

组合机构

严振英

武汉工学院研究生部

一九八五年十二月

前 言

当今之世，机器种类之多已属不可胜数。但是从机构学角度看来，却又不外是由齿轮、连杆、凸轮这样的构件和机构所组成。单一的齿轮、连杆、凸轮机构，无论在理论探讨或是生产实践方面，前人都已积累了不少的资料，取得了丰硕的成果。在这个领域里，继续研究

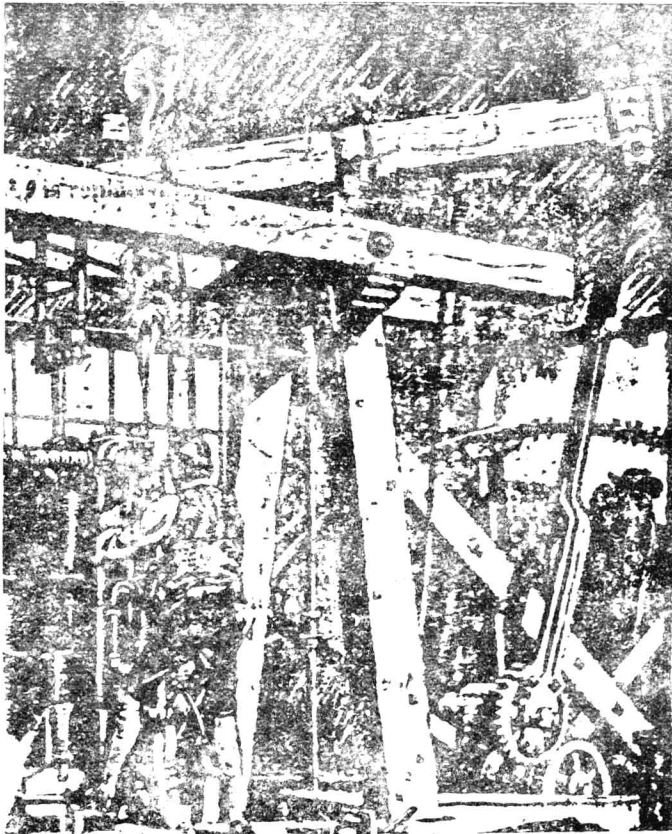


图 0—1 十八世纪时瓦特的蒸汽机（周转轮系与连杆机构的组合）

自不待言，但是在工业高度发展后对机器的要求越来越高的情况下，单一的机构很难满足要求。因此，将基本的机构组合起来，扬长避短，以期产生优越的性能，实属当务之急。

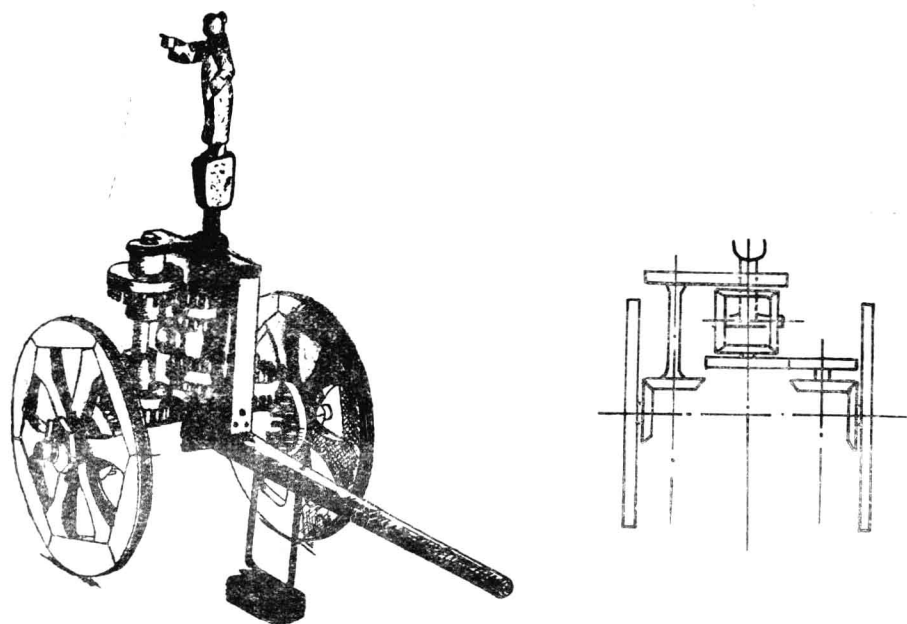


图 0—2 纪元前西汉时我国的指南车(轮系组合)
模型及其简图

必须指出，基本机构的组合——组合机构早在瓦特的蒸气机上就出现了，我国的记里鼓车和指南车就更早了，只是人们在若干个世纪的摸索后，才又旧事重提而已。本书讲述的绝大多数是平面组合机构。

目 录

前 言

第一篇 齿轮—连杆机构.....(1)

第一章 齿轮—连杆机构(多杆机构)之一

——线性方程组综合.....(2)

- § 1—1 齿轮五杆机构概述.....(2)
- § 1—2 齿轮五杆机构综合方程式.....(4)
- § 1—3 齿轮六杆机构综合.....(7)
- § 1—4 高阶综合.....(11)
- § 1—5 齿轮六杆机构分析.....(14)
- § 1—6 齿轮—连杆机构生成的路径(点的轨迹)与运动(刚体导向)生成.....(16)

第二章 齿轮—连杆机构(多杆机构)之二

——非线性方程组综合.....(20)

- § 2—1 齿轮五杆机构的位移方程式.....(20)
- § 2—2 齿轮五杆机构的四个精确位置.....(21)
- § 2—3 齿轮五杆机构的五个精确位置.....(23)
- § 2—4 齿轮六杆机构.....(25)
- § 2—5 齿轮六杆机构的五个和六个精确位置.....(26)
- § 2—6 齿轮五杆(摆线齿轮连杆)机构, 四个精确位置函数生成综合范例.....(27)

第三章 齿轮四杆机构

——齿轮五杆机构的降格.....(30)

