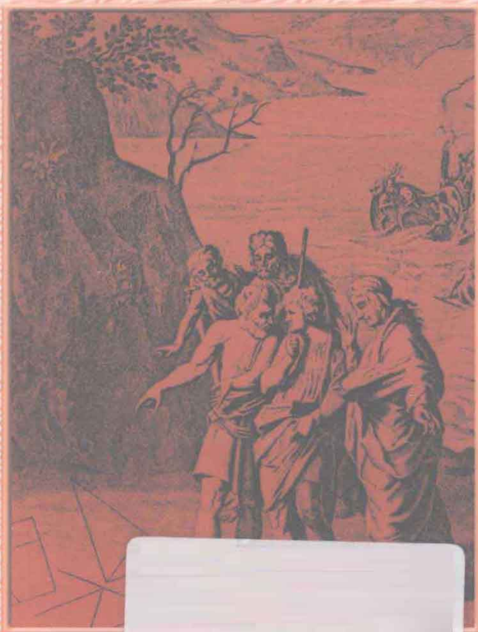
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面

——从一道全国高中数学联赛试题谈起



佩捷 施雨辰 编著

◎ 推广到 m 阶等差数列

◎ 逼近论中的 Bernstein 定理

◎ 数学家的语言——算子

◎ Bé zier 曲线与汽车设计

◎ Bernstein 多项式的多元推广

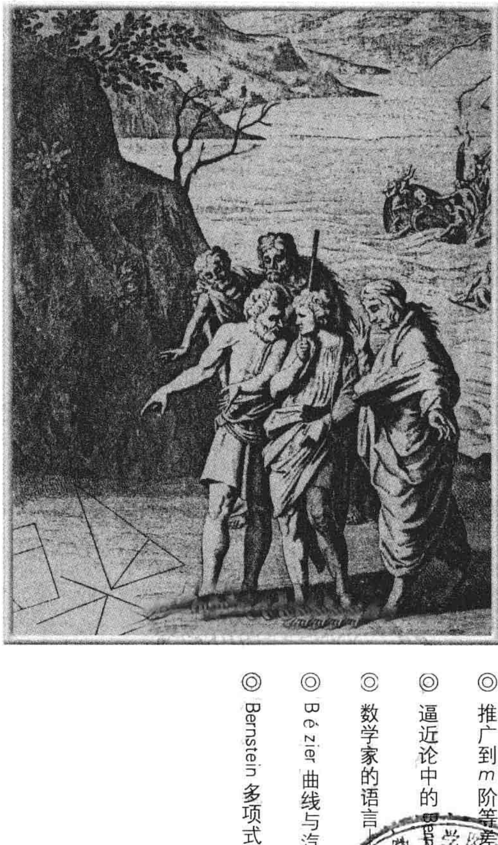
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面

——从一道全国高中数学联赛试题谈起

佩捷　施雨辰　编著



- ◎推广到 m 阶等差数列
- ◎逼近论中的 Bernstein
- ◎数学家的语言——算
- ◎Bézier 曲线与汽车设
- ◎Bernstein 多项式的多

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道全国高中数学联赛试题谈起，详细介绍了伯恩斯坦多项式和贝齐尔曲线及曲面的相关知识. 全书共分 2 章，分别为：第 1 章 Bernstein 多项式与 Bézier 曲线；第 2 章 Bernstein 多项式和保形逼近. 本书适用于数学竞赛选手、教练员及广大数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面：从一道全国高中数学联赛试题谈起/佩捷，施雨辰编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013. 2

ISBN 978－7－5603－4001－2

Ⅰ. ①伯…　Ⅱ. ①佩…　Ⅲ. ①伯恩斯坦多项式－介绍 ②曲面论－介绍　Ⅳ. ①O174. 14 ②O186. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 025936 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 12. 25　字数 127 千字
版　　次　2013 年 2 月第 1 版　2013 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4001－2
定　　价　38. 00 元

目录

第1章 Bernstein 多项式[①]与 Bézier 曲线[②]

§1 引　言

1986 年全国高中数学联赛二试题 1 为：

试题 1　已知实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，满足

$$a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

求证：对于任何自然数 n

$$\begin{aligned}P(x) = {} & a_0 C_n^0 (1-x)^n + a_1 C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \\ & a_2 C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \\ & a_{n-1} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + a_n C_n^n x^n\end{aligned}$$

是 x 的一次多项式或常数.

