。

7. 对于事件 A，B，C，试问 $A-(B-C)=(A-B)+C$ 是否成立？举例说明。

1.2 事件的概率

下面再回到原来的试验：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数。

显然，这个试验具有两个特点：

(1) 所有可能的试验结果是有限个(有限性)；

(2) 每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同(等可能性)。

我们把具有这两个特点的试验称为**古典概型(classical probability)**。

我们知道在每次试验中，出现且只出现样本空间中的一个样本点。所谓事件 A 出现，就是指试验出现事件 A 中包含的样本点。因此，在古典概型中由于样本

点出现的等可能性，事件 A 出现的可能性大小就可以用事件 A 中包含的样本点的个数占样本点总数的比例来度量。

定义 1.2.1　在古典概型中，设样本空间 Ω 中包含有 n 个样本点，则对任意事件 A，若 A 中含有 k 个样本点，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 中包含的样本点数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}$$

在掷骰子的试验中，显然有

$$P(A_i)=\frac{1}{6},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;\qquad P(B)=\frac{2}{6};$$

$$P(C)=\frac{3}{6};\ P(D)=\frac{3}{6};\qquad P(C\cup D)=\frac{4}{6};$$

$$P(C\cap D)=\frac{2}{6};\ P(\overline{B})=\frac{4}{6};\qquad P(\Omega)=\frac{6}{6}=1;$$

$$P(\Phi)=\frac{0}{6}=0$$

在计算古典概型概率中，往往要用到中学时的排列与组合的知识。

例 1.2.1　箱中装有 10 件产品，其中 1 件是次品，在 9 件合格品中有 6 件是一等品，3 件二等品。现从箱中任取 3 件，试求：① 取得 3 件产品都是一等品的概率；② 取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品的概率；③ 取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品的概率。

解　由于试验中是任取 3 件，所以这个试验是古典概型。每个样本点就是从 10 件中任取 3 件产品构成的集合，与顺序无关，故样本空间中样本点的总数为 C_{10}^3。

① 设 A＝“取得 3 件产品都是一等品”，那么 A 中的样本点个数为 C_6^3，所以

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

② 设 B＝“取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品”，那么 B 中的样本点个数为 $C_6^1\cdot C_3^2$（这里用到了乘法原理），所以

$$P(B)=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{20}$$

③ 设 C＝“取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品”，那么事件 C 显然是由“有 2 件一等品，1 件非一等品”和“3 件都是一等品”两个事件构成，所以 C 中的样本点个数为 $C_6^2\cdot C_4^1+C_6^3$（这里又用到了加法原理），那么

$$P(C)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$$

生活中还有很多问题并不具有古典概型的两个特点，例如投掷的是一颗不均

匀的骰子，那么样本空间中的 6 个样本点出现的可能性就不相等了，因此计算其中的一些事件的概率时就不能再用古典概型的公式了。如何解决这类问题呢？我们最常用也最直接的办法就是反复掷这颗骰子（例如做了 n 次试验），记下所关心的事件 A 在这 n 次试验中出现的次数（例如出现了 μ 次），比值 $\frac{\mu}{n}$（即事件 A 在这 n 次试验中出现的频数）随着试验次数 n 的增大而越来越接近某个数值 p（这被称为频率的稳定性），那么我们就称数值 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$，有的书上称此为事件概率的统计定义. 但是数值 p 是个理论上的数，在有限次的试验中很难求得。一般就用 $\frac{\mu}{n}$ 作为 $P(A)$ 的近似值，即 $P(A)\approx\frac{\mu}{n}$。

上面我们介绍了两种计算随机事件概率的方法。实际上由于问题的不同以及处理问题的角度不同，还有许多计算随机事件概率的方法，但是不管用什么方法计算概率，它们都要求具有下面三个基本性质：

（1）**非负性（nonnegativity）**：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）**规范性（normativity）**：$P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$；

（3）**可列可加性（additivity）**：若 $A_i(i=1, 2, \cdots)$ 是两两互不相容的事件（即 $A_iA_j=\Phi,\ i\neq j$），则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$。

以上三个性质也被称为**概率的公理化定义（axiomatized definition）**。即对任意事件 A，定义实函数 $P(A)$，如果此实函数同时满足上述三个性质（或称三条公理），那么就称 $P(A)$ 为 A 的概率。

由此公理化定义可以推出以下一些性质：

（1）（有限可加性）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

（2）（逆算公式）$P(\overline{A})=1-P(A)$；

（3）（减法公式）若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

（4）（一般减法公式）$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$；

（5）（一般加法公式）$p(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

（6）（次可加性）$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$；

（7）（单调不减性）若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$。

证 我们只证（2），（3），（5），其余几条很容易推得（在证明性质 2 时用到了性质 1）。

（2）因为 $\Omega=A\cup\overline{A}$，所以 $1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A}=P(A)+P(\overline{A})$，故 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

(3) 因为 $A\supset B$，所以 $A=(A-B)\cup B$，又因 $(A-B)\cap B=\Phi$，于是得 $P(A)=P[(A-B)\cup B]=P(A-B)+P(B)$，故 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

(5) 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，而 $A\cap(B-AB)=\Phi$，所以

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P[A\cup(B-AB)=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)\end{aligned}$$

通过上面的证明过程可以看出，善于把一个事件分解成互斥事件是一个常用的技巧。

例 1.2.2 假设 A 出现的概率为 0.6，A 与 B 都出现的概率为 0.1，A 与 B 都不出现的概率为 0.15，求：① A 出现但是 B 不出现的概率；② A 与 B 至少出现一个的概率。

