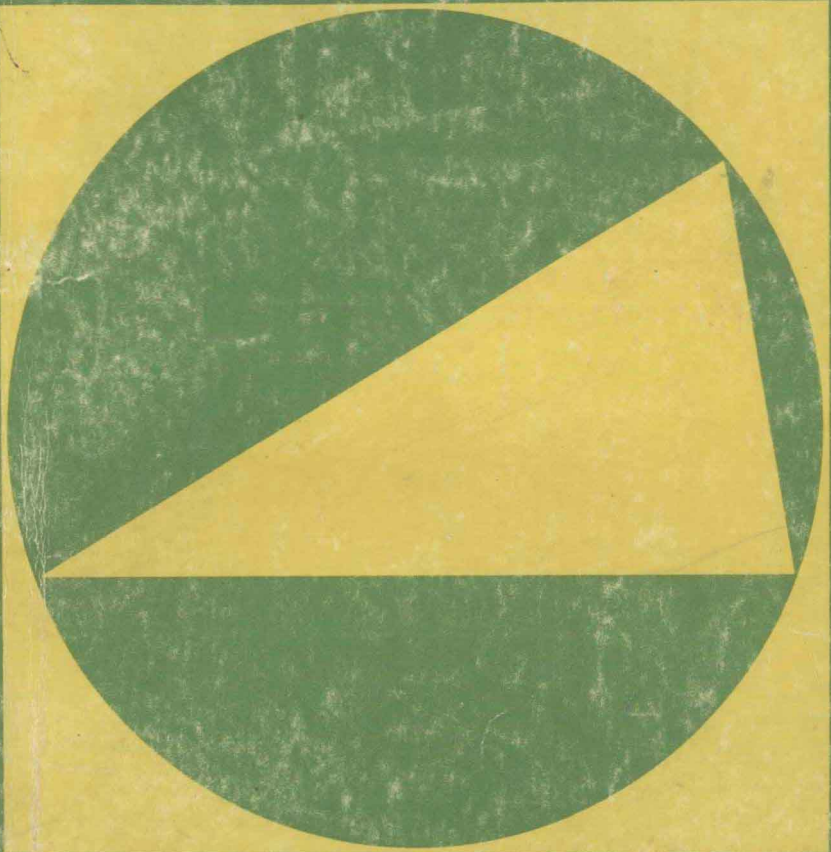


王鸿钧 王玉阁



数学教育学

(总论)

辽宁科学技术出版社

数 学 教 育 学

(总 论)

王鸿钧 王玉阁

辽宁科学技术出版社

一九八五·大连

数 学 教 育 学 (总论)

Shuxue Jiao yu xue

王鸿钧 王玉阁

辽宁科学技术出版社出版 (大连版)

大 连 北 海 印 刷 公 司 印 刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: $7 \frac{5}{8}$ 字数: 158,000

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

辽宁师范大学书稿出版编辑室供稿

责任编辑: 王法生 陈慈良 王德生

封面设计: 曹太文

责任校对: 王 莉

印数: 1—5,000

统一书号: 7288·49 (委托出版) 定价: 1.40元

前 言

遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的指导思想，结合中国数学教育的实际情况，作者对数学教育学的一般性问题进行了一些探索。本书粗略地描述了数学教育的产生、发展和数学教育学的建立问题；讨论了数学教育的改革问题；论述了中学数学教学的目的、内容、原则、方法和日常的教学工作以及基础知识的教学、数学能力的培养、数学教学中的辩证唯物主义教育等问题。本书大部分内容来自为辽宁师范大学数学系本科生编写的《数学教育学讲义》，部分内容则是近几年来作者在全国、东北地区数学教育研究会和国际数学教育学术会议上宣读或交流的论文以及作者在专业期刊上发表的论文，同时也参考了国内有关书籍和兄弟院校的有关讲义、专著以及全国、东北地区数学教育研究会上发表的论文和国外的有关著作。本书可作为高等师范院校数学系本科生的教材，也可供高等院校数学系学生、数学教育研究人员和中等学校数学教师阅读。数学教育学作为一门科学，目前尚在建立过程中，有些问题和观点有待进一步探索，加上成书时间短促，作者水平有限，错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

