全国新模式高考复习指导

3+2

北京四中高级教师
傅以伟　主编

中国林业出版社

数学

全国新模式高考复习指导

数　　学

北京四中高级教师
傅以伟　主编

中国林业出版社

（京）新登字 033 号

全国新模式高考复习指导
数　学
北京四中高级教师
傅以伟　主编

中国林业出版社出版（北京西城区刘海胡同 7 号）
新华书店北京发行所发行　　艺苑印刷厂印刷

787mm×1092mm 32 开本　11.75 印张　254 千字
1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数　1－5000　定价：8.00 元
ISBN 7-5038-1202-8
O·0025

前　言

为了帮助学生适应向“会考、3+2高考”模式的过渡，针对学生数学学习的状况及高考新模式的要求，在高中数学学习及复习方法上做导向性的指导，这是编写本书的意图。

对于知识的重点、难点及易错、易混淆概念的分析，力图使学生概念清楚、要求明确。

通过对典型例题的分析，力图达到思路明确，方法得当、胸中有数，从而提高分析问题和解决问题的能力，并围绕高考的重点及热点的分析，达到举一反三的目的。

参与本书编写的老师有傅以伟、王庚志、肖国友、谷丹、王玲华、王汉华、凌文伟等。

书中不妥之处，恳请读者指正。

编　者

1993年10月

出版说明

1993年，国家教委批准北京、湖南、湖北等6省、市对高考传统模式进行了改革，即减少考试科目，增大题量，注重基础知识的考查。北京等6省市的新模式只考5科，理工、文史类都考语文、数学、外语三科，理工科考生增试物理、化学二科（简称3+2），每科满分均为150分。经国家教委批准，这种新模式1994年将扩展到全国19个省、市、自治区，并还要逐步扩大。为适应高考改革出现的新形势，根据国家教委颁布的"教学大纲"和"考试说明"，特别是结合1993年高考试题的命题方向和考生的卷面分析，北京市重点中学北京四中、北京八中立即对1994年的高考复习重新做出细致安排。为使广大考生尽快适应变化了的新情况，指导考生做出正确对策，特邀请高三把关老师编写这套丛书，以满足广大应届考生的迫切需要。

本丛书使考生明确新的复习要求，熟悉新的题路，更加重视基础知识的科学性、系统性、实践性，帮助学生掌握新形势下的要领和技巧，提高分析和解决问题的能力。本丛书还精选出近几年中曾有效指导学生高考复习的模拟题，知识覆盖面广，应试指导性强，使考生提高复习效果，增强实力，面临新形势，发挥出新水平。

编委会

1993年10月

目　　录

第一篇　高中代数

第一章　函　数

一、复习要求

(一)高考要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

2. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

4. 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质,并会解简单的指数方程和对数方程.

(二)复习要点

1. 集合

(1)集合的基本概念

①集合是数学中的不定义概念,其特征为:对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的、互异的,是无排列顺序的.

②集合的表示法:列举法、描述法、图示法及区间法.

③常见数集：N（自然数集）、Z（整数集）、Q（有理数集）、R（实数集）、C（复数集）.

(2)元素与集合的关系　元素及集合的关系有且仅有属于($\in$)与不属于($\notin$)这两种关系.

(3)集合与集合的关系

子集：若 $a\in A$，则 $a\in B$，即集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$.

真子集：若 $A\subseteq B$，且存在 $b\in B$ 但 $b\notin A$，称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

没有任何元素的集合叫空集，记作 ϕ. 空集是任何集合 A 的子集，即 $\phi\subseteq A$. 空集是任何非空集合 A 的真子集，即 $\phi\subset A$.

(4)集合的运算

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

补集：$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$，其中 I 为全集，$A\subseteq I$.

摩根定律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

2. 映射

(1) 映射　设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合 A、B 及从 A 到 B 的对应法则 f）叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作

$$f: A\rightarrow B$$

(2)一一映射　设 A、B 是两个集合，$f: A\rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有

原象，那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

(3)逆映射　设 $f: A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样得到的映射叫做映射 $f: A\to B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}: B\to A$.