- § 3—1 齿轮四杆机构概述.....(30)
- § 3—2 角位移曲线.....(30)
- § 3—3 三轮四杆机构特性探讨.....(33)
- § 3—4 二轮四杆机构的变异之一
——摆线曲柄机构.....(37)
- § 3—5 二轮四杆机构变异之二
——外接周转轮系与固定偏距机构.....(41)
- § 3—6 二轮四杆机构变异之三
——行星齿条与固定偏距机构.....(48)

第四章 齿轮三杆机构

——周转轮系、齿条和苏格兰轭的组合……………(50)

第二篇 凸轮—连杆机构……………(52)

凸轮—连杆机构的分类及其特性……………(63)

- § Ⅱ—1 串联的凸轮—连杆机构……………(63)
- § Ⅱ—2 双支承机构……………(65)
- § Ⅱ—3 利用四连杆机构中的连杆来驱动的凸轮机构……………(65)
- § Ⅱ—4 带固定凸轮的机构……………(69)

第一章 凸轮—连杆机构综合之一

——提高传动性能、输出摆角……………(71)

- § 1—1 前 言……………(71)
- § 1—2 为扩大输出角幅度而进行的四连杆机构综合……………(71)
- § 1—3 决定角加速度的基本概念……………(72)
- § 1—4 传动函数及其具备适当比例系数的导数……………(73)
- § 1—5 串联机构的加速度方程……………(74)
- § 1—6 作为基本构件的凸轮,其主要尺寸的决定……………(75)
- § 1—7 在正传动比区间,为设计凸轮轮廓所需的某些点的切线及其曲率圆……………(76)
- § 1—8 设计在死点位置的凸轮轮廓……………(78)
- § 1—9 回程部分加速度为零时的凸轮轮廓……………(79)

第二章 凸轮—连杆机构综合之二

——要求良好的间歇性能……………(81)

- § 2—1 概 述……………(81)
- § 2—2 双重铰链上的相对运动……………(81)
- § 2—3 设计大摆角的凸轮—连杆机构……………(83)

第三章 凸轮—连杆机构路径生成综合……………(86)

- § 3—1 凸轮—连杆机构路径生成综合……………(86)

第四章 凸轮—连杆机构在机械手上的应用……………(96)

- § 4—1 机械手的活动范围……………(96)
- § 4—2 能达到特定位置的两杆机械手综合……………(98)

§ 4—3	应用两个两杆机械手的活动区概念来生成连杆曲线·····	(100)
§ 4—4	双凸轮及单凸轮六杆机构综合举例·····	(104)

第三篇 齿轮—凸轮机构及其他机构的组合·····(105)

第一章 齿轮—凸轮机构·····(105)

§ 1—1	周转轮系、齿条和凸轮的组合·····	(105)
§ 1—2	以齿扇与摆动从动件替代齿条与直动从动件的机构·····	(108)
§ 1—3	蜗轮蜗杆与凸轮的综合(本书中的一个非平面机构特例)·····	(108)

第二章 行星轮—槽轮机构·····(111)

§ 2—1	概 述·····	(111)
§ 2—2	设 计·····	(112)
§ 2—3	小 结·····	(114)

第三章 凸轮—凸轮机构·····(115)

§ 3—1	凸轮—凸轮函数发生器·····	(115)
-------	-----------------	-------

第四章 槽轮—槽轮串联机构·····(117)

§ 4—1	前 言·····	(117)
§ 4—2	输出角速度·····	(117)
§ 4—3	输出角加速度·····	(118)
§ 4—4	在(间歇式)输出运动之始末,角加速度为零之条件·····	(119)
§ 4—5	运动与停歇·····	(121)

后 记·····(123)

组合机构的定义·····(123)

组合机构的功能·····(123)

组合机构的研究工具·····(123)

几点说明·····(124)

附 录·····(125)

〔1〕 *Freudenstein* (位移) 方程·····(125)

〔2〕 按四个精确位置设计平面四连杆机构
——非线性方程组综合·····(126)

〔3〕 赛氏 (*Sylvester*) 消元法·····(129)

〔4〕 串联机构的通用加速度方程·····(131)

参考书目·····(133)