（注：原题条件限制 $\{a_i\}$ 不为常数列. 证明中只要证 $P(x)$ 为一次函数，是此题的一个特例.）

证明　在 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ 时，有

$$\begin{aligned}P(x) = {} & a_0 [C_n^0 (1-x)^n + \\ & C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n] = \\ & a_0 [(1-x) + x]^n = a_0\end{aligned}$$

为常数. 对于一般情况，由已知 $a_k = a_0 + kd$，d 为常数，

---

① 译为“伯恩斯坦多项式”. ——编者注

② 译为“贝齐尔曲线”. ——编者注

$k=0,1,2,\cdots,n$. 因为

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_n^0(1-x)^n+1\cdot\mathrm{C}_n^1(1-x)^{n-1}x+\cdots+\\&k\mathrm{C}_n^k(1-x)^{n-k}x^k+\cdots+n\mathrm{C}_n^nx^n=\\&n\mathrm{C}_{n-1}^0(1-x)^{n-1}x+\cdots+\\&n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}(1-x)^{n-k}x^k+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}x^n=\\&nx[\mathrm{C}_{n-1}^0(1-x)^{n-1}+\\&\mathrm{C}_{n-1}^1(1-x)^{n-2}x+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]=\\&nx[(1-x)+x]^{n-1}=nx\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(x)=\ &a_0[\mathrm{C}_n^0(1-x)^n+\mathrm{C}_n^1(1-x)^{n-1}x+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n]+\\&d[0\cdot\mathrm{C}_n^0(1-x)^n+\cdots+k\mathrm{C}_n^k(1-x)^{n-k}x^k+\cdots+\\&n\mathrm{C}_n^nx]=a_0+ndx\end{aligned}$$

为一次多项式.

这是一道背景深刻的好题,它以函数构造论中的 Bernstein 多项式及计算几何中的 Bézier 曲线为背景.

§2 同时代的两位 Bernstein

在数学史上几乎同一时期有两位同名不同国籍但同样著名的数学家 Bernstein. 一位是德国的 Bernstein Felix(1878.2.24—1956.12.3),此人生于德国哈勒,卒于瑞士苏黎世,他师从于著名数学家 Cantor,Hilbert 和 Klein.

早在 1897 年,Bernstein 就首先证明了集合的等价定理:如果集合 A 与集合 B 的一个子集等价,集合 B 也和集合 A 的一个子集等价,那么集合 A 与集合 B 等价,这是集合论的基本定理,由此可以建立基数概念.

他对数论、拉普拉斯变换、凸函数和等周问题也有贡献.

不过本节我们要介绍的是另一位 Bernstein,他就是苏联数学家 Bernstein. Sergeĭ Natanovič(1880.3.5—1968.10.26).他生于敖德萨,1899 年毕业于巴黎大学,1901 年毕业于多科工艺学校(许多法国著名数学家均出于此校).1929 年成为苏联科学院院士,他曾在列宁格勒工学院和列宁格勒大学任教授,对著名的列宁格勒数学学派影响很大.

Bernstein 的工作大体可分三部分:

① 函数逼近论方面,Bernstein 是当之无愧的开创者,引进了许多以他名字命名的重要概念,如:本节要介绍的 Bernstein 多项式、三角多项式、导数的 Bernstein 不等式,并开辟了许多新的研究方向,如多项式逼近、确定单连通域上多项式逼近的准确近似度等.

② 在微分方程领域,Bernstein 证明和涉足著名的 Hilbert 问题的第 19 和第 20 问题,创造了一种求解二阶偏微分方程边值问题的新方法(Bernstein 方法).

③ 在概率论方面,他最早提出(1917 年)并发展了概率论的公理化结构,建立了关于独立随机变量之和的中心极限定理,研究了非均匀的马尔可夫链.另外,他与 Levy,Paul Pierre(1886—1971) 在研究一维布朗扩散运动时,曾最先尝试用概率方式研究所给随机微分方程,并将它推广到多维扩散过程.今天随机微分方程已成为研究金融的重要工具,许多获诺贝尔经济奖的工作都与此有关.

