应用数学译丛

卡尔曼滤波及其实时应用

（第4版）

[美] Charles K. Chui [中] Guanrong Chen 著
戴洪德 周绍磊 戴邵武 李娟 译
秦永元 审
戴邵武 校

Kalman Filtering with Real-Time Applications

(Fourth Edition)

清华大学出版社

应用数学译丛

卡尔曼滤波及其实时应用

(第4版)

[美] Charles K. Chui [中] Guanrong Chen 著
戴洪德 周绍磊 戴邵武 李娟 译

Kalman Filtering with Real-Time Applications

(Fourth Edition)

清华大学出版社
北京

内容简介

本书将理论和应用相结合，深入浅出地介绍了卡尔曼滤波的基本原理和相关的重要主题。从推导、理解卡尔曼滤波必须具备的数学知识入手，首先给出了卡尔曼滤波的直观理解和严格的正交投影证明；在此基础上，针对卡尔曼滤波在实际应用时遇到的不同问题，介绍了系统噪声和量测噪声相关时的卡尔曼滤波、有色噪声的处理方法、时不变系统的极限卡尔曼滤波、序贯算法和平方根算法、非线性系统的扩展卡尔曼滤波、高维系统的解耦卡尔曼滤波、不确定系统的区间卡尔曼滤波、随机信号多分辨分析的小波卡尔曼滤波等，并在最后一章简单列举了主体部分没有介绍到的卡尔曼滤波的一些其他重要主题；最后给出了每一章练习题的解答或提示。

本书可以作为通信、导航、自动化、电子、应用数学等专业高年级本科生或研究生的教学用书，也可作为工程技术人员的参考书。本书也适合自学，任何具备基本线性代数、概率论和系统工程知识的读者都能够理解本书。

图书在版编目(CIP)数据

卡尔曼滤波及其实时应用：第4版/(美)崔锦泰，(中)陈关荣著；戴洪德等译. --北京：清华大学出版社，2013.4

书名原文：Kalman Filtering with Real-Time Applications(4th ed)

(应用数学译丛)

ISBN 978-7-302-30907-9

Ⅰ. ①卡…　Ⅱ. ①崔… ②陈… ③戴…　Ⅲ. ①卡尔曼滤波—研究　Ⅳ. ①O211.64

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第291843号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　编：100084
社总机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　印　张：13.25　　字　数：245千字
版　　次：2013年4月第1版　　印　次：2013年4月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：32.00元

产品编号：044397-01

译者序

PREFACE

卡尔曼滤波自从20世纪60年代初问世以来，就在航空航天领域获得了非常成功的应用。随着研究的深入，卡尔曼滤波技术越来越多地应用于各个领域，如导航制导、工业控制、目标跟踪、大地测量和金融等。

大部分初学者认为卡尔曼滤波理论性较强，门槛较高，且国内专门针对卡尔曼滤波的专著相对较少，给初学者带来了较大的不便。译者在求学时有幸拜读了 Charles K. Chui 和 Guanrong Chen 两位教授的专著《Kalman Filtering with Real-Time Applications》的第3版，获益匪浅。2009年，我们欣喜地发现时隔11年后，两位教授推出了这本专著的第4版，我们觉得很有必要把这本从出版到现在经过25年时间考验和反复修订的专著介绍给国内的读者。本书深入浅出地介绍了卡尔曼滤波的基本原理和发展，以及它们的实时应用。

本书由海军航空工程学院的戴洪德、周绍磊、戴邵武和鲁东大学的李娟合作翻译，另外海军航空工程学院电子信息工程系的吴芳教员参与了第11章的翻译，博士研究生李飞参与了第7、8章的翻译，尹高阳参与了第4章的翻译。参加翻译的还有徐庆九、于进勇、吴光彬、吴晓男、支岳、曹文静、徐胜红、丛源材、吴青坡、蒋华、袁锐、赵伟等。全书由戴洪德统稿，秦永元主审，戴邵武校对。

感谢西北工业大学自动化学院的陈明教授，把我带进卡尔曼滤波的奇妙世界，并把这本书的原著介绍给我。非常感谢西北工业大学的秦永元教授百忙中对译稿进行了非常认真细致的审校。秦永元教授是研究卡尔曼滤波的著名专家，他在1998年出版的《卡尔曼滤波与组合导航原理》是该领域的经典著作，成为相关领域研究者案头必备的参考书，并于2012年6月进行了再版。感谢西北工业大学的严恭敏副教授在本书翻译过程中与译者的深入交流和有益建议。