第一篇 齿轮-连杆机构

在组合机构中，齿轮-连杆机构的应用最广，对此的研究也最多。它的产生是由于平面四杆机构性能的不足。下面仅就三个方面来谈。

(1) 综合平面四杆机构时，如两连架杆有：

(i) 三个对应位置时，可用相应的三个位移方程式(即 *Freudenstein's Equation*)求解〔I〕*；

(ii) 四个或五个对应位置时，则除了相应的四个或五个位移方程式外，还需补充非线性的相容方程式，方能求解〔II〕。

(2) 平面四杆机构仅仅可作有限的简单的变速、停歇和反向，如不等长双曲柄机构和曲柄摇杆机构那样；

(3) 平面四杆机构产生的各式连杆曲线经 *Hrones* 和 *Nelson* 两氏按杆件之间不同的长度比例系列，借助电子技术绘制了大约7000条曲线；

而齿轮-连杆机构则可以：

(1) 将精确位置数增多；

(2) 比较方便地提供变速、停歇和反向；

(3) 绘制无数变化多端的连杆曲线。

* 凡遇〔〕，即可在附录中对号找到有关内容，下同

第一章 齿轮—连杆机构（多杆机构）之一

——线性方程组综合

§ 1—1 齿轮五杆机构概述

齿轮五杆机构是齿轮—连杆机构的基础。它的简化和扩展，便是齿轮四杆机构和齿轮六杆机构等。

虽然机构可以是多自由度和多环的，但是我们还是以—一个自由度单环的机构为基础来研究。

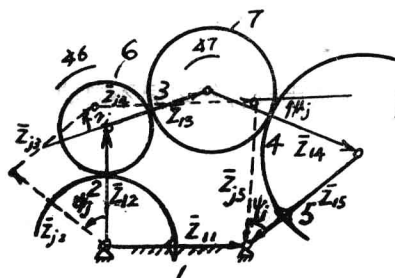


图 1—1 所示为齿轮五杆机构。轮 1、轮 5 分别与机架 1、输出杆 5 固结，轮 6 与轮 7 均为惰轮。

按机构自由度计算公式

$$F = 3(N - 1) - 2P_l - P_h$$

计算(其中 F 、 N 、 P_l 、 P_h 分别为自由度，构件数、低副数、高副数)，得

$$F = 3(7 - 1) - 2 \times 7 - 1 \times 3 = 1$$

此机构属于一个自由度。如欲使此机构在某个给定范

图 1—1 齿轮五杆机构 围内具有

$$y = f(x)$$

的关系，则应使输入杆的转角 ϕ 与输出杆的转角 ψ 成对应的关系

$$\psi = f(\phi)$$

今以一个封闭的向量五边形(单环)表示此机构。 $\bar{Z}_{11}$ 、 $\bar{Z}_{12}$ 、 $\bar{Z}_{13}$ 、 $\bar{Z}_{14}$ 、 $\bar{Z}_{15}$ 表示机构在第一个位置时各杆的长度及方位，而在别的位置，如第 j 个位置时，则机构由 $\bar{Z}_{j1}$ 、 $\bar{Z}_{j2}$ 、 $\bar{Z}_{j3}$ 、 $\bar{Z}_{j4}$ 、 $\bar{Z}_{j5}$ 表示。

如以复数表示则，

$$\bar{Z}_{jK} = \bar{Z}_{jKx} + i\bar{Z}_{jKy}$$

如以杆 K 从位置 1 转过 α 角到位置 j ，则 $\bar{Z}_{jK}$ 也可以 $e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{1K}$ 表示。注意的是： α_j 本应写成 α_{1j} ，在本章因简化写成 α_j ； ϕ_j 、 γ_j 、 μ_j 、 ψ_j 亦然。

$e^{i\alpha_j}$ 可作为回转因子。图 1—1 中的五杆处于位置 j 时

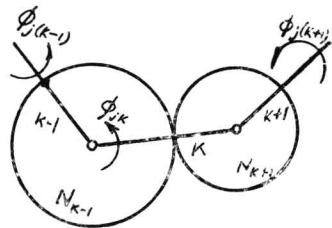
$$\begin{aligned}\bar{Z}_{j1} &= \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{j2} &= e^{i\phi_j} \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{j3} &= e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{j4} &= e^{i\mu_j} \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{j5} &= e^{i\psi_j} \bar{Z}_{15}\end{aligned}$$

式中的 ϕ 、 γ 、 μ 、 ψ 分别为杆 2、3、4、5 自位置 1 至位置 j 的转角。

图 1—2 所示为相啮合齿轮副与连杆($K-1$)、 K 、($K+1$)。相应齿数为 N_{K-1} 、 N_{K+1} 。

为了便于研究,我们先要对齿轮与有关连杆的相对转角作一番考察。试看图 1—2, 得

$$\phi_{j(K+1)} = \phi_{jK} + (\phi_{jK} - \phi_{j(K-1)}) \frac{N_{K-1}}{N_{K+1}}$$



再看图 1—1, 如果在给定的输入角 ϕ 的作用下, 轮 6 与轮 7 的绝对转角分别为 $\angle 6$ 与 $\angle 7$, 杆 3 和杆 4 的绝对转角分别为 γ 和 μ , ψ 为输出角则从图 1—3 中, 得

图 1—2 相啮合齿轮副与连杆

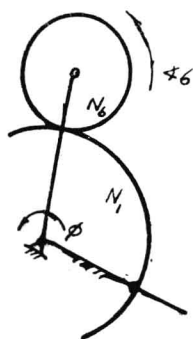


图 1—3 齿轮五杆机构输入端

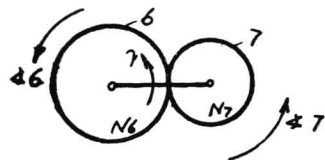


图 1—4 齿轮五杆机构。
惰轮与浮动杆

$$\begin{aligned} \angle 6 &= \frac{N_1}{N_6} \phi + \phi \\ &= \left(\frac{N_1}{N_6} + 1 \right) \phi \end{aligned}$$

从图 1—4, 得

$$\angle 7 = \gamma + (\gamma - \angle 6) \frac{N_6}{N_7}$$

从图 1—5, 得

$$\psi = \mu + (\mu - \angle 7) \frac{N_7}{N_5}$$

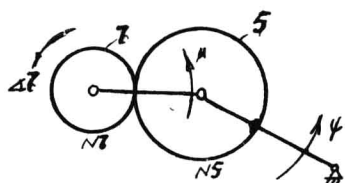


图 1—5 齿轮五杆机构输出端

今

$$\begin{aligned} \angle 7 &= \gamma + (\gamma - \angle 6) \frac{N_6}{N_7} = \gamma + \left[\gamma - \left(\frac{N_1}{N_6} + 1 \right) \phi \right] \frac{N_6}{N_7} \\ &= \gamma + \gamma \frac{N_6}{N_7} - \frac{N_1}{N_7} \phi - \frac{N_6}{N_7} \phi \\ \psi &= \mu + (\mu - \angle 7) \frac{N_7}{N_5} = \mu + \left[\mu - \left(\gamma + \gamma \frac{N_6}{N_7} - \frac{N_1}{N_7} \phi - \frac{N_6}{N_7} \phi \right) \right] \frac{N_7}{N_5} \\ &= \mu + \mu \frac{N_7}{N_5} - \gamma \frac{N_7}{N_5} - \gamma \frac{N_6}{N_5} + \phi \frac{N_1}{N_5} + \phi \frac{N_6}{N_5} \\ &= \mu \left(1 + \frac{N_7}{N_5} \right) - \gamma \left(\frac{N_7 + N_6}{N_5} \right) + \phi \left(\frac{N_1 + N_6}{N_5} \right) \end{aligned}$$