在成书过程中，辽宁师范大学数学系数学教育教研室的全体同志参与了讨论；辽宁师范大学科研处、书稿编辑室、

教务处和数学系给予了有益的指导和有力的支持；辽宁师范大学数学系教授梁宗巨同志、副教授张毓新同志、数学系副主任毕恩材同志和王德生、王法生、文自成等同志都提出了许多宝贵的意见；梁宗巨教授详细地审阅了第一章的原稿；孙宏安同志撰写了最后一章的初稿，王淑坤、杨騫、许平平、孟祥文、吴华、杨树林、刘贤俊等同志帮助了清稿和校稿，作者在此一并向这些同志致谢。

作 者

1985.5.7

目 录

前 言

第一章	数学教育的产生和发展·····	(1)
第一节	我国的数学教育·····	(2)
第二节	外国的数学教育·····	(16)
第二章	数学教育学的意义、对象、方法·····	(31)
第一节	数学教育学的意义·····	(31)
第二节	数学教育学的对象·····	(33)
第三节	数学教育学的相关学科·····	(36)
第四节	数学教育学的研究方法·····	(43)
第三章	中学数学教育的改革·····	(47)
第一节	国外中学数学教育的近况·····	(47)
第二节	我国中学数学教育的近况·····	(50)
第三节	改革中学数学教育是时代的 需要·····	(53)
第四节	我国数学教育现代化的重要性 与迫切性·····	(55)
第五节	改革中学数学教育，要正确处理 好几个关系·····	(56)
第四章	中学数学教学的目的与任务·····	(64)
第一节	中学数学教学目的的理论基础·····	(64)

第二节	中学数学的教学目的·····	(67)
第五章	中学数学的教学内容·····	(73)
第一节	中学数学教学大纲·····	(73)
第二节	中学数学教科书·····	(75)
第三节	确定与安排中学数学教学内容的 原则·····	(77)
第四节	中学数学的教学内容·····	(81)
第六章	中学数学的教学原则·····	(85)
第一节	逻辑的严谨性与认识的能动性 相结合的原则·····	(85)
第二节	具体与抽象相结合的原则·····	(88)
第三节	理论与应用相结合的原则·····	(91)
第四节	数量与质量相结合的原则·····	(95)
第五节	数与形相结合的原则·····	(97)
第六节	继承与发展相结合的原则·····	(98)
第七章	中学数学的教学方法·····	(100)
第一节	数学教学方法的观念·····	(100)
第二节	启发式教学法·····	(101)
第三节	讲解法、谈话法及其它教学 方法·····	(105)
第四节	改进数学教学方法的各种尝试··	(108)
第五节	数学教学方法的选择·····	(113)
第六节	学生的学习·····	(115)
第八章	中学数学的教学工作·····	(120)
第一节	备 课·····	(120)
第二节	上 课·····	(125)

第三节	课外辅导·····	(131)
第四节	作业的布置与检查·····	(134)
第五节	成绩的考核与评定·····	(137)
第六节	教学研究·····	(139)
第九章	数学基础知识的教学·····	(143)
第一节	数学的概念·····	(143)
第二节	数学概念的定义·····	(150)
第三节	数学概念的划分·····	(155)
第四节	数学概念的教学·····	(158)
第五节	数学命题的定义和结构·····	(163)
第六节	数学的推理方法·····	(167)
第七节	数学的证明·····	(176)
第八节	数学命题的教学·····	(190)
第十章	数学能力的培养·····	(197)
第一节	数学能力的意义·····	(197)
第二节	数学能力的特点·····	(202)
第三节	培养数学能力的基本方法·····	(203)
第十一章	辩证唯物主义教育·····	(213)
第一节	进行辩证唯物主义教育的重要 意义和主要方法·····	(213)
第二节	初等数学运算中的辩证思想·····	(215)
第三节	连续和离散的辩证关系·····	(220)
第四节	已知和未知的辩证关系·····	(223)
第五节	常量和变量的辩证关系·····	(226)
第六节	有限和无限的辩证关系·····	(228)
第七节	数学来源于现实世界·····	(232)

