



2011

最新成人高考丛书系列
ZUIXIN CHENGREN GAKAO CONGSHU XILIE

2011

全国各类成人高等学校招生考试

统考教材

高中起点升本、专科

中国人民大学成人教育学院 编

周春红 主编

数学 文科



北京邮电大学出版社
<http://www.buptpress.com>

全国各类成人高等学校招生统考教材

高中起点升本、专科

数 学

(文科)

傅崇武 贾光辉 周春红 主编

北京邮电大学出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高等学校招生统考教材. 文史类. 数学/傅崇武, 贾光辉, 周春红编.
—北京: 北京邮电大学出版社, 2002(2011 重印)

ISBN 978 - 7 - 5635 - 0619 - 4

I. 数... II. ①傅... ②贾... ③周... III. 数学课—成人教育: 高等教育
—入学考试—教材 IV. G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053196 号

书 名 数学(文科)
主 编 傅崇武 贾光辉 周春红
责任编辑 陈露晓 曾新慧
版式设计 陈露晓
出版发行 北京邮电大学出版社
社 址 北京市海淀区西土城路 10 号 邮编 100876
经 销 各地新华书店
印 刷 北京市彩虹印刷有限责任公司
开 本 787 mm × 1 092 mm 1/16
印 张 14.75
字 数 393 千字
版 次 2002 年第 1 版 2011 年 3 月第 11 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5635 - 0619 - 4
定 价 30.00 元

如有印刷问题请与北京邮电大学出版社联系

电话: (010) 62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

Http://www.buptpress.com

版权所有 侵权必究

出版说明

为了使学生在复习备考过程中能全面、系统、高效地复习各门课程,我们再次组织了中国人民大学成人教育学院的原班人马认真地修订了《全国各类成人高等学校招生考试统考教材》。

本套教材包括《语文》、《数学》(文科)、《数学》(理科)、《英语》、《历史地理综合》、《物理化学综合》等。在本套教材的修订过程中侧重体现以下几个显著特点:

【紧扣大纲】本书严格按照最新《全国各类高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》修订,并结合编者在中国人民大学成教院举办的成人高考辅导班授课和在北京评卷的经验,以及对历年全国统考试题的分析、研究,总结出了成人高考命题的思路、方法和原则,从而充分体现了成人高考命题的新动态。

【体例新颖】在内容的选择和编排方面,根据知识的内在联系和考生的认知规律,按从简单到复杂、由浅入深、循序渐进等原则安排本套教材的结构,教材的编写目的是为了帮助老师教学和培养学生的应试能力。

【针对性强】本系列丛书针对成人考生学习的特点和要求,注重基础知识复习和能力训练,以提高考生综合运用知识的能力和应试水平,能帮助考生在短期内取得良好的复习备考的效果。

由于本套丛书结构科学、合理,内容覆盖面广,安排灵活,因此是参加全国各类成人高考高中起点升本、专科(含高职)考生的理想教材。

希望广大师生在使用本套丛书时能提出宝贵的意见和建议,以便进一步的修改,使之日趋完善,在此对关心本套丛书并付出辛勤劳动的同志表示衷心的感谢。

编 者

目 录

第一部分 代数

第一章 预备知识	1
数、式、方程和方程组	
§ · 1 实数及其有关概念	1
§ · 2 代数式	3
§ · 3 方程	9
§ · 4 方程组	13
§ · 5 分式方程和无理方程	16
§ · 6 列方程解应用题	17
练习题	18
参考答案	19
指数和对数	
§ · 1 指数	21
§ · 2 对数	23
练习题	26
参考答案	28
第二章 集合和简易逻辑	29
§ · 1 集合	29
§ · 2 简易逻辑	34
练习题	35
参考答案	36
第三章 函数	37
§ · 1 函数及其有关概念	37
§ · 2 几个常见的函数	39
§ · 3 关于函数图像常见的两个问题	45
§ · 4 本章的重点	46
练习题	55
参考答案	57
第四章 不等式和不等式组	59
§ · 1 不等式及其性质	59
§ · 2 不等式的解和解不等式	60
§ · 3 一元一次不等式组及其解法	61