可见 ψ 、 ϕ 、 μ 、 γ 和齿数比密切相关, 而惰轮的转角 $\angle 6$ 与 $\angle 7$ 则消失不见。由于 ψ 与 ϕ 有 $\psi = f(\phi)$ 的关系, 是已知的, 那末在齿数比确定的条件下, 只要任意选定一个 γ , μ 也就迎刃而解了。

为了方便起见, 设

$$Q = \left(1 + \frac{N_7}{N_5}\right), \quad R = \left(\frac{N_7 + N_6}{N_5}\right), \quad S = \frac{N_1 + N_6}{N_5},$$

则

$$\psi = \mu Q - \gamma R + \phi S$$

$$\mu = \frac{1}{Q}(\psi + \gamma R - \phi S)$$

§ 1—2 齿轮五杆机构综合方程式

机构在位置 j 时的闭环向量可以写成

$$\overline{Z}_{12} e^{i\phi_j} + \overline{Z}_{13} e^{i\gamma_j} + \overline{Z}_{14} e^{i\mu_j} + \overline{Z}_{15} e^{i\psi_j} = \overline{Z}_{11} = 1$$

把 $\overline{Z}_{11}$ 定为 1, 纯粹是为了方便。我们还可以改写成实部和虚部两个方程式。

$$Z_{12x} \cos \phi_j + Z_{13x} \cos \gamma_j + Z_{14x} \cos \mu_j + Z_{15x} \cos \psi_j - (Z_{12y} \sin \phi_j + Z_{13y} \sin \gamma_j + Z_{14y} \sin \mu_j + Z_{15y} \sin \psi_j) = 1$$

$$Z_{12x} \sin \phi_j + Z_{13x} \sin \gamma_j + Z_{14x} \sin \mu_j + Z_{15x} \sin \psi_j + Z_{12y} \cos \phi_j + Z_{13y} \cos \gamma_j + Z_{14y} \cos \mu_j + Z_{15y} \cos \psi_j = 0$$

如果给定齿数比、输入转角及输出转角量程 R_ϕ 与 R_ψ 的话, 我们就可探讨机构的精确位置了。

表 1—1 齿轮五杆机构(函数发生器)

精确位置数	方程数	未知数及其个数	任选未知数个数
1	2	$\overline{Z}_{12}$ 、 $\overline{Z}_{13}$ 、 $\overline{Z}_{14}$ 、 $\overline{Z}_{15}$, 8	6
2	4	同上加 γ_2 , 9	5
3	6	同上加 γ_3 , 10	4
4	8	同上加 γ_4 , 11	3
5	10	同上加 γ_5 , 12	2
6	12	同上加 γ_6 , 13	1
7	14	同上加 γ_7 , 14	0

如果我们将齿数比及输入、输出转角量程已作为待定的未知数, 那末我们将能把精确位置数提高到 12。不过这是指采用双联式中间惰轮来说的。如果我们采用如图 1—4 那种单一式中间惰轮, 齿数比必将受制约如下:

$$\frac{N_6 + N_7}{N_1 + N_6} = \frac{Z_{13}}{Z_{12}}, \quad \frac{N_7 + N_5}{N_1 + N_6} = \frac{Z_{14}}{Z_{12}};$$

精确位置限定为 10。

考察四个精确位置得知: 在选定任选的三个未知参数 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 的数值后, 八个线性方程正好解出八个未知数。

对超过四个精确位置的情况必须增添相应的非线性方程来解出任意选定之外的 γ 。这是相当繁琐的。

今将机构的四个有限分隔的零阶精确点综合方程以矩阵形式列出如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\alpha_2} & e^{i\gamma_2} & e^{i\mu_2} & e^{i\psi_2} \\ e^{i\alpha_3} & e^{i\gamma_3} & e^{i\mu_3} & e^{i\psi_3} \\ e^{i\alpha_4} & e^{i\gamma_4} & e^{i\mu_4} & e^{i\psi_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

变动 γ_2 、 γ_3 、 γ_4 以及选用不同的齿数比、输出输入转角, 可以得到一系列的解。

[例 1-1]

设设计一函数发生器 $y = tqx$, $0 \leq x \leq 45^\circ$, 要求四个精确位置。

解: 采用 *Chebyshev* 间隔法公式

$$x_k = \frac{1}{2}(x_0 + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_0) \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

来计算, 式中 $k = 1, 2, \dots, n$, 本例的 n 为 4, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 45^\circ$

$$x_1 = 22.5^\circ - 22.5^\circ \cos(22.5^\circ) = 1.712711^\circ$$

$$x_2 = 22.5^\circ - 22.5^\circ \cos(67.5^\circ) = 13.889623^\circ$$

$$x_3 = 22.5^\circ + 22.5^\circ \cos(67.5^\circ) = 31.110377^\circ$$

$$x_4 = 22.5^\circ + 22.5^\circ \cos(22.5^\circ) = 43.387259^\circ$$

$$y_1 = tg(x_1) = 0.029901$$

$$y_2 = tg(x_2) = 0.247283$$

$$y_3 = tg(x_3) = 0.603486$$

$$y_4 = tg(x_4) = 0.941934$$

设 输入杆转角量程 $R_\varphi = 90^\circ$,

输出杆转角量程 $R_\psi = 90^\circ$ 。

据此, 即可用下面的两个式子求出从精确位置 1 到精确位置 j 的相应转角。

$$\phi_j = \frac{x_j - x_1}{\Delta x} R_\varphi = \frac{x_j - x_1}{45^\circ} (90^\circ) = 2(x_j - x_1)$$

$$\psi_j = \frac{y_j - y_1}{\Delta y} R_\psi = \frac{y_j - y_1}{1} (90^\circ) = 90^\circ(y_j - y_1)$$