非常感谢清华大学出版社石磊和赵从棉两位老师为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动。

在出版清样第一稿完成后，非常荣幸地联系上了原著作者之一陈关荣教授。陈教授在百忙之中对译稿进行了校对，特此致射。

虽然经过了反复的校对和修改，由于译者水平有限，难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

戴洪德

2012年12月

于烟台海军航空工程学院

第 3 版前言

FOREWORD

第 3 版的《卡尔曼滤波及其实时应用》中增加了两个关于卡尔曼滤波的新主题。为了扩展卡尔曼滤波在不确定系统中的应用，增加了区间卡尔曼滤波（第 10 章）；结合高效的小波和样条技术，介绍了小波卡尔曼滤波（第 11 章），并给出了信号估计和信号分解等领域内更为有效的计算方案。希望加入这两章能使新版本给出更完整和与时俱进的实时应用卡尔曼滤波技术。

Charles K. Chui
Guanrong Chen
1998.8

第 2 版前言

FOREWORD

除了进行较少的勘误和参考文献更新外，我们将第 1 版第 10 章的“实时系统辨识”扩展为两节，合并到第 8 章。在第 10 章包含了非常基本的小波分析介绍。虽然小波分解和重构的金字塔算法和卡尔曼滤波算法截然不同，它们仍然可以应用到时域滤波。希望在不久的将来，样条和小波可以与卡尔曼滤波相结合。

Charles K. Chui
Guanrong Chen
1990.9

第 1 版前言

FOREWORD

卡尔曼滤波作为一种最优状态估计方法，可以应用于受随机干扰的动态系统。准确地说，卡尔曼滤波器给出了一种递推算法，由实时获得的受噪声污染的离散观测数据，对系统状态进行线性、无偏及最小误差方差的最优估计。该算法已经广泛应用于工业和控制的许多领域，如视频和激光跟踪系统、卫星导航、弹道导弹轨迹估计、雷达和火力控制等。随着最近高速计算机的发展，卡尔曼滤波的应用将更加广泛，特别是在更加复杂的实时应用中。

尽管如此重要，卡尔曼滤波的数学理论以及含义并没有被很好地理解，甚至对于一些应用数学家和工程师也是如此。事实上，非常多的应用者仅仅被告知滤波算法是什么，而不知道为什么它们如此有效。本书的一个主要目标就是通过对卡尔曼滤波的数学理论和多种实时应用问题的讨论，来揭开卡尔曼滤波器的神秘面纱。

本书首先介绍了滤波方程的基本推导。该方案的优势是通过假设某些矩阵非奇异，可以很好地理解卡尔曼滤波的最优性。当然通过应用广为人知的正交投影方法，有时也称之为新息方法，可以不需要这些假设。然后将该方法进行扩展来处理系统和量测噪声相关的问题，以及有色噪声问题。本书还讨论了针对非线性系统的卡尔曼滤波及其在自适应系统辨识中的应用。此外，介绍了实时应用中的极限或稳态卡尔曼滤波理论、序贯算法和平方根算法等高效计算方法。卡尔曼滤波一个典型的应用是数字跟踪滤波器设计，如 α-β-γ 和 α-β-γ-θ 跟踪器。对于白噪声，应用卡尔曼增益的极限值来定义 α、β 和 γ 参数，对于有色噪声则为 α、β、γ 和 θ，可以将该跟踪滤波器描述为极限或稳态卡尔曼滤波器。因为最优估计的误差随着时间以指数衰减，从这个角度看，通过这些更有效的预测-校正方程得到的状态估计是近似最优的。我们还研究了一种可以得到状态向量各分量滤波方程的解耦方法。

本书的写作风格趋向于随意而非刻板式的，数学证明趋向于简单但是严谨，使得具备基本的线性代数和系统理论的任何人，无论是学生还是专家，都易于阅读。考虑到这一点，本书引入了一个预备知识章节，包含了矩阵理论、行列式、概率论和最小二乘原理。为了说明相关知识点，加强对材料的理解，或完成书中的一些证明，在每一章都配备了一定数量的练习题，并在书的末尾给出了答案或提

示。为了满足感兴趣读者进一步的研究，附录材料和参考文献也列在书尾。

本书的设计是为了达到三个目的：不仅仅适用于自学；而且适用于应用数学或工程专业大学高年级学生或一年级研究生的半学期或一学期的卡尔曼滤波课程；另外，希望本书能够成为工业或控制工程师有价值的参考资料。

第一作者要感谢美国军队研究办公室的持续资助，特别感谢白沙导弹靶场(White Sands Missile Range)的 Robert Green 的鼓励和多次深入的讨论。对于爱妻，Margaret，作者要感谢她的理解和一如既往的支持。第二作者非常感谢中山大学的陈铭俊教授将这一非常重要的研究领域介绍给作者，以及感谢他夫人 Qiyun Xian 的耐心和鼓励。