解 依题意 $P(A)=0.6$，$P(AB)=0.1$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=0.15$，于是

① $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5$；

② $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=0.85$。

练习 1.2

1. 设 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，试就以下三种情况分别求 $P(B\overline{A})$：

(1)$AB=\Phi$； (2)$A\subset B$；(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$。

2. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AB)=0$，求事件 A，B，C 全不发生的概率。

3. 每个路口有红、绿、黄三色指示灯，假设各色灯的开闭是等可能的。一个人骑车经过三个路口，试求下列事件的概率：A=“三个都是红灯”=“全红”；B=“全绿”；C=“全黄”；D= “无红”；E=“无绿”；F=“三次颜色相同”；G= “颜色全不相同”；H= “颜色不全相同”。

4. 设一批产品共 100 件，其中 98 件正品，2 件次品，从中任意抽取 3 件(分三种情况：一次拿 3 件；每次拿 1 件，取后放回拿 3 次；每次拿 1 件，取后不放回拿 3 次)，试求

(1) 取出的 3 件中恰有 1 件是次品的概率；

(2) 取出的 3 件中至少有 1 件是次品的概率。

5. 从 0，1，2，…，9 中任意选出 3 个不同的数字，试求下列事件的概率：A_1={三个数字中不含 0 与 5}，A_2={三个数字中不含 0 或 5}。

6. 从 0，1，2，…，9 中任意选出 4 个不同的数字，计算它们能组成一个 4 位偶

数的概率。

7. 一个宿舍中住有 6 位同学，计算下列事件的概率：

(1)6 人中至少有 1 人生日在 10 月份的概率；

(2)6 人中恰有 4 人生日在 10 月份的概率；

(3)6 人中恰有 4 人生日在同一月份的概率。

8. 从一副扑克牌(52 张)任取 3 张(不重复)，计算取出的 3 张牌中至少有 2 张花色相同的概率。

1.3 条件概率与独立性及其应用

1. 条件概率

我们来看一个试验：箱中装有 10 件产品，其中 2 件次品，8 件正品，先后有 2 人买此产品，每人 1 件，甲先乙后。

(1)已知甲买走 1 件正品(A)，而乙在该箱中买的又是正品(B)；

(2)已知甲买走 1 件正品，乙要求另开 1 箱，且乙买的也是正品；

(3)甲急急忙忙买走 1 件产品，乙在该箱中买的是正品。

以上三种情况的结果只有一个：乙买走了正品(B)，但由于前提条件不同，因此 B 发生的概率也就不同。

下面我们先讨论第一种情况。

用 $P(B|A)$ 来表示该事件的概率。由于乙在买产品时箱中有 9 件产品，其中 2 件次品，7 件正品，于是由古典概型的公式得 $P(B|A)=\dfrac{7}{9}$。

我们再进一步讨论这个问题。由古典概型的公式易得 $P(A)=\dfrac{8}{10}$，$P(AB)=\dfrac{C_8^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^1 \cdot C_9^1}=\dfrac{8\times 7}{10\times 9}$，那么 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{7}{9}$，此时有

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

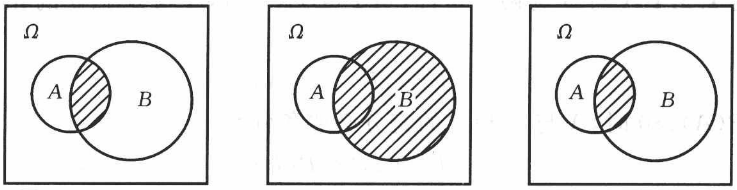
事实上，这个公式有普遍的意义。因为讨论事件($B|A$)时是在事件 A 包含的样本点内考虑事件 AB，即 $P(B|A)$ 是在缩小了的样本空间 A 中讨论的。

定义 1.3.1 对于两个事件 A 与 B，如果 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 先出现的条件下事件 B 后出现的**条件概率(conditional probability)**。

当 $A=\Omega$ 时，条件概率 $P(B|\Omega)=P(B)$。这也正反映了条件概率与无条件概率之间的区别与联系，另外 $P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 不同，$P(AB)$ 是在 Ω 中考虑 AB 的（如图 1.3.1）。



$P(B|A)$：在 A 中考虑 AB　　$P(B)$：在 Ω 中考虑 B　　$P(AB)$：在 Ω 中考虑 AB

图 1.3.1

在计算条件概率时，一般有两种方法：

(1)公式法，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A)>0$。

(2)由 $(B|A)$ 的实际意义，按古典概型公式直接计算。

由条件概率的定义很容易得到下面的公式：

当 $P(A)>0$ 时，$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$；

当 $P(B)>0$ 时，$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$；

当 $P(AB)>0$ 时，$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$

以上公式称为**乘法公式(multiplication formula)**。并在相应条件成立情况下，此结论可推广到任意有限个。即当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

下面我们先讨论第二种情况。

由于乙要求另开一箱，此时箱中仍有 10 件产品，其中 2 件次品，8 件正品，所以 $P(B|A)=\dfrac{8}{10}$。我们发现，这种情况下乙买到正品 (B) 的概率并不受甲是否买到正品 (A) 的影响，即　$P(B|A)=P(B)=\dfrac{8}{10}$。

由乘法公式即得　$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$。

2. 事件的独立性

定义 1.3.2　如果两个事件 A 与 B 满足等式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

称事件 A 与 B 是**相互独立的(mutually independent events)**，简称 **A 与 B 独立**