上两式中的 Δx 及 Δy 分别为 x 及 y 的量程。

$$\phi_2 = 24.353824^\circ \quad \psi_2 = 19.564380^\circ$$

$$\phi_3 = 58.795332^\circ \quad \psi_3 = 51.622650^\circ$$

$$\phi_4 = 83.149156^\circ \quad \psi_4 = 82.082970^\circ$$

将 (1-1) 式改写成下式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \phi_2 + i \sin \phi_2 & \cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2 & \cos \mu_2 + i \sin \mu_2 & \cos \psi_2 + i \sin \psi_2 \\ \cos \phi_3 + i \sin \phi_3 & \cos \gamma_3 + i \sin \gamma_3 & \cos \mu_3 + i \sin \mu_3 & \cos \psi_3 + i \sin \psi_3 \\ \cos \phi_4 + i \sin \phi_4 & \cos \gamma_4 + i \sin \gamma_4 & \cos \mu_4 + i \sin \mu_4 & \cos \psi_4 + i \sin \psi_4 \end{pmatrix}$$

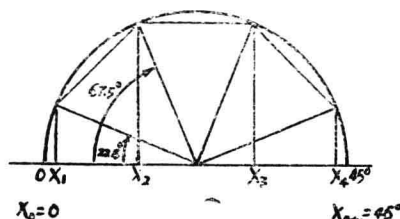


图 1-6 用 *Chebyshev* 间隔法选定四个精确位置的几何图形

$$\cdot \begin{pmatrix} Z_{12x} + iZ_{12y} \\ Z_{13x} + iZ_{13y} \\ Z_{14x} + iZ_{14y} \\ Z_{15x} + iZ_{15y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + io \\ 1 + io \\ 1 + io \\ 1 + io \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-2)$$

再将

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \phi_2 & \cos \gamma_2 & \cos \mu_2 & \cos \psi_2 \\ \cos \phi_3 & \cos \gamma_3 & \cos \mu_3 & \cos \psi_3 \\ \cos \phi_4 & \cos \gamma_4 & \cos \mu_4 & \cos \psi_4 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi_2 & \sin \gamma_2 & \sin \mu_2 & \sin \psi_2 \\ \sin \phi_3 & \sin \gamma_3 & \sin \mu_3 & \sin \psi_3 \\ \sin \phi_4 & \sin \gamma_4 & \sin \mu_4 & \sin \psi_4 \end{pmatrix} = B$$

则

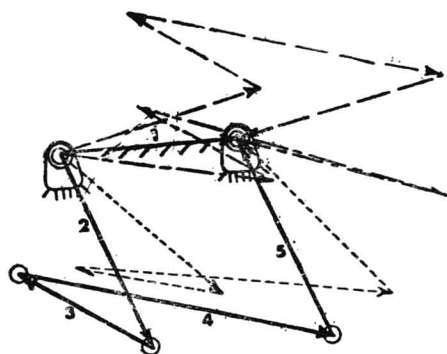


图 1—7

$$[A + iB][X + iY] = [1 + i0] \quad \dots\dots\dots (1-3)$$

将实部与虚部分列成

$$AX - BY = [1]$$

$$AY + BX = [0]$$

解之，得

$$X = (A + B A^{-1} B)^{-1} [1]$$

$$Y = -A^{-1} B (A + B A^{-1} B)^{-1} [1]$$

表 1—2 即为此例的几个实例

图 1—7 示产生正切函数的齿轮五杆机构综合图 (表 1—2 例(1)), 精确位置 1 (实线)、位置 2 (虚线)、位置 3 (点线划)、位置 4 (长划线)。齿轮未示出。

例中的齿轮在给定的比值下计算。

杆 2 的长度 = $r_1 + r_6 = 1.18$, 而

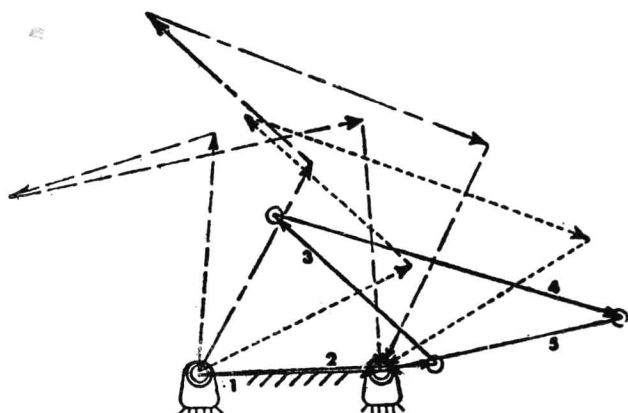


图 1—8 示表 1—2 例(2)

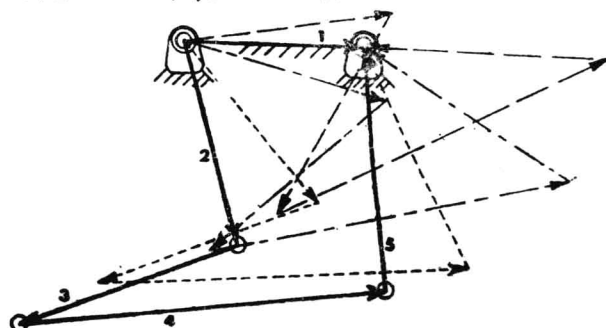


图 1—9 示表 1—2 例(3)

表 1—2 齿轮五杆机构 (用作函数发生器)