在给出有价值建议的同事中，作者要特别感谢 Andrew Chan 教授(得克萨斯 A&M)、Thomas Huang 教授(伊利诺斯)、Tomas Kailath 教授(斯坦福)。最后，非常感谢 Helmut Lotsch 博士和 Angela Lahee 博士友好的合作和帮助，以及 Springer-Verlag 编辑们的工作。

Charles K. Chui
Guanrong Chen
1987.1

符号说明

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k$	系统矩阵
$\boldsymbol{A}^c$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 Cholesky 分解时的“平方根”
$\boldsymbol{A}^u$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在上三角分解时的“平方根”
$\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_k$	控制输入矩阵
$\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}_k$	量测矩阵
$\mathrm{Cov}(X,Y)$	随机变量 X 和 Y 的协方差
$E(X)$	随机变量 X 的期望
$E(X\|Y=y)$	条件期望
$e_j,\hat{e}_j$	
$f(x)$	概率密度函数
$f(x_1,x_2)$	联合概率密度函数
$f(x_1\|x_2)$	条件概率密度函数
$\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)$	非线性向量函数
$\boldsymbol{G}$	极限卡尔曼增益矩阵
$\boldsymbol{G}_k$	卡尔曼增益矩阵
$\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{x}_k)$	非线性矩阵函数
$\boldsymbol{H}^*$	
$\boldsymbol{I}_n$	$n\times n$ 单位矩阵
$\boldsymbol{J}$	矩阵的若尔当标准型
$\boldsymbol{K}_k$	
$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$	
$\boldsymbol{M}_{A\Gamma}$	可控性矩阵
$\boldsymbol{N}_{CA}$	可观测性矩阵
$\boldsymbol{O}_{n\times m}$	$n\times m$ 阶零矩阵
$\boldsymbol{P}$	极限(误差)协方差矩阵
$\boldsymbol{P}_{k,k}$	估计(误差)协方差矩阵
$\boldsymbol{P}[i,j]$	矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第(i,j)个元素

$P(X)$	随机变量 X 的概率
$\boldsymbol{Q}_k$	随机向量 ξ_k 的方差矩阵
$\boldsymbol{R}_k$	随机向量 η_k 的方差矩阵
$\mathbf{R}^n$	列向量空间 $\boldsymbol{x}=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{S}_k$	ξ_k 和 η_k 的协方差矩阵
tr	迹
$\boldsymbol{u}_k$	在第 k 时刻的确定性控制输入
$\mathrm{Var}(X)$	随机变量 X 的方差
$\mathrm{Var}(X\|Y=y)$	条件方差
$\boldsymbol{v}_k$	观测(量测)数据
$\boldsymbol{v}^{2\#}$	
$\boldsymbol{W}_k$	权值矩阵
$\boldsymbol{w}_j$	
$(W_\psi f)(b,a)$	小波积分变换
$\boldsymbol{x}_k$	k 时刻的状态向量
$\hat{\boldsymbol{x}}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_{k\|k}$	$\boldsymbol{x}_k$ 的最优滤波估计
$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\|k-1}$	$\boldsymbol{x}_k$ 的最优预测
$\check{\boldsymbol{x}}_k$	$\boldsymbol{x}_k$ 的次优滤波估计
$\vec{\boldsymbol{x}}_k$	$\boldsymbol{x}_k$ 的近优滤波估计
$\boldsymbol{x}^*$	
$\boldsymbol{x}^\#, \boldsymbol{x}_k^\#$	
$\\|\boldsymbol{w}\\|$	$\boldsymbol{w}$ 的范数
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle$	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}$ 的内积
$Y(\boldsymbol{w}_0, \cdots, \boldsymbol{w}_r)$	向量 $\boldsymbol{w}_0, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ 的线性生成空间
$\{\boldsymbol{z}_j\}$	数据的新息序列
$\alpha, \beta, \gamma, \theta$	跟踪器参数
$\{\underline{\beta}_k\}, \{\underline{\gamma}_k\}$	白噪声序列
$\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}_k$	系统噪声矩阵
δ_{ij}	Kronecker 符号
$\underline{\varepsilon}_{k,l}, \bar{\underline{\varepsilon}}_{k,l}$	随机(噪声)向量
$\underline{\eta}_k$	(k 时刻的)量测噪声
$\underline{\xi}_k$	(k 时刻的)系统噪声
$\boldsymbol{\Phi}_{kl}$	转移矩阵
$\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	雅克比矩阵
$\partial \boldsymbol{h}/\partial \boldsymbol{x}$	雅克比矩阵