3. 函数的概念

(1)函数定义　对于非空数集 A,B，映射 $f: A\to B$ 使得 B 中每一个元素都有原象，这样的映射 $f: A\to B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数，记作 $y=f(x)$.

(2)函数的表示法　解析法、列表法、图象法.

(3)定义域、值域的一般求法

①定义域的求法　用解析式表示的函数，其定义域就是使解析式有意义的一切自变量的值. 如：分式的分母不等于零；偶次根式的被开方数应为非负数；对数的真数为正，底数大于零且不为1；三角函数角的范围…….

对于应用题中的函数的定义域，不仅要使解析式有意义，而且要满足实际意义.

②值域的求法

(A)对于存在反函数的函数，可用求反函数定义域的方法.

(B)利用二次三项式的判别式.

(C)利用换元的方法(注意新元的取值范围).

(D)利用求二次函数在某闭区间上的值域的方法.

(E)利用已学过函数的单调性.

(F)利用基本不等式、利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有界性…….

(4)反函数　如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f: A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射，那么这个映射的逆

映射 f^{-1}：$B \to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上 $y=f(x)$的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$的图象与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称.

反函数的定义域和值域分别是原来函数的值域和定义域.

4. 函数的性质

(1)单调性　对于给定区间上的函数$f(x)$.

①如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是增函数.

②如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是减函数.

(2)奇偶性　如果对于函数$f(x)$的定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么$f(x)$是奇函数；如果对于函数$f(x)$的定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么$f(x)$是偶函数.

函数具有奇偶性的前提是其定义域一定是关于原点对称的对称域.

奇函数图象关于原点对称；偶函数图象关于 y 轴对称.

(3)周期性(见“三角函数”一章).

(4)最值　如果函数 $y=f(x)$在 x_0 的函数值 $f(x_0)$比定义域内其他所有各处的函数值都大(或都小)，则称 $f(x_0)$是函数$f(x)$的最大值(或最小值).

5. 函数图象变换

(1)当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位，得到 $y=f(x+a)$；当 $a<0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $|a|$ 个单位，得到 $y=f(x+a)$ 的图象.

(2)当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图象向上平移 a 个单位，得到 $y=f(x)+a$ 的图象；当 $a<0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图象向下平移 $|a|$ 个单位，得到 $y=f(x)+a$ 的图象.

(3)作 $y=f(x)$ 关于 y 轴的对称图形，得到 $y=f(-x)$ 的图象.

(4)作 $y=f(x)$ 关于 x 轴的对称图形，得到 $y=-f(x)$ 的图象.

(5)去掉 $y=f(x)(x<0)$ 部分的图象，并将 $y=f(x)(x>0)$ 的图象与它沿 y 轴翻转到 y 轴左侧的图象合并而成 $y=f(|x|)$ 的图象.

(6)将 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方与 x 轴上方的图象合并而成 $y=|f(x)|$ 的图象.

(7)当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 图象上的点沿 x 轴向原点压缩 $(a>1)$ 或伸长 $(0<a<1)$ a 倍，得到 $y=f(ax)$.

(8)当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 图象上的点沿 y 轴向原点压缩 $(0<a<1)$ 或伸长 $(a>1)$ 倍，得到 $y=af(x)$.

6. 几种常见函数

(1)二次函数

函数式：

一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

顶点式：$y=a(x+m)^2+n(a\neq0)$

两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$

定义域：R

图象及其性质：

当 $a>0$ 时，$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象开口向上，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}$，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，单调减，$x>-\frac{b}{2a}$ 时，单调增. 函数有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$a<0$ 时（略）.

(2)幂函数　定义：形如 $y=x^\alpha$（α 为常数）的函数为幂函数.

定义域：是使 x^α 有意义的所有的实数.

图象及基本性质：

当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为单调增函数，图象经过点(0,0)和(1,1)；

当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数，图象不过(0,0)点，但必过(1,1)点.

一般地，我们只需将 $y=x^\alpha$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数性质和图象研究清楚了即可. 对于定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上或定义在 R 上的函数，再根据函数的奇偶性即可得到函数在 $(-\infty,0)$ 及 $x=0$ 时的情况.

(3)指数函数和对数函数

①对数的概念与性质　定义：当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，若 $a^b=N$，则 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$.