	(1)	(2)	(3)
图号	1—7	1—8	1—9
函数	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{tg} x$
范围	$0 \leq x \leq 45^\circ$	$0 \leq x \leq 45^\circ$	$0 \leq x \leq 45^\circ$
输入转角量程	$R_\varphi = 90^\circ$	$R_\varphi = 90^\circ$	$R_\varphi = 90^\circ$
输出转角量程	$R_\psi = 90^\circ$	$R_\psi = 90^\circ$	$R_\psi = 90^\circ$
齿数比	$N_1:N_6:N_7:N_5$ $3:1:2:4$	$N_1:N_6:N_7:N_5$ $3:1:2:4$	$N_1:N_6:N_7:N_5$ $3:1:2:4$
杆 $\overline{Z}_{11}$	$+1.000, +0.000i$	$+1.000, +0.000i$	$+1.000, +0.000i$
$\overline{Z}_{12}$	$+0.402, -1.115i$	$+1.335, +0.027i$	$+0.333, -1.126i$
$\overline{Z}_{13}$	$-0.709, +0.475i$	$-0.888, +0.846i$	$-1.225, -0.4821i$
$\overline{Z}_{14}$	$+1.714, -0.4688i$	$+1.919, -0.611i$	$+2.029, +0.254i$
$\overline{Z}_{15}$	$-0.408, +1.109i$	$-1.366, -0.263i$	$-0.317, +1.355i$
任取转角 γ_2	20°	0°	0°
γ_3	0°	0°	20°
γ_4	0°	60°	40°

$$\frac{N_1}{N_6} = \frac{3}{1} = \frac{r_1}{r_6}, \quad r_1 = 3r_6 \quad \therefore 4r_6 = 1.18$$

$$r_6 = 0.293$$

$$r_1 = 0.887$$

但在杆 3 的长度 $= r_6 + r_7 = 0.85$, 而又必须使

$\frac{N_6}{N_7} = \frac{1}{2}$ 时, 却发生了矛盾, 因为 r_6 是选已知的 0.293。解决这个矛盾的办法是使

用双联齿轮, 另用一个齿轮, 它的节圆半径是

$$r_6' = 0.2833, \quad \text{齿数 } N_6' = \frac{2r_6'}{m}$$

$$r_7 = 0.5666$$

以此类推, 得

$$r_7' = 0.59$$

$$r_8 = 1.18$$

§ 1—3 齿轮六杆机构综合

在齿轮六杆机构中, 四个齿轮分别与杆 1、杆 3、杆 4、杆 6 固结。

其自由度

$$F = 3(6 - 1) - 2 \times 6 - 1 \times 2 = 1$$

我们将不但探讨其有限间隔精确位置, 还将探讨无限接近精确点间的速度和加速度。

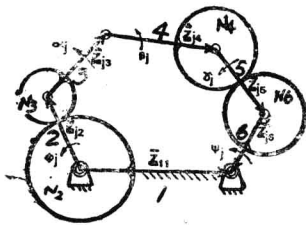


图 1—10 在位置 j 时的齿轮六杆机构。角度下标示量自位置 1 的角位移

图 1—10 示在位置 j 时的齿轮六杆机构。杆件以复数形式表示，

$$\bar{Z}_{jh} = Z_{jKx} + iZ_{jKy}.$$

各杆角位移均量自第一个精确位置，因而得出位置 1 与位置 j 的关系如下：

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{j1} &= \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{j2} &= e^{i\varphi_j} \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{j3} &= e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{j4} &= e^{i\beta_j} \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{j5} &= e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{15} \\ \bar{Z}_{j6} &= e^{i\psi_j} \bar{Z}_{16}\end{aligned}$$

由图 1—10 得出杆系的闭环向量方程

$$\bar{Z}_{j2} + \bar{Z}_{j3} + \bar{Z}_{j4} + \bar{Z}_{j5} + \bar{Z}_{j6} = \bar{Z}_{j1}$$

$$\text{或 } e^{i\varphi_j} \bar{Z}_{12} + e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{13} + e^{i\beta_j} \bar{Z}_{14} + e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{15} + e^{i\psi_j} \bar{Z}_{16} = \bar{Z}_{11}$$

以上式对 ϕ_j 求导，得一阶闭环速度综合方程

$$ie^{i\varphi_j} \dot{\bar{Z}}_{12} + i\dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{13} + i\dot{\beta}_j e^{i\beta_j} \bar{Z}_{14} + i\dot{\gamma}_j e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{15} + i\dot{\psi}_j e^{i\psi_j} \bar{Z}_{16} = 0$$

$$\text{或 } e^{i\varphi_j} \dot{\bar{Z}}_{12} + \dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{13} + \dot{\beta}_j e^{i\beta_j} \bar{Z}_{14} + \dot{\gamma}_j e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{15} + \dot{\psi}_j e^{i\psi_j} \bar{Z}_{16} = 0$$

如果要求角加速度，则得

$$\begin{aligned}-e^{i\varphi_j} \ddot{\bar{Z}}_{12} + [-(\dot{\alpha}_j)^2 + i\ddot{\alpha}_j] e^{i\alpha_j} \bar{Z}_{13} + [-(\dot{\beta}_j)^2 + i\ddot{\beta}_j] e^{i\beta_j} \bar{Z}_{14} \\ + [-(\dot{\gamma}_j)^2 + i\ddot{\gamma}_j] e^{i\gamma_j} \bar{Z}_{15} + [-(\dot{\psi}_j)^2 + i\ddot{\psi}_j] e^{i\psi_j} \bar{Z}_{16} = 0\end{aligned}$$

由于有两对齿轮制约，故可得二个关系式。

其一为齿轮 1 与 3，其齿数分别为 N_1 与 N_3 。根据相对运动关系，得

$$\alpha_j = \phi_j + \frac{N_1}{N_3} \phi_j = (1 + \frac{N_1}{N_3}) \phi_j$$

$$\text{或 } \alpha_j = m \phi_j$$

$$\text{此处 } m = (1 + \frac{N_1}{N_3}), \text{ 则 } \dot{\alpha}_j = m, \ddot{\alpha}_j = 0.$$