他的这些工作都被收集在苏联科学院于 1952 年、

1959 年、1960 年、1964 年出版的他的共 4 卷论文集中.

由于他的巨大的贡献与成就，Bernstein 于 1911 年获比利时科学院奖，1920 年获法国科学院奖，1962 年获苏联国家奖.

现在以 Bernstein 命名的多项式是指：

设 $f(x)$ 为定义于闭区间 $[0,1]$ 上的函数，称多项式

$$B_n(f(x);x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

为函数 $f(x)$ 的 Bernstein 多项式. 有时也简记为 $B_n(f;x)$ 或 $B_n(x)$.

§3 推广到 m 阶等差数列

试题 2 还可叙述为对于一次多项式(一阶等差数列通项公式为一次)，当 $n\geqslant 1$ 时，它的 Bernstein 多项式 $B_n(f(x);x)$ 的次数为一次(而非 n 次).

一个自然会想到的问题是：可否将这一结论推广到 m 次多项式(m 阶等差数列的通项公式为 m 次)，即下述定理是否成立：

定理 1 若函数 $f(x)$ 是一个 m 次多项式，则当 $n\geqslant m$ 时，它的 Bernstein 多项式 $B_n(f(x);x)$ 的次数为 m 次(而非 n 次).

证明 显然，只需证明当 $f(x)=x^m$ 时定理成立即可，也就是要证明

$$\sum_{k=0}^{n}k^m C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

当 $n \geqslant m$ 时为一个 m 次多项式.

若把恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n$$

逐步微分 m 次且每次都乘上 z，则左方成为

$$\sum_{p=0}^{n} k^m C_n^k z^k$$

右边可得到一个可以被 $(1+z)^{n-m}$ 除尽的 n 次多项式.

这可以对 m 用归纳法来验证，即有

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k z^k = (1+z)^{n-m} P_m(z) \tag{1}$$

令 $z = \dfrac{x}{1-x}$，并乘上 $(1-x)^n$，则式(1) 可变为

$$\sum_{k=0}^{n} k_m C_n^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^m P_m\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

亦即为一个 m 次多项式.

利用定理 1 可得到一个很有用的结论：

对于一切实数 x，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x^m;x) = x^m$.

而这一结果可以直接推出一个重要定理，即 Kantorovič1931 年得到的一条定理：

若 $f(x)$ 为整函数，则它的 Bernstein 多项式 $B_n(f(x);x)$ 在整个数轴上都收敛于 $f(x)$.

§4　另一个推广

原石家庄师专的王玉怀先生将这个试题作了另一个推广：

定理 2　已知实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

求证:对于任何自然数 n

$$P(x)=a_0^2\mathrm{C}_n^0(1-x)^n+a_1^2\mathrm{C}_n^1x(1-x)^{n-1}+$$
$$a_2^2\mathrm{C}_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+$$
$$a_{n-1}^2\mathrm{C}_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_n^2\mathrm{C}_n^1x^n$$

是 x 的次数不超过 2 的多项式.

证明 设

$$P(x)=Ax^2+Bx+C$$

用 $x=0$ 代入,得

$$C=P(0)=a_0^2\mathrm{C}_0^1=a_0^2$$

再用 $x=1$ 代入,得

$$A+B+C=P(1)=a_n^2$$

即

$$A+B+a_0^2=a_n^2$$

或

$$A+B=a_n^2-a_0^2$$

由题设条件 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列,因此

$$a_n=a_0+n(a_1-a_0) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

所以

$$A+B=[a_0+n(a_1-a_0)]^2-a_0^2$$

整理,得

$$A+B=n^2(a_1-a_0)^2+2n(a_1-a_0)a_0 \qquad (2)$$

又

$$P'(x)=2Ax+B$$

$$P'(x)=na_0^2\mathrm{C}_n^0(1-x)^{n-1}(-1)+a_1^2\mathrm{C}_n^1(1-x)^{n-1}+$$
$$(n-1)a_1^2\mathrm{C}_n^1x(1-x)^{n-2}(-1)+\cdots+$$
$$(n-1)a_{n-1}^2\mathrm{C}_n^{n-1}x^{n-2}(1-x)+$$
$$(-1)a_{n-1}^2\mathrm{C}_n^{n-1}x^{n-1}+na_n^2\mathrm{C}_n^1x^{n-1}$$