第一章 数学教育的产生和发展

数学是一门相当古老的学科，萌芽于原始社会，是人类社会生产和生活不可缺少的重要知识。教育现象可以和人类社会的生存与发展相提并论，人类社会为把生产和生活的经验，世代传递下去，就产生了教育。数学教育学是数学与教育学之间的交叉学科，就其内容来说，基本是数学的；就其结构和形式来看，具有教育学的特征。数学教育也具有相当古老的历史。几千年的数学教育史如何分期的问题，目前尚无定论。数学教育史的分期与教育史的分期，有相近之处。教育史的分期是按照原始社会、奴隶制社会、封建社会、资本主义社会、社会主义社会划分阶段的。在不同的社会里，数学教育的对象是不同的。所以，从数学教育的对象来看，数学教育史与教育史的分期是有相同之处的。可是，数学史的分期与教育史的分期是不尽相同的。数学史可划分为数学萌芽时期、初等数学时期、变量数学时期、近代数学时期、现代数学时期^{〔1〕}。从数学教育的内容来看，数学教育史的分期就不能不考虑数学史的分期问题。在学术界没有定论之前，本书仅就中国的数学教育和西方的数学教育的发展过程，作个简单介绍。

〔1〕 梁宗巨著《世界数学史简编》7页

第一节 我国的数学教育

我国是世界文明古国之一，数学教育有其悠久的历史。有的学者认为中国数学教育史可分为三个时期：（一）古代数学教育史。主要是我国封建时代的数学教育，即自春秋战国时期至鸦片战争（公元1840年）；（二）近代数学教育史，分前后两期。前期自鸦片战争至“五四”运动以前，即公元1840年至1919年；后期自“五四”运动至全国解放，即公元1919年至公元1949年；（三）现代数学教育史，即公元1949年至现在^{〔1〕}。本书只按先秦、两汉、南北朝、隋唐、宋元、明清的朝代顺序，略加说明。

一、先秦的数学教育

据考古工作者发现：十万年前河套人已在骨器上刻有菱形图纹^{〔2〕}；石器时代的陶器上装饰有几何图案；在五、六千年前的仰韶文化遗址中发现了六角形和九角形的陶环；在六千年前的半坡文化遗址中发现了圆形屋基、人字形屋架，有同心圆纹饰的陶器，绘制在陶碗里面的鱼网图，正好是十经十纬的100个方眼的网（可以推断当时人们已经掌握百以内的数，可能还是以十为进位的），在陶碗里面绘制的四条小鹿正好是对称的^{〔3〕}。

〔1〕 严敦杰《中国数学教育简史》（数学通报1965年第8、9期）

〔2〕 参考贾兰坡《河套人》

〔3〕 参见半坡文化展览馆

这些出土文物告诉我们：五、六千年以前，人们已经具有了萌芽的数学知识，而这种知识是几万年积累传递的结果。数学知识的传授，就是在生产、生活中进行的，而且也没有方法从生产和生活中，把数学教育划分出来。

距今三千至四千年前，正是我国的夏朝和商朝。关于数学和教育的状况，殷墟甲骨文提供了一些可靠的信息。殷墟甲骨文记录了十进位制数字，最大的数是三万^[1]。殷代青铜器上的各种几何图案，都很精致、很标准，已能制作简单的几何图形，并掌握了十进位制数的加减运算。显然，这种数学知识的积累和传递，就是某种形式的数学教育。在殷墟甲骨文中，多处出现“教”、“学”、“师”等字，还有一片记有“丙子卜，多子其征（作徙，义同往）学”。可以断定殷朝已有学校^[2]。《孟子》上说：“夏曰校，殷曰序，周曰庠”。至于三代学校的教学内容，据《周礼》记载，周代学校的教学科目是“六艺”。六艺是礼、乐、射、御、书、数。数就是“九数”，即是数学，这是官学中的数学教育。春秋、战国时期的私学很盛，孔子、墨子、孟子等都是办私学的代表人物，诸子百家大都带徒讲学。在他们的讲学内容中，或多或少的包含着数学教育的内容。孔子以礼乐为讲学的主要内容，把数学与射箭、驾车和书法等一道看作“技艺”，作为讲学的次要内容。《易经》中的八卦，是由长短画组成的，它可以看作一种算筹^[3]。墨子是重视自然科学的，《墨

[1] 《中国科技史稿》

[2] 北京师范大学毛礼锐等编《中国古代教育史》24页

[3] 梁宗巨《世界数学史简编》48页

经》中关于数学的问题,约有十九条,大部分都在《经上》和《经说上》中^[1]。《庄子》的极限思想“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,直至今日,仍不失为数列极限的典型例子。可见数学也是他们师弟的传授内容之一。

总之,先秦时期的数学教育,是和当时的天文、历法、音律、冶炼、水利、筑城等生产技术、军事、经济、社会生活等联系在一起,主要是为奴隶制社会的生产和生活服务的,并受奴隶制社会生产力的制约。