§ · 4 绝对值不等式及其解法	63
§ · 5 一元二次不等式及其解法	64
练习题	68
参考答案	69
第五章 数列	70
§ · 1 数列及其有关概念	70
§ · 2 等差数列	70
§ · 3 等比数列	74
练习题	79
参考答案	81
第六章 导数	82
§ · 1 函数的极限	82
§ · 2 导数和导函数	83
§ · 3 用导数处理几个简单的数学问题	85
练习题	88
参考答案	88

第二部分 三角

第七章 三角函数及其有关概念	89
§ · 1 角的有关概念	89
§ · 2 锐角三角函数	90
§ · 3 任意角的三角函数	91
练习题	94
参考答案	95
第八章 三角函数式的变换	96
§ · 1 同角三角函数的基本关系式	96
§ · 2 诱导公式	96
§ · 3 两角和与两角差的三角函数	97
练习题	108
参考答案	109
第九章 三角函数的图像和性质	111
§ · 1 正弦函数的图像和性质	111
§ · 2 余弦函数的图像和性质	112
§ · 3 正切函数的图像和性质	113
§ · 4 余切函数的图像和性质	114
§ · 5 已知三角函数值求角	114

练习题	123
参考答案	125
第十章 解三角形	126
§ · 1 解三角形的概念	126
§ · 2 解三角形常用到的一些知识	126
练习题	134
参考答案	135

第三部分 平面解析几何

第十一章 平面向量	137
§ · 1 有向线段及其有关概念	137
§ · 2 向量及其有关概念	138
§ · 3 向量的加法、减法和数乘向量	139
§ · 4 向量的数量积	142
§ · 5 向量的坐标运算	143
练习题	149
参考答案	150
第十二章 直线	152
§ · 1 直线的倾斜角和斜率	152
§ · 2 直线方程的几种形式	152
§ · 3 两条直线的位置关系	155
§ · 4 两条直线所成的角	157
§ · 5 点到直线的距离	157
§ · 6 典型例题分析及解题技巧	158
练习题	162
参考答案	163
第十三章 圆锥曲线	165
§ · 1 曲线和方程	165
§ · 2 圆	166
§ · 3 椭圆	168
§ · 4 双曲线	170
§ · 5 抛物线	173
练习题	181
参考答案	183

第四部分 概率与统计初步

第十四章 排列、组合	185
§ · 1 两个计数原理	185
§ · 2 排列	185
§ · 3 组合	189
练习题	191
参考答案	192
第十五章 概率初步	193
§ · 1 随机事件	193
§ · 2 随机事件的概率	193
§ · 3 几种常见事件的概率	194
练习题	198
参考答案	199
第十六章 统计初步	200
§ · 1 总体、样本、平均数	200
§ · 2 样本方差	200
练习题	201
参考答案	201

附录部分

2011 年全国成人高等学校招生统一考试数学全真模拟试卷(一)	202
模拟试卷(一)参考答案及评分标准	205
2011 年全国成人高等学校招生统一考试数学全真模拟试卷(二)	207
模拟试卷(二)参考答案及评分标准	210
2010 年成人高等学校招生全国统一考试数学(文史财经类)试卷	212
2010 年成人高等学校招生全国统一考试数学(文史财经类)试题参考答案和评分参考	218
全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(含标准样题)	220



第一部分 代数

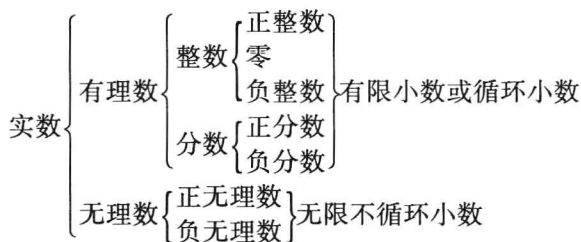
第一章 预备知识

数、式、方程和方程组

§ 1 实数及其有关概念

§ 1.1 实数

1. 实数系表



2. 自然数

零和正整数统称自然数. $0 \uparrow$

3. 奇数和偶数

不能被 2 整除的整数叫做奇数, 能被 2 整除的整数叫做偶数.