于是,有

$$B = P(0) = n(a_1^2 - a_0^2)$$

代入式(2),得

$$A = (n^2 - n)(a_1 - a_0)^2$$

现在,需要证明

$$P(x) = (n^2 - n)(a_1 - a_0)^2 x^2 + n(a_1^2 - a_0^2)x + a_0^2 \tag{3}$$

下面用归纳法来证明:

当 $n = 1$ 时,有

$$\begin{aligned} P(x) = {} & a_0^2 \mathrm{C}_1^0 (1 - x) + a_1^2 \mathrm{C}_1^1 x = \\ & a_0^2 - a_0^2 x + a_1^2 x = \\ & (a_1^2 - a_0^2)x + a_0^2 \end{aligned}$$

因此,当 $n = 1$ 时,公式(3) 成立.

设公式对于 n 成立,进而证明对 $n + 1$ 也成立. 这时

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^2 \mathrm{C}_{n+1}^1 x^i (1 - x)^{n+1-i}$$

利用公式 $\mathrm{C}_{n+1}^i = \mathrm{C}_n^{i-1} + \mathrm{C}_n^i$,做如下推导

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \sum_{i=0}^{n+1} a_i^2 [\mathrm{C}_n^i + \mathrm{C}_n^{i-1}] x^i (1 - x)^{n+1-i} = \\ & \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \mathrm{C}_n^i x^i (1 - x)^{n+1-i} + \\ & \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \mathrm{C}_n^{i-1} x^i (1 - x)^{n+1-i} = \\ & (1 - x) \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \mathrm{C}_n^i x^i (1 - x)^{n-i} + \\ & x \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \mathrm{C}_n^{i-1} x^{i-1} (1 - x)^{n-(i-1)} \end{aligned}$$

在最后一个和式中,用 i 来代替 $i - 1$,得

$$P(x)=(1-x)\sum_{i=0}^{n}a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i}+$$
$$x\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} \qquad (4)$$

注意到

$$a_{i+1}=a_i+(a_1-a_0)$$

于是,有

$$\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}^2C_nx^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}[a_i+(a_1-a_0)]^2C_nx^i(1-x)^{n-i}=$$
$$\sum_{i=0}^{n}a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i}+$$
$$2(a_1-a_0)\cdot$$
$$\sum_{i=0}^{n}a_iC_n^i(1-x)^{n-i}+$$
$$(a_1-a_0)^2\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i(1-x)^{n-i}$$

上述第二个和式,由原试题 2 知道

$$\sum_{i=0}^{n}a_iC_n^ix^i(1-x)^{n-i}=P(x)=a_0+n(a_1-a_0)x$$
$$2(a_1-a_0)\sum_{i=0}^{n}a_iC_n^ix^i(1-x)^{n-i}=$$
$$2(a_1-a_0)[a_0+n(a_1-a_0)x]$$

又因为

$$\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i(1-n)^{n-i}=1$$

将它们代入式(4),得

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i}+$$
$$2(a_1-a_0)[a_0+n(a_1-a_0)x]x+$$
$$(a_1-a_0)^2x$$

由归纳假设可知

$$
\begin{aligned}
P(x)= & (n^2-n)(a_1-a_0)^2x^2+n(a_1^2-a_0^2)x+a_0^2+ \\
& 2(a_1-a_0)[a_0+n(a_1-a_0)x]x+(a_1-a_0)^2x= \\
& [(n^2-n)\times(a_1-a_0)^2+2n(a_1-a_2)^2]x^2+ \\
& [n(a_1^2-a_0^2)+2(a_1-a_0)a_0+(a_1-a_0)^2]x+a_0^2= \\
& [(n+1)^2-(n+1)](a_1-a_0)^2x^2+ \\
& (n+1)(a_1^2-a_0^2)x+a_0^2
\end{aligned}
$$

这说明,公式(4) 对于 $n+1$ 也成立.

§5　逼近论中的 Bernstein 定理

Bernstein 多项式的产生是出于函数逼近论的需要. 在函数逼近论中一个最基本的问题就是:能不能用结构最简单的函数 —— 多项式去逼近任意的连续函数,而具有预先给定的精确度? 1885 年德国数学家 Weierstrass, Karl(1815—1897) 对这个问题给了肯定的答案.