在先秦时期,我国就发明了筹算制度。算筹是我们的祖先在长期实践中创造的独特的计算工具。算筹起源于何时,尚待考察。可能在西周时期,数学逐渐形成一个体系,开始用算筹来记数和进行四则运算^[2],到战国时期,已相当普及了^[3],直到元明以前,算筹在我国的数学教育和数学发展中都起了重大作用。

二、秦汉的数学教育

秦汉两朝相继建立了统一的封建国家,经济繁荣,文化发达。《周髀算经》和《九章算术》陆续定稿,建立了具有中国特色的封建社会的数学体系,确立了中国封建社会数学教育的目的、内容和方法。我国古代就把数学当做天文研究和生产技术的一种工具,重视其应用的价值。所以,数学教

[1] 方孝博《墨经中的数学和物理学》中国社会科学出版社,第一章1页

[2] 钱宝琮主编《中国数学史》3页

[3] 1954年在长沙左山的战国晚期楚墓出土的文物中,就有竹制算符40支,长约12厘米,与《汉书》所记相符

育就结合在各种应用数学的科学技术的教育之中。这也正是诸子百家中无一数学专著的主要原因。直到秦汉，由于明历法，税田亩，兴水利，修长城，筑宫殿，通商贾的实际需要而长期积累起来的数学知识，反映在《九章算术》和《周髀算经》两部专著之中，并且比较集中在《九章算术》一书。关于《九章算术》和《周髀算经》的成书年代，目前尚无定论^{〔1〕}，笔者认为可能是在公元元年前后。1983年12月到1984年1月，在湖北江陵西汉墓（大约为吕后时代）出土的竹简——《算数书》，其章目、内容与《九章算术》有不少相似之处^{〔2〕}，可见，《九章算术》渊源久远。

《九章算术》计有246个应用问题，分属于九章。第一章《方田》，有38个问题，是计算田亩面积的。第二章《粟米》，有46个问题，是计算各种粮谷交换的。第三章《衰（音cuī）分》，有20个问题，是计算物资分配和摊派税款的。第四章《少广》，有24个问题，是已知田亩面积或球体积，计算田亩的长宽或求球的半径的。第五章《商功》，有28个问题，是关于筑城、垒墙、造坝、挖沟、修渠等的计算问题的。第六章《均输》，有28个问题，是按人口多少、路途远近、谷物贵贱、平均地交纳赋税和摊派民工的计算方法。第七章《盈不足》，有20个问题，是通过市场交易的实际问题，导出盈不足术（西方叫双假位法）。第八章《方程》，有18个问题，是通过粮谷、牲畜的交易问题，导出一次方程组的解法，引入负数和正数的加减运算法则。第九章

〔1〕梁宗巨《世界数学史简编》339页

〔2〕参考《文物天地》85年1期

《勾股》，有24个问题，主要是用勾股定理进行地形测量^{〔1〕}。

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，它不仅指导我国数学发展达二千余年之久，而且对世界数学的发展也有巨大影响。《九章算术》与《几何原本》东西辉映，是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉^{〔2〕}。实际上，《九章算术》是我国二千年来的标准的数学教科书。从生产和生活的实际需要出发，继承和发展数学，是我国数学教育的光辉指导思想。《九章算术》中246个问题，没有一个涉及神鬼和迷信的题目，这充分表达了我国数学研究和数学教育的朴素的唯物主义的光荣传统。重视计算和计算能力的培养也是我国数学教育的一个突出特点。

秦汉时期，数学教育开始从生产、生活中分离出来，出现了数学专著。汉代太学中虽没有设置算学博士和明算专科，但在小学中明确规定了数学科目。《内则》：“六年教之数，与方名；十年出就外傅，食宿于外，学书计。”《前汉书食货志》：“八岁入小学，学六甲，五方，书计之事。”《白虎通义》“八岁毁齿，始有识知，入学学书计。”可见，汉代规定小学设数学科目，重视数学教育，这对我国数学的继承和发展，起到了良好的作用。