运算法则（$a>0,a\neq 1,M>0,N>0$）：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\left.\begin{aligned}&\log_a M^n=n\cdot\log_a M\\&\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M\end{aligned}\right\}(n\text{ 是自然数})$$

基本性质及公式：

$$N>0;$$

$$\log_a 1=0;$$

$$\log_a a=1;$$

$$a^{\log_a N}=N;$$

$$\log_a a^b=b;$$

换底公式： $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

推论： $\log_a N=\log_{a^n} N^n$，$\log_a N=\dfrac{1}{\log_N a}$

②指数函数和对数函数　定义：形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的函数叫指数函数.

形如 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的函数叫对数函数.

基本性质：

指数函数：定义域为 R，值域为 R^+，且图象都经过 $(0,1)$，$(-1,\frac{1}{a})$，$(1,a)$ 这三个点，且以 x 轴为渐近线.

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 R 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 R 上是减函数.

对数函数：定义域为 R^+，值域为 R，且图象一定经过 $(\frac{1}{a},-1)$，$(1,0)$，$(a,1)$ 三个点，且以 y 轴为渐近线.

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$，在 R^+ 上是增函数，当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 R^+ 上是减函数.

函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 与 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

③指数方程和对数方程　指数方程和对数方程均属超越方程，其基本方法是转化为代数方程来解.

指数方程的常用解法：

(i)$a^{f(x)}=a^{g(x)}$型的可化为$f(x)=g(x)$.

(ii)$a^{f(x)}=b^{g(x)}$型的两边取对数，可化为$f(x)\cdot\lg a=g(x)\cdot\lg b$.

(iii)$f(a^x)=0$ 型的可换元，先求出 a^x 再解.

对数方程的常用解法：

(i)$\log_a f(x)=\log_a g(x)$型的可化为$f(x)=g(x)$，且$f(x)>0$，$g(x)>0$.

(ii)$\log_a f(x)=b$ 型的可化为$f(x)=a^b$.

(iii)$f(\log_a x)=b$ 型的可换元，先求出 $\log_a x$ 再解.

二、例题分析及解答

例 1　选择题

1. 已知 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 6\}$ 那么集合 $C=\{2, 7, 8\}$ 是（　）.

(A) $A\cup B$，(B) $A\cap B$，(C) $\overline{A}\cup\overline{B}$，(D) $\overline{A}\cap\overline{B}$

分析与解答：显然 $A\subset I$，$B\subset I$，$C\subset I$. 又因为 C 中每一元素 2、7、8 既不属于 A，也不属于 B；所以它们既属于 $\overline{A}$，又属于 $\overline{B}$，故 $C=\overline{A}\cap\overline{B}$. 因此答案应选择 D.

2. 如果奇函数$f(x)$在区间[3,7]上是增函数且最小值为 5，那么$f(x)$在区间[−7，−3]上是(　).

(A)增函数且最小值为−5，

(B)增函数且最大值为−5，

(C)减函数且最小值为−5，

(D)减函数且最大值为−5.

分析与解答：∵　$f(x)$是奇函数，且在区间[3,7]上是增函

数，∴ $f(x)$在其对称区间$[-7,-3]$上也是增函数. ∵ $f(3)=5$，∴ $f(-3)=-f(3)=-5$是$f(x)$在区间$[-7,-3]$上的最大值. 因此答案为(B).

3. 与函数 $y=x$ 有相同图象的一个函数是(　).

(A)$y=\sqrt{x^2}$，　　(B)$y=\dfrac{x^2}{x}$，

(C)$y=a^{\log_a x}(a>0$ 且$a\neq1)$，(D)$y=\log_a a^x(a>0$ 且$a\neq1)$.

分析与解答：$y=\sqrt{x^2}=|x|$与 $y=x$ 对应法则不同；$y=\dfrac{x^2}{x}=x(x\neq0)$和 $y=a^{\log_a x}=x(x>0)$均与 $y=x$ 定义域不同，只有 $y=\log_a a^x=x$ 与 $y=x$ 对应法则和定义域均相同，所以是同一函数，因而它们有相同的图象. 故选择 D.

4. 已知 $f(x+1)=x^2+x+1$，那么$f(x)$的最小值是(　).