其二为图 1—11 所示。先假定杆 6 为静止，则

$$\beta'_j = (\gamma_j - \psi_j) + \frac{N_6}{N_4} (\gamma_j - \psi_j) = (1 + \frac{N_6}{N_4}) (\gamma_j - \psi_j)$$

$$\text{或 } \beta'_j = n (\gamma_j - \psi_j)$$

$$\text{此处 } n = (1 + \frac{N_6}{N_4}).$$

然后使杆 6 自由转动，则

$$\beta_j = \beta'_j + \psi_j = n \gamma_j - n \psi_j + \psi_j = n \gamma_j + (1 - n) \psi_j$$

$$\dot{\beta}_j = n \dot{\gamma}_j + (1 - n) \dot{\psi}_j$$

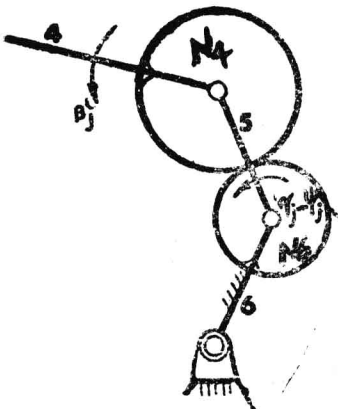


图 1—11 第二个齿轮约束方程图解

$$\ddot{\beta}_j = n \ddot{\gamma}_j + (1-n) \ddot{\psi}_j$$

这样一来，我们就可藉下面一组方程

$$\begin{aligned} \alpha_j &= m \phi_j & \beta_j &= n \gamma_j + (1-n) \psi_j \\ \dot{\alpha}_j &= m \dot{\phi}_j & \dot{\beta}_j &= n \dot{\gamma}_j + (1-n) \dot{\psi}_j \\ \ddot{\alpha}_j &= 0 & \ddot{\beta}_j &= n \ddot{\gamma}_j + (1-n) \ddot{\psi}_j \end{aligned}$$

消去了二个有关转角的参数。

如果我们要综合一个具有五个精确点的齿轮六杆机构，那么就得先规定 ϕ 及 ψ 各自从位置 1 量起的角位移。机构从位置 1 起经历了四个位置的方程是：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_2} & e^{im\varphi_2} & e^{i[n\gamma_2+(1-n)\psi_2]} & e^{i\gamma_2} & e^{i\psi_2} \\ e^{i\varphi_3} & e^{im\varphi_3} & e^{i[n\gamma_3+(1-n)\psi_3]} & e^{i\gamma_3} & e^{i\psi_3} \\ e^{i\varphi_4} & e^{im\varphi_4} & e^{i[n\gamma_4+(1-n)\psi_4]} & e^{i\gamma_4} & e^{i\psi_4} \\ e^{i\varphi_5} & e^{im\varphi_5} & e^{i[n\gamma_5+(1-n)\psi_5]} & e^{i\gamma_5} & e^{i\psi_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{15} \\ \bar{Z}_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \end{pmatrix}$$

..... (1-4)

此处可设 $\bar{Z}_{11}$ 为一单位长度，即

$$\bar{Z}_{11} = 1 + 0i$$

鉴于 $m = (1 + \frac{N_1}{N_3})$, $n = (1 + \frac{N_2}{N_4})$ ，为了方便，齿数比应力求简单。 γ_j 可以任选，因而可以获得一个广泛的解谱。这五个线性方程的求解可以方便地用矩阵、克莱默法则或高斯消去法。

[例 1-2] 设计一产生函数

$y = x^3$ 的机构，其区间为

$$0 \leq x \leq 1.$$

解：精确点的间距用 Chebyshev 间隔法的公式

$$x_k = \frac{1}{2}(x_0 + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_0) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

来计算，本例 $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 5$,

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(0 + 1) - \frac{1}{2}(1 - 0) \cos \frac{[(2)(1) - 1]\pi}{(2)(5)}$$

$$= 0.5 - 0.5 \cos \frac{\pi}{10} = 0.024470$$

$$x_2 = 0.5 - 0.5 \cos \frac{3\pi}{10} = 0.2061050$$

$$x_3 = 0.5 - 0.5 \cos \frac{\pi}{2} = 0.500000$$

$$x_4 = 0.5 - 0.5 \cos \frac{7\pi}{10} = 0.793849$$

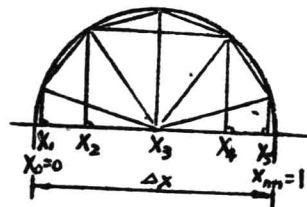


图 1-12 五个精确点的 Chebyshev 间隔法图解

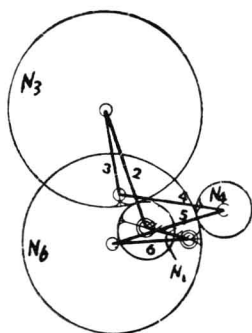


图 1—13 具有五个精确点综合的齿轮六杆机构 (表 1—3) 例 1。图示机构在第一精确位置

$$x_5 = 0.5 - 0.5 \cos \frac{9}{10} \pi = 0.9755300$$

机构在各个位置的输入输出转角, 通过

$$\phi_j = \frac{x_j - x_1}{\Delta x} R_\phi$$

$$\psi_j = \frac{y_j - y_1}{\Delta y} R_\psi$$

来计算。其中

ϕ_j ——从位置 1 到位置 j 的输入角位移

ψ_j ——从位置 1 到位置 j 的输出角位移

Δx —— x 的量程, R_ϕ ——输入角量程,

Δy —— y 的量程, R_ψ ——输出角量程。

本例的 $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$

$$\therefore \phi_j = (x_j - x_1) R_\phi$$

$$\psi_j = (y_j - y_1) R_\psi$$

变动 R_ϕ 及 R_ψ , 可以在其他条件维持不变的情况下得出一系列的解。

图 1—13 为表 1—3 中例 1 的机构在其第一精确位置时的情况。此例的 $R_\phi = 90^\circ$ 、 $R_\psi = 60^\circ$, γ_2 、 γ_3 、 γ_4 、 γ_5 分别为 4° 、 8° 、 12° 、 16° , 齿数比 $N_1:N_3$ 及 $N_4:N_5$ 均为 $1:3$ 。

表 1—3 齿轮六杆机构(作为函数发生器)