这是逼近论中的一个基本定理,有许多不同的证明. 前苏联著名数学家И · П · 纳唐松推崇的是基于 Bernstein 定理的证明.

Bernstein 证明了:若 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续,则对于 x 一致有$\lim\limits_{n\to\infty} B_n(f(x);x)=f(x)$.

其实对于区间$[0,1]$ 来说,Bernstein 定理与 Weierstrass 定理是等同的,并且它要优于后者. 因为它建立了完全确定的多项式 $B_n(f(x);x)$ 的形状,而后者只确认了近似多项式的存在,并未给出其结构来.

用多项式去逼近一个函数，如 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[-5,5]$，在区间$[-5,5]$上采用等距节点作 Lagrange 多项式插值. Runge(一位德国物理学家) 发现：如果节点的个数趋向于无穷，那么只有在 $|x|\leqslant 3.63\cdots$ 时，插值多项式序列才趋向于函数 $f(x)$. 在这个范围之外，那多项式序列竟是发散的！这就是著名的"Runge 现象". 为了避免此类现象的发生，我们应不拘泥于个别点上函数值的相等，而要求从整体上来说两个函数相当接近，这就是逼近理论. 我们特别希望逼近函数在很大程度上继承了被逼近函数的几何形态，这才发展出 Bernstein 定理.

Bernstein 定理的证明可以说是完全初等的，它需要两个引理.

引理 1 对于任何 x，都有

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathrm{C}_n^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}$$

证明 将恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k z^k=(z+1)^n \tag{5}$$

两端求导并乘 z，得到

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k z^k=nz(z+1)^{n-1} \tag{6}$$

将式(6) 两端再求导并乘 z，得到

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k z^k=nz(nz+1)(z+1)^{n-2} \tag{7}$$

在式(5)，(6)，(7) 中，令 $z=\frac{x}{1-x}$，并用$(1-x)^n$ 乘以式(5)，(6)，(7)，便得到三个组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(nx+1-x) \tag{10}$$

用 n^2x^2，$-2nx$，1 分别乘以式(8)，(9)，(10)，并相加得

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

再注意到

$$x(1-x) \leqslant \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

可得
$$\sum_{k=2}^{n} (k-nx)^2 C_n^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4}$$

引理 2　设 $x \in [0,1]$，且 δ 是任意正数，用 $\Delta_n(x)$ 表示整数 0，1，2，…，n 中满足不等式

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta \tag{11}$$

的那些值 k 所成的集合，则

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

证明　若 $k \in \Delta_n(x)$，由式(11)可得

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1$$

所以
$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$
$$\frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k \in \Delta_n(x)} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

如果在右方的和中，遍取 $k=0,1,2,\cdots,n$ 以求和，

则此和只可能增大. 因为当 $x \in [0,1]$ 时，所有新添的加数（对应于 $0,1,2,\cdots,n$ 中那些不含 $\Delta_n(x)$ 中的 k）都不是负的，于是由引理 1 可知引理 2 成立.

引理 2 的含义，粗略地说便是：当 n 很大时，在和 $\sum_{k=2}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ 中起主要作用的只是满足条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$$

的那些 k 值所对应的加数，而其余的项对和的值几乎没有什么贡献.

由此我们不难推断，若 $f(x)$ 连续，则当 n 很大时，它与 Bernstein 多项式 $B_n(f(x);x)$ 相差极微. 由引理 2 证明中可见，在 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ 中 $\frac{k}{n}$ 远离 x 的那些项，几乎不起什么作用，这对于多项式 $B_n(f(x);x)$ 亦是如此. 由于因子 $f(\frac{k}{n})$ 是有界的，所以在多项式 $B_n(f(x);x)$ 中，只有与 $\frac{k}{n}$ 十分靠近 x 的那些加数才是重要的，可是在这些项中，因子 $f(\frac{k}{n})$ 几乎与 $f(x)$ 无异（连续性）. 这就意味着，如果用 $f(x)$ 来代替 $f(\frac{k}{n})$ 的项，那么多项式 $B_n(f(x);x)$ 几乎没有改变. 换句话说，近似等式

$$\begin{aligned} B_n(f(x);x) &\approx \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ & f(x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ & f(x) \end{aligned}$$