4. 素数

在大于 1 的自然数中, 仅有 1 及其自身为其因数的数叫做素数. 素数又叫质数.
前十个素数是 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29.

§ 1.2 实数的有关概念

1. 实数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做实数轴, 简称为数轴.
实数与数轴上的点存在一一对应的关系.

2. 相反数

数轴上分别位于原点两旁, 而且与原点的距离相等的两个点所对应的两个实数, 互为相反数. 零的相反数就是零.

假设 a, b 为二实数, 那么 a, b 互为相反数的充分必要条件是 $a + b = 0$.

3. 倒数

用一个不为零的实数除 1 所得的商, 叫做这个实数的倒数. 零没有倒数.

显然, 如果 a 是 b 的倒数, 那么 b 也是 a 的倒数.

假设 a, b 为二实数, 那么 a, b 互为倒数的充分必要条件是 $ab = 1$.

4. 绝对值

(1) 定义 一个正实数的绝对值是它本身; 零的绝对值是零; 一个负实数的绝对值是它的相反



数,实数 a 的绝对值记作 $|a|$,于是有

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(2) 几何意义 实数 a 的绝对值就是数轴上与实数 a 相对应的点到原点的距离.

(3) 性质 假设 a, b 为二实数,那么:

- ① $|a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时取等号;
- ② $|a| + |b| = 0$ 的充要条件是 $a = 0$ 且 $b = 0$;
- ③ $|a| = |-a|$.

§ 1.3 实数大小的比较

(1) 绝对值较大的正实数大于绝对值较小的正实数;正实数大于零和一切负实数;零大于一切负实数;绝对值较小的负实数大于绝对值较大的负实数.

(2) 假设 a, b 为二实数,那么 $a > b$, $a = b$ 和 $a < b$ 这三种关系中必有一个成立,而且只有一个成立.

(3) 假设 a 是一个实数,那么 $a^2 \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时取等号.

所有大于或等于零的数叫做非负数.至此我们已经遇到了两个非负数: $|a|$ 和 a^2 .

§ 1.4 实数的运算法则

1. 加法

(1) 同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加.

(2) 绝对值不相等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;互为相反数的两个数相加得零.

(3) 一个数与零相加仍得这个数.

2. 减法

减去一个数等于加上这个数的相反数.

3. 乘法

两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;任何数与零相乘都得零.

4. 除法

除以一个不等于零的数,等于乘以这个数的倒数(零不能做除数).

5. 乘方

(1) 正整指数幂 相同因数相乘的运算叫做乘方;乘方的结果叫做幂;相同的因数叫做底数,相同因数的个数叫做指数.

例如 $a \cdot a \cdot a = a^3$. 其中 a 叫做底数,3 叫做指数, a^3 叫做 a 的 3 次幂.

(2) 正整指数的运算法则 设 a, b 为实数, m, n 为正整数,则有

- ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- ② $a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n)$;
- ③ $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
- ④ $(a^m)^n = a^{mn}$.

例如 $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$; $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

6. 开方

(1) n 次方根 假设 a, x 为二实数, n 为正整数,如果 $x^n = a$,那么就称 x 是 a 的一个 n 次方根.正数的偶次方根有两个,它们互为相反数,负数没有偶次方根;正数的奇次方根是一个正数,负数的奇次方根是一个负数;零的 n 次方根是零.

☆(2) 算术根 正数的正的方根叫做算术根,零的算术根是零.当 $a \geq 0$ 时, a 的 n 次算术根记作 $\sqrt[n]{a}$.

$$\sqrt[n]{a} = ?^n$$



(3) 开方与根式 求方根的运算叫做开方,表示方根的式子叫做根式.

§ 1.5 运算律

1. 加法交换律 $a + b = b + a$;
2. 加法结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. 乘法交换律 $ab = ba$;
4. 乘法结合律 $(ab)c = a(bc)$;
5. 乘法对加法的分配律 $a(b + c) = ab + ac$.