	(1)	(2)	(3)
图号	1—13	1—15	1—16
函数	$y = x^3$	$y = x^{1.5}$	$y = 1/x$
范围	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$
输入角量程	$R_\phi = 90^\circ$	$R_\phi = 90^\circ$	$R_\phi = 90^\circ$
输出角量程	$R_\psi = 60^\circ$	$R_\psi = 90^\circ$	$R_\psi = 90^\circ$
齿数比	$N_1:N_3; N_4:N_5$ $1:3; 1:3$	$N_1:N_3; N_4:N_5$ $5:1; 1:1$	$N_1:N_3; N_4:N_5$ $1:1; 3:10$
杆 $\bar{Z}_{11}$	$+1.000, +0.000i$	$+1.000, +0.000i$	$+1.000, +0.000i$
$\bar{Z}_{12}$	$-1.553, +2.403i$	$+0.807, -2.299i$	$+2.298, +0.433i$
$\bar{Z}_{13}$	$+0.742, -1.779i$	$-1.245, +1.778i$	$-0.489, +0.848i$
$\bar{Z}_{14}$	$+2.475, +0.256i$	$+0.301, +0.922i$	$-0.494, +0.765i$
$\bar{Z}_{15}$	$-2.313, -1.404i$	$-1.422, -1.148i$	$+0.717, -0.901i$
$\bar{Z}_{16}$	$+1.653, +0.529i$	$+2.559, +0.749i$	$-1.032, -1.144i$
任取转角	$\gamma_2 = 4^\circ$	$\gamma_2 = 10^\circ$	$\gamma_2 = 106^\circ$
及其	$\gamma_3 = 8^\circ$	$\gamma_3 = 20^\circ$	$\gamma_1 = 0$
导	$\gamma_4 = 12^\circ$	$\gamma_2 = 1$	$\gamma_2 = -1.6$
数	$\gamma_5 = 16^\circ$	$\gamma_3 = 1$	$\gamma_1 = -1.6$

§1-4 高阶综合

高阶综合是指在精确点位置上的角速度(一阶导数)、角加速度(二阶)、角加加速度(三阶)等综合。上文对函数发生器的综合,其实际工作情况是只在精确点位置与理论值一致,其余各点均有不同程度的误差,我们现在来探讨这个误差。还有一种在制造装配时产生的误差,我们将不予讨论。前者称为结构误差,后者称为机械误差。

如果综合的目的是在一个范围内,使误差比较均匀地分布的话,那末我们将采用在精确位置上位移值相等的措施,如果是五个位置,就用 $P-P-P-P-P$ 来代表。 $P-P$ 体现了两个有限分隔的位置。如果综合的目的是想在某个位置有高度的精确性,那末我们就要用一阶导数、二阶导数……、按要求的精度依次递增,用 PP 、 PPP 、 $PPPP$ ……表示。它的意义也体现为两个、三个、四个……无限接近的位置了。图1—14示五个点的各阶综合的七种情况。图中 $F(x)$ 示理论曲线, $f(x)$ 示实际曲线。

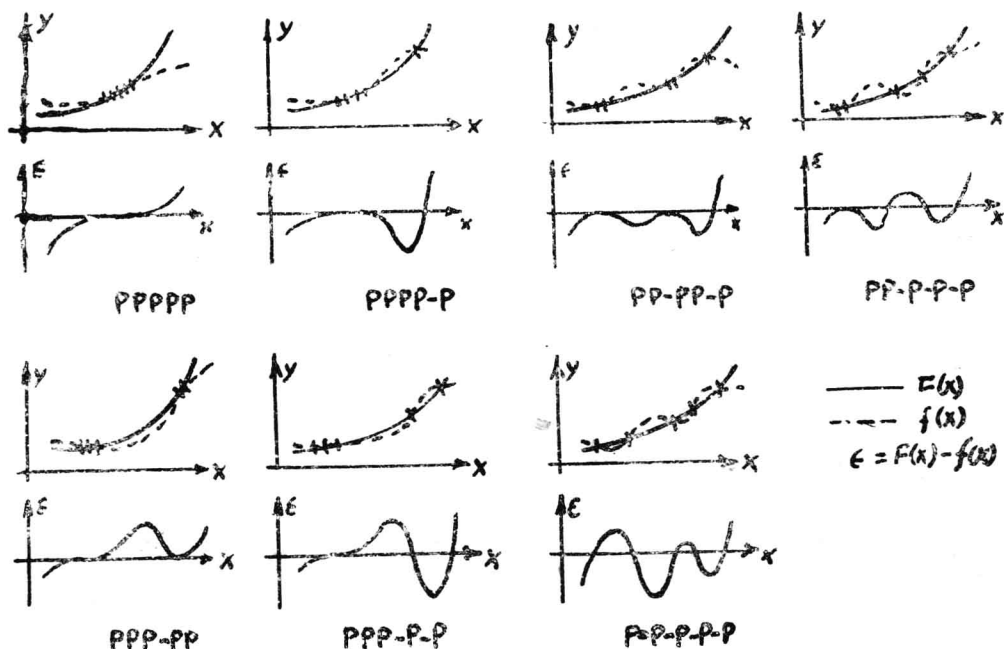


图1—14 五个精确位置的误差曲线图

现在我们来综合三个精确点,其中两点还是一阶导数(即各自具有速度)的。下列是这三点位置的五个线性方程。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_2} & e^{im\varphi_2} & e^{i\beta_2} & e^{i\gamma_2} & e^{i\psi_2} \\ e^{i\varphi_3} & e^{im\varphi_3} & e^{i\beta_3} & e^{i\gamma_3} & e^{i\psi_3} \\ e^{\varphi_2} & m e^{i\varphi_2} & \dot{\beta}_2 e^{i\beta_2} & \dot{\gamma}_2 e^{i\gamma_2} & \dot{\psi}_2 e^{i\psi_2} \\ e^{i\varphi_3} & m e^{im\varphi_3} & \dot{\beta}_3 e^{i\beta_3} & \dot{\gamma}_3 e^{i\gamma_3} & \dot{\psi}_3 e^{i\psi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{15} \\ \bar{Z}_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \\ \bar{Z}_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.....(1-3)