(A)$\dfrac{3}{4}$，　(B)0，　(C)1，　(D)$-\dfrac{1}{4}$.

分析与解答：

令 $x+1=t$ 则 $x=t-1$　∴ $f(x+1)=f(t)=t^2-t+1$

∴ $f(x)=x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$，故选择 A.

5. 0.3^2，$\log_2 0.3$，$2^{0.3}$这三个数之间的大小顺序是(　).

(A)$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$，　(B)$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$，

(C)$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$，　(D)$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$.

分析与解答：这是一个比较三个函数值的大小的问题，不是比较同一函数的三个函数值，因此不是直接应用某一个函数的单调性得出结论. 应用幂函数、指数函数、对数函数的性质，以 0 和 1 为中间量，得出结论.

∵ $0.3^2<1$，$\log_2 0.3<0$ 又 $2^{0.3}>1$，

∴ 选择 C.

6. 若$f(x)=ax^2+(a+1)x+2$为偶函数，则函数$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上是(　).

(A)先增后减，　　(B)增函数，

(C)先减后增，　　(D)减函数.

分析与解答：∵　$f(x)$是偶函数.∴　$a+1=0$即$a=-1$. ∴　$f(x)=-x^2+2$，y轴(即直线$x=0$)是它的图象的对称轴且此抛物线开口向下. ∴　在$(-\infty,0]$上$f(x)$是增函数，在$(0,1)$上是减函数. 因此在$(-\infty,1)$上是先增后减，因此选 A.

7. 已知函数$f(x)$的定义域是$[0,+\infty)$，则函数$f[\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)]$的定义域是(　).

(A)$(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}],+\infty)$，

(B)$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

(C)$[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$，

(D)$[1,\sqrt{2}]$.

分析与解答：∵　$f(x)$的定义域为$[0,+\infty]$∴　$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\in[0,+\infty)$，且$x^2-1>0$.

即$\begin{cases}x^2-1\leqslant 1\\ x^2-1>0\end{cases}$　∴　$x\in[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$.

因此选 C.

8. 已知函数$y=\log_{a+1}(x+1)$，当$x>0$时$y<0$，则a的取值范围是(　).

(A)$a>0,a\neq1$，　　(B)$-1<a<0$，

(C)$a>0$，　　(D)$a>-1$且$a\neq0$.

分析与解答：从题$x>0$时$y<0$可知，函数$y=\log_{a+1}(x+1)$的图象是由$y=\log_{a+1}x$向左平移1个单位得到的，在$x>0$时是减函数，∴$a+1\in(0,1)$即$-1<a<0$，因此选 B.

9. 已知$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$的图象关于直线 $x-2=0$ 对称，则下列各式中正确的是(　).

(A)$f(\pi-2)=f(\pi)$，　　(B)$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f(\pi)$，

(C)$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>f(\pi)$，　　(D)$f(\pi)=f(-\pi)$.

分析与解答：(A)中的 $\pi-2$ 与 π，(D)中的 π 与 $-\pi$ 均与 $x-2=0$不中心对称，所以它们的函数值也不可能相等. 而(B)、(C)中的$\frac{\sqrt{2}}{2}$与 π 既不关于$x-2=0$对称，也不在同一单调区间内. 为了比较函数值的大小，一般地是把$\frac{\sqrt{2}}{2}$对称到$[2,+\infty)$区间上. 利用中点坐标公式，$x=4-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

根据对称性有 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 因为函数$f(x)$在$[2,+\infty)$上是减函数，又 $4-\frac{\sqrt{2}}{2}>\pi$，所以 $f\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f(\pi)$，即 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f(\pi)$，故选 B.

10. 若 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则下列各式中成立的是(　).

(A)$a^2>b^2$，　　(B)$\frac{b}{a}<1$，

(C)$\lg(a-b)>0$，　　(D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$.

分析与解答：条件中虽给出 a、$b\in R$ 且 $a>b$，但并未指出 a、b 的正负，以及 a 比 b 大多少. 因此，用特殊值法可将(A)、(B)、(C)一一排除. 而我们可将(D)视为指数函数 $y=(\frac{1}{2})^x$，因其为