§ 1.6 运算顺序

在一个算式中,应先进行乘方、开方运算,再进行乘法、除法运算,最后进行加法、减法运算.

在一个算式中如果有括号,应先进行括号里面的运算,如果有多层括号,应先进行最里层括号的运算,逐层向外去掉括号.

例 1 判断题

(1) 若 a 是一个实数,则 $|a| > 0$.

(X)

(2) 若 a 是一个自然数,则 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$.

(X)

解 (1) 错 0 是实数, $|0| = 0$.

(2) 错 0 是自然数,而零没有倒数.

例 2 填空题

(1) 若 $|a + 1| + |b - 2| = 0$,则 $a + b =$ 1.

(2) 若 $|x - 1| = 1$,则 $x =$ 0/2.

解 (1) 填 1. 由题设得 $a + 1 = b - 2 = 0$,所以 $a = -1, b = 2$,于是 $a + b = -1 + 2 = 1$.

(2) 填 0 或 2. 因为 $|1| = |-1| = 1$,所以由题设得 $x - 1 = 1$ 或 $x - 1 = -1$,从而 $x = 2$ 或 $x = 0$.

例 3 选择题

(1) $-3^2 =$ ().

(A) -6

(B) -9

(C) 6

(D) 9

(2) 若 a, b 满足条件 $ab = 0$,则 ().

(A) $a = 0$

(B) $b = 0$

(C) $a = 0$ 或 $b = 0$

(D) $a = b = 0$

解 (1) 选 (B). $-3^2 = (-1) \times 3^2 = (-1) \times 9 = -9$.

(2) 选 (C). 因为 $a \neq 0, b = 0$ 时, $ab = 0$,应排除 (A),同理应排除 (B) 和 (D),选 (C).

* 本书中的所有选择题均为单项选择题.

§ · 2 代数式

§ 2.1 代数式及其分类

1. 代数式

单独的一个数字或者单独的一个字母以及用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子;叫做代数式.

2. 代数式的分类

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{整式} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases} \\ \text{分式} \end{cases} \\ \text{无理式} \end{cases}$$



§ 2.2 整式及其运算

1. 单项式

数字与字母的积,或虽含有除法运算而分母中不含有字母的代数式,叫做单项式.

2. 多项式

若干个单项式的代数和,叫做多项式.

3. 整式

单项式和多项式统称整式.

4. 整式的运算

(1) 幂的运算法则. (见 § 1.4)

(2) 常用的乘法公式

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \checkmark \\
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \checkmark \\
 (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \checkmark \\
 (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3, \checkmark \\
 (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3, \checkmark \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
 (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\
 (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca. \checkmark
 \end{aligned}$$

§ 2.3 多项式的因式分解

1. 因式分解

把一个多项式化成几个整式乘积的形式,叫做因式分解.

2. 因式分解的方法

因式分解常用的方法有提取公因式法、分组分解法、十字相乘法、配方法、求根公式法、待定系数法等.

3. 注意事项

(1) 不做特别说明,因式分解应在有理数范围内进行.

(2) 因式分解时应分到不能再分为止.

★例如 把 $x^4 - y^4$ 分解成 $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ 就没有分到“不能再分”,事实上 $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$.

★例 1 分解下列各多项式

(1) $3x(a-b) - 6y(b-a)$; ~~3x(a-b)~~

(2) $xy + x + y + 1$; $3(x+2y)$

(3) $81a^3 - 3b^3$; $(a-b)(3x+6y)$

(4) $m^6 + n^6 + 2m^3n^3$; $3 \times a - 3 \times b = 6by + 6ay$

解 (1) $3x(a-b) - 6y(b-a) = 3x(a-b) + 6y(a-b)$
 $= 3(a-b)(x+2y).$

(2) $xy + x + y + 1 = (xy + x) + (y + 1)$
 $= x(y+1) + 1(y+1) = (y+1)(x+1).$

(3) $81a^3 - 3b^3 = 3(27a^3 - b^3) = 3[(3a)^3 - b^3]$
 $= 3(3a-b)(9a^2 + 3ab + b^2).$

(4) $m^6 + n^6 + 2m^3n^3 = (m^3 + n^3)^2 = (m+n)^2(m^2 - mn + n^2)^2$
 $= (a+b)^2(a^2 + b^2 + 2ab)$
 $= (m+n)^2(m-n)^2$



说明 (1)题用的是提取公因式法;(2)题先分组,再提公因式;(3)、(4)题用的是公式法.