目录
CONTENTS

第 1 章

预 备 知 识

卡尔曼滤波器在工程应用中的重要性得到了广泛的认可，并且建立了严格的数学理论。本书的主要目的是全面讨论卡尔曼滤波的数学理论、计算算法及其在实时跟踪问题中的应用。

为了解释如何得到卡尔曼滤波算法，以及它有哪些优良的性能，必须应用一些矩阵理论的公式和不等式。此外，在实时应用中考虑了系统和量测噪声的统计特性，必须具备一些概率论的基本概念。本章将专门研究这些主题。

1.1 矩阵和行列式初步

用 $\mathbf{R}^n$ 表示所有列向量 $\boldsymbol{x}=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$ 的空间，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是实数。对于所有 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{x}$，如果 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一个正数，则称 $n\times n$ 的实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的：如果 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 非负，则称 $\boldsymbol{A}$ 是非负定的。如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个任意 $n\times n$ 阶实数矩阵，当 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 正定时，可以表示为

$$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$$

当 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 非负定时，可以表示为

$$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$$

首先来复习施瓦兹不等式(Schwarz inequality)：

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$$

式中，$|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{1/2}$。另外，当且仅当 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 平行时，上面的不等式变成等式，即

$$x = \lambda y \quad \text{或} \quad y = \lambda x$$

λ 为比例因子。特别地,如果 $y \neq 0$,施瓦兹不等式可以写为

$$x^T x \geqslant (y^T x)^T (y^T y)^{-1} (y^T x)$$

借助这个公式,可以将施瓦兹不等式推广到矩阵形式。

引理 1.1(矩阵施瓦兹不等式(Matrix Schwarz inequality)) 若 P 和 Q 分别是 $m \times n$ 和 $m \times l$ 矩阵,$P^T P$ 非奇异,则

$$Q^T Q \geqslant (P^T Q)^T (P^T P)^{-1} (P^T Q) \tag{1.1}$$

此外,对于某些 $m \times l$ 矩阵 S,当且仅当 $Q = PS$ 时,式(1.1)的等号成立。 ■

证明如下。

向量形式的施瓦兹不等式的证明比较简单。二次多项式①

$$(x - \lambda y)^T (x - \lambda y) \geqslant 0, \quad y \neq 0$$

关于 λ 的最小值在

$$\lambda = (y^T y)^{-1} (y^T x)$$

时得到。将该 λ 值代入上面的不等式,即得施瓦兹不等式。在矩阵形式中,考虑到

$$(Q - PS)^T (Q - PS) \geqslant 0$$

同时令

$$S = (P^T P)^{-1} (P^T Q)$$

得到

$$Q^T Q \geqslant S^T (P^T Q) + (P^T Q)^T S - S^T (P^T P) S = (P^T Q)^T (P^T P)^{-1} (P^T Q)$$

和式(1.1)相同。对于 $n \times l$ 矩阵 S,当且仅当

$$(Q - PS)^T (Q - PS) = 0$$

即 $Q = PS$ 时,该不等式的等号成立。这就完成了该引理的证明。

下面来看矩阵求逆引理:

引理 1.2(矩阵求逆引理(Matrix inversion lemma)) 令

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

式中,A_{11} 和 A_{22} 分别是 $n \times n$ 和 $m \times m$ 的非奇异子矩阵。这样,

$$(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \text{ 和 } (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

都是非奇异的,所以 A 非奇异,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

① 下式译者作了微小修订,补充了"$\geqslant 0$"。

特别地，

$$(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}+\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} \tag{1.3}$$

及

$$\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})^{-1}=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \tag{1.4}$$

更进一步有

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=(\det\boldsymbol{A}_{11})\det(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\\&=(\det\boldsymbol{A}_{22})\det(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})\end{aligned} \tag{1.5}$$ ■

证明如下。

可以将 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

取行列式，得到(1.5)式。特别地，从这里我们获得

$$\det\boldsymbol{A}\neq 0$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。接下来，注意到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})^{-1}\\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})^{-1}\end{bmatrix}$$

及

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}^{-1}$$

这样就可以得到式(1.2)的第一部分。式(1.2)的第二部分可以用同样的方法证明。式(1.3)和式(1.4)可以根据式(1.2)的相应矩阵块相等得到。

直接应用引理 1.2 可以得到下面的结果。

引理 1.3　如果 $\boldsymbol{P}\geqslant\boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\geqslant\boldsymbol{P}^{-1}>\boldsymbol{0}$。 ■

证明如下。

令 $\boldsymbol{P}(\varepsilon)=\boldsymbol{P}+\varepsilon\boldsymbol{I}$，其中 $\varepsilon>0$，则 $\boldsymbol{P}(\varepsilon)-\boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0}$。根据引理 1.2，有