三、魏晋南北朝的数学教育

从汉朝灭亡（公元220年）到隋朝统一中国（公元581

〔1〕《九章算术》参照钱宝琮《中国数学史》28~51页，梁宗巨《世界数学史简编》338~366页

〔2〕《九章算术注释》吴文俊的序言

年），这三百多年间，分裂动荡，战乱频繁，改朝换代，王权更迭的局势，不断出现。阶级矛盾和民族矛盾，错综复杂，严重地影响了生产的发展。但是，归根到底，社会还是要前进的，尤其是由于民族的迁移和融合，带来了生产技术和民族文化的交流，促进了社会生产和科学技术的进步。在此期间，数学研究和数学教育都有了新的进展。以《九章算术》为内容，培育出了赵爽、刘徽、祖冲之、祖暅等非常出色的大数学家。三国时吴人赵爽^{〔1〕}的勾股图说，用几何方法严格证明了勾股定理，并对二次方程解法提供了新的意见。刘徽是魏晋时人，他的《九章算术注》和《海岛算经》是继《九章算术》之后的杰出著作。刘徽运用自己创造的“割圆术”，求出圆周率值为3.14，是世界上第一个人。南朝刘宋时代的祖冲之求出圆周率 π ： $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ ，并得出 $\frac{22}{7}$ 为“约率”， $\frac{355}{113}$ 为“密率”。这些伟大的数学成果，在世界上独步千余年。祖暅是祖冲之的儿子，也是一位杰出的数学家，他发现了“幂势既同，则积不容异”的“祖恒公理”。在此期间，还有《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》、《缀术》等重要的数学专著问世。

在魏晋南北朝期间，官学兴废无常，但是私学始终不断，其间还间有“家学”，如祖冲之祖孙三代都研究数学。就数学教育来说，教学内容都是以《九章算术》为核心的，培育了一代又一代的数学家，不断有所创新，不断有所发

〔1〕 钱宝琮《中国数学史》57页

展。刘徽自序说：“徽幼司九章，长更详览。……探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见为之作注。”又说：

“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。”^{〔1〕}显然，刘徽是学自《九章算术》，学有心得，遂写《九章算术注》，而《海岛算经》（即重差）乃是《九章算术·勾股》的发挥和创造。《南齐书·祖冲之传》和《南史·文学传》都有祖冲之“注九章，造缀术数十篇”^{〔2〕}的记载。可见，祖冲之也是学习《九章算术》，创造《缀术》的。至于《孙子算经》、《张邱建算经》、《海岛算经》等的体例和结构都同《九章算术》一样，都是以若干应用问题的解法归类合并汇集成书的。由此可见，数学教科书在数学教育中的重大作用。

魏晋、南北朝时期的数学教育，以《九章算术》为主要内容，前后师承，代有传人，逐渐形成了具有中国特色的数学学派。为隋唐的数学发展和数学教育的普及，奠定了坚实的基础。

四、隋唐的数学教育

隋唐时期，我国封建社会经过长期分裂达到了相对统一的稳定局面。在取士方面，以科举制度代替了过去以荐举方式为主的录用人才的办法，实行以考试为主的录取人才的制度。这种科举制度在中国维持了一千三百年之久，成为封建统治阶级录取官吏的一条主要途径，起了巩固封建统治的作用。

〔1〕〔2〕 钱宝琮《中国数学史》61、85页

用。隋炀帝大业二年（公元606年）始置进士科，这便是科举制度的开始。与科举制度相适应建立了各级各类学校。隋唐科举制度都设有明算科和专门学校，用以培养数学专业人才。据目前掌握的资料，我国设置“算学博士”官职，开始于南北朝的后魏时期，具体内容尚不清楚。隋置“算学博士二人，算学助教二人，学生八十人，并隶于国子寺”^{〔1〕}。这是隋朝中央大学开设的数学专科学校。唐代规定算学生一次招考三十人，入学条件是八品以下文武官及庶人子弟。入学后分科教授，其中十五人学《缀术》和《古算经》，十五人学《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》及《周髀算经》。以上是必修科目，还有兼修科目：《记遗》、《三等数》。必修科目规定学习年限，最后通过考试，及格毕业生，朝廷委以九品以下的官职^{〔2〕}。在公元六世纪就由国家建立数学专门学校，这在世界上是个创举，因而在世界数学教育史上也是值得大书特书的。事实上，唐朝有关数学教育的制度、内容、方法，对于东方的日本、朝鲜都发生了很大的影响。唐朝建立的明算科，虽然规模不大，但其影响是深远的。

唐初王孝通为算历博士（官名），他著的《缉古算经》，是为了解决土木工程问题，其中首创求三次方程的正根的解法。隋朝筑长城、开运河的大规模工程建设，要求比前代更高的数学知识，因而《缉古算经》才应运而生。为了改善历法，

〔1〕 《隋书·百官志》

〔2〕 严敦杰《中国数学教育简史》（《数学通报》1965年8、9期）