例2 在实数范围内分解下列各式

$$(1) x^2 + 4x - 2; \quad (2) x^2 - 3x + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) x^2 + 4x - 2 &= x^2 + 4x + 4 - 6 = (x+2)^2 - (\sqrt{6})^2 \\ &= (x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6}). \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\text{则 } x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{故 } x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

说明 (1)题用的是配方法;

(2)题用到了求根公式法.

例3 分解因式 $x^3 - 7x + 6$.

$$\begin{aligned} \text{解 } x^3 - 7x + 6 &= (x^3 - 1) - (7x - 7) \\ &= (x-1)(x^2+x+1) - 7(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1-7) \\ &= (x-1)(x^2+x-6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3). \end{aligned}$$

说明 本例利用的是拆添项法分解因式,即把常数项6拆成-1与7的和,怎样想到这样拆呢?这里用到了余数定理.

余数定理 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式($n \geq 2$),若 a 是一个常数满足 $f(a) = 0$,则 $f(x)$ 有一个因式是 $x-a$,换言之,若 $f(a) = 0$,则 $f(x) = (x-a)f_1(x)$,其中 $f_1(x)$ 是一个 $n-1$ 次的多项式.

本例中 $f(x) = x^3 - 7x + 6$,易见 $f(1) = 0$,从而判断 $f(x)$ 有一个因式为 $x-1$,所以有上述解法.如果一开始就发现 $f(2) = 0$,也可以得到下述解法:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= (x^3 - 8) - (7x - 14) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 7(x-2) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x-2)(x-1)(x+3). \end{aligned}$$

本例的上述两种解法用的都是拆项、分组、提取公因式、十字相乘等方法.

把一个二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ($abc \neq 0$)分解因式,首先应考虑用十字相乘法来进行,具体步骤是:

- (1)把 a 与 c 分别分解成两个因数的乘积,例如 $a = mn = \cdots = pq$, $c = rs = \cdots = uv$;
- (2)把 a 的某一组因数,例如 m, n 和 c 的某一组因数,例如 r, s 写成右面的形式:
- (3)若 $ms + nr = b$,则 $ax^2 + bx + c = (mx + r)(nx + s)$.若 $ms + nr \neq b$,则再用 a 或 c 的其他因数来尝试,直到成功为止.

选 c 的因数时,若 $c > 0$,它的两个因数应当同号, $c < 0$ 时它的两个因数应当异号.

例如 用十字相乘法分解下列各多项式:

$$(1) 2x^2 - 11x + 5; \quad (2) 6x^2 - 13xy - 15y^2.$$

$$\text{解 } (1) 2x^2 - 11x + 5 = (2x-1)(x-5)$$

$$(2) 6x^2 - 13xy - 15y^2 = (6x+5y)(x-3y).$$

有的多项式可以用待定系数法来分解因式.

例如 分解因式 $2x^2 + xy - 6y^2 + 2x + 11y - 4$.

解 注意到 $2x^2 + xy - 6y^2 = (x+2y)(2x-3y)$,不妨设

$$\begin{array}{cc} m & r \\ n & s \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{array}$$



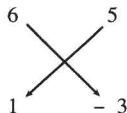
$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - 6y^2 + 2x + 11y - 4 \\ = (x + 2y + m)(2x - 3y + n) \\ = 2x^2 + xy - 6y^2 + (n + 2m)x + (2n - 3m)y + mn \end{aligned}$$

比较对应项的系数,得方程组

$$\begin{cases} n + 2m = 2 & \text{①} \\ 2n - 3m = 11 & \text{②} \\ mn = -4 & \text{③} \end{cases}$$

①、②联立,解得 $m = -1, n = 4$; 而 $m = -1, n = 4$ 也满足③,

故 $2x^2 + xy - 6y^2 + 2x + 11y - 4 = (x + 2y - 1)(2x - 3y + 4)$.



§ 2.4 分式

1. 分式

假设 A、B 是两个整式,如果 B 中含有字母,并且 B 的取值不为零,那么代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做分式.

2. 分式的基本性质

假设 $\frac{A}{B}$ 为一分式, M 是一个取值不为零的整式,则有

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}, \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}.$$

3. 分式的符号法则

分式的分子、分母和分式本身的符号,改变其中的任何两个,分式的值不改变,即假设 $\frac{A}{B}$ 为一分式,那么

$$\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B} = \frac{-A}{-B}; -\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

在最后结果中,一般地只保留一个符号,写在分式线的前面.

4. 最简分式

如果一个分式的分子和分母互质,那么就称这个分式为最简分式.

5. 约分

把分子和分母的公因式约去,叫做分式的约分.

6. 通分

利用分式的基本性质,把几个异分母的分式化成与原来的分式等值的同分母的分式叫做通分.

7. 分式的运算

(1) 加减法 同分母的分式相加减,分母不变,把分子相加减;异分母的分式相加减,先通分,变成同分母的分式,然后再加减;

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}; \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD}$$

(2) 乘法 两分式相乘,用分子的积作乘积的分子,用分母的积作乘积的分母:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

(3) 除法 两个分式相除,把除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘;

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}.$$

(4) 乘方 分式乘方,把分式的分子分母分别乘方:



$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n} (n \text{ 为正整数}).$$

分式运算的结果应该是一个最简分式或整式.

例1 计算下列各式

$$(1) \frac{a^2b}{a^2-b^2} - \frac{ab^2}{a^2-b^2}; \quad (2) \frac{1}{x+3} + \frac{2x+12}{x^2-9}.$$

解 (1) 原式 = $\frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$

★ (2) 原式 = $\frac{x-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{2x+12}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x+9}{(x+3)(x-3)} = \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3}{x-3}$

例2 计算下列各式

$$(1) \left(-\frac{n^4}{m^3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{m}{n^2}\right)^3 \div \left(\frac{n^2}{m^2}\right)^4;$$

$$(2) \frac{a^4 - a^2b^2}{(a-b)^2} \div \left[\frac{a(a+b)}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right].$$

解 (1) 原式 = $\frac{n^8}{m^6} \cdot \left(-\frac{m^3}{n^6}\right)^3 \cdot \frac{n^8}{m^8}$
 $= -\frac{n^8}{m^6} \cdot \frac{m^9}{n^{18}} \cdot \frac{n^8}{m^8}$
 $= -\frac{m^5}{n^6}$

(2) 原式 = $\frac{a^2(a^2-b^2)}{(a-b)^2} \div \frac{a+b}{a}$
 $= \frac{a^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} \cdot \frac{a}{a+b}$
 $= \frac{a^3}{a-b}$

注意 整式、分式统称有理式.

§ 2.5 无理式

1. 无理式

根号内含有变数字母的代数式,若不能化为有理式,则称其为关于这些变数的无理代数式,简称为无理式.

例如 $\sqrt{2}, \sqrt{a^2}, \sqrt{(x-y)^4}$ 均为有理式,而 $\sqrt[3]{x}, \sqrt{m} (m \geq 0), \sqrt{ab} (ab > 0)$ 等均为无理式.

2. 二次根式

当 $a \geq 0$ 时,形如 $\sqrt{a}$ 的式子叫做二次根式.

例如 $\sqrt{-3}, \sqrt{x} (x < 0)$ 均不是二次根式,而 $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{x+y} (x+y \geq 0)$ 均为二次根式.

3. 二次根式的性质

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0);$$

$$(2) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$(3) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0);$$

$$(4) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$



4. 最简二次根式

一个二次根式,如果被开方数的每一个因式的指数都等于1,并且被开方数不含分母,此二次根式叫做最简二次根式.

5. 同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数都相同,那么这几个二次根式叫做同类二次根式.

6. 分母有理化

当被开方数是一个分式或分数时,用一个适当的代数式同时乘分子和分母,化去分母中的根号,叫做分母有理化.

7. 二次根式的运算

(1) 二次根式的加减法 先把各根式化为最简二次根式,再合并同类二次根式.

(2) 二次根式的乘除法 按二次根式的性质进行运算. 结果应化成最简二次根式.

例1 化简下列各式

(1) $\sqrt{20}$, (2) $\sqrt{8a^3} (a > 0)$.

解 (1) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

(2) $\sqrt{8a^3} = \sqrt{(2a)^2 \cdot 2a} = 2a\sqrt{2a}$.

例2 化简下列各式

(1) $\sqrt{-a^3}$, (2) $\frac{1}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$.

解 (1) 因为 $\sqrt{-a^3}$ 为二次根式, 所以 $-a^3 \geq 0$, 所以 $a \leq 0$, 所以 $-a \geq 0$.

故 $\sqrt{-a^3} = \sqrt{(-a)^2 \cdot (-a)} = -a\sqrt{-a}$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} = \frac{a+2\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})} = \frac{a+2\sqrt{b}}{a-4b} \cdot \sqrt{\frac{a-4b}{a-4b}}$

例3 计算下列各式

(1) $15\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{3}{2}\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{125}$,

(2) $(4\sqrt{\frac{2}{3}} - 10\sqrt{28}) - (\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{1}{7}})$.

解 (1) 原式 $= 15\sqrt{\frac{5}{5^2}} + \frac{3}{2}\sqrt{2^2 \times 5} - 4\sqrt{3^2 \times 5} + \sqrt{5^2 \times 5}$
 $= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$
 $= -\sqrt{5}$.

(2) 原式 $= 4\sqrt{\frac{6}{3^2}} - 10\sqrt{2^2 \times 7} - \sqrt{\frac{2^2 \times 6}{3^2}} + \sqrt{\frac{7}{7^2}}$
 $= \frac{4}{3}\sqrt{6} - 20\sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{6} + \frac{\sqrt{7}}{7}$
 $= \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{139}{7}\sqrt{7}$.

说明 当二次根式的系数为假分数时, 不要把假分数化成带分数, 如 $-\frac{139}{7}\sqrt{7}$ 不能写成 $-19\frac{6}{7}\sqrt{7}$.

例4 选择题

已知 $x = -2$, 则二次根式 $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$ 的值为 $(-\frac{1}{2})$.



(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

解 原式 = $\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} - x)^2} = |\frac{1}{2} - x|$

因为 $x = -2$, 所以 $\frac{1}{2} - x > 0$, 所以原式 = $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

故选(C).

§ 3 方程

§ 3.1 几个概念

1. 方程

含有未知数的等式叫做方程.

2. 方程的解

使方程左右两边相等的未知数的值,叫做方程的解.

3. 解方程

求出方程的解集的过程,叫做解方程.

4. 同解方程

如果第一个方程的所有的解都是第二个方程的解,并且第二个方程的所有的解也都是第一个方程的解,那么这两个方程叫做同解方程.

5. 两个同解原理

(1) 方程的两边都加上(减去)同一个整式,所得方程与原方程是同解方程.

(2) 方程的两边都乘以(除以)同一个不为零的整数,所得方程与原方程同解.

§ 3.2 一元一次方程

1. 一元一次方程

形如 $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) 的方程叫做一元一次方程,它的解是 $x = -\frac{b}{a}$.

2. 方程 $ax + b = 0$ 的解的讨论

(1) 当 $a \neq 0$ 时,原方程有唯一解: $x = -\frac{b}{a}$.

(2) 当 $a = 0$ 时,

① 若 $b = 0$ 则原方程有无穷多个解, x 可以为任意实数,即原方程的解集为实数集.

② 若 $b \neq 0$ 则原方程无解,其解集为空集.

§ 3.3 一元二次方程

1. 一元二次方程

形如 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程根的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

(*)

的根的判别式.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$