高中数学

总复习

北京出版社

高中数学总复习

北京市教育局教学研究部　编

北 京 出 版 社

(京)新登字200号

高中数学总复习

GAOZHONG SHUXUE ZONGFUXI

北京市教育局教学研究部　编

*

北京出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码　100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京印刷一厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　16.75印张　370000字

1983年2月第1版　1984年4月第2版

1985年2月第3版　1989年2月第4版

1990年8月第5版　1991年12月第6版

1991年12月第13次印刷

印数　1705631—1743730

ISBN 7-200-01538-5/G·498

定　价：6.10元

第二次修订说明

为了做好初、高中毕业班的总复习工作，我部在1983年邀请北京市部分有经验的中学教师，编写了中学有关学科的总复习教学参考书，并于1988年对该书进行了全面修订。经过几年使用，广大师生反映这套总复习教学参考书符合教学大纲要求，能起到使学生系统掌握知识，提高分析问题、解决问题能力的作用。为了适应目前的教学要求，我们依据现行教材，参照国家教委1990年制订的教学大纲（修订本），对1988年版高中语文、数学、历史、地理、物理、化学、生物，初中语文等科的总复习教学参考书，进行了第二次修订。这次修订后，本书在保持原有知识的系统性、综合性的基础上，对复习内容进行了精心选择，使练习题的题型更接近于标准化试题的要求，以期减轻学生的过重负担，使复习收到更好的效果。

本书是《高中数学总复习》教学参考书。全书分为代数、立体几何、平面解析几何三篇。每篇按知识系统分为若干章。为了便于教学，每章又分若干单元。各单元选配了适量的典型例题和练习题。书末附有习题解答。

参加本次修订及编写的有明知白（第一篇第一～三章）、田佣（第一篇第四、五章）、储瑞年（第一篇第六～八章）、邵琰明（第一篇第九、十章）、任光辉（第二篇第一章）、陶乃阁（第二篇第二章）、王建民（第三篇第一、

四、五章）、董世奎（第三篇第二、三、六章）。全书由东城区教研科研中心数学教研室明知白、本部数学教研室陈捷统稿。

几年来我市许多同志参加了本书的编写及修订工作，对所有这些同志的辛勤劳动再次表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

北京市教育局教学研究部

1991年5月

目 录

第一篇 代 数

第二篇　立体几何

第三篇 平面解析几何

第一篇 代 数

第一章 预备知识

§1.1 集合、充要条件

一、集合

1. 集合的概念

(1) 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。a是集合A的元素表示成$a\in A$，a不是集合A的元素表示成$a\notin A$。

(2) 集合的特性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的、无序的。

2. 集合的表示

(1) 集合的表示方法：列举法、描述法及图示法。

用区间（如(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$等）表示某些实数的集合属于描述法。

(2) 常见数集的表示：N—自然数集，Z—整数集，Q—有理数集，R—实数集，C—复数集。此外，还可以用Q^+表示正有理数集，R^-表示负实数集，等等。

3. 集合与集合的关系

（1）子集、真子集、集合相等（略）.

对于任何一个集合A，规定$\varnothing \subseteq A$。

对于集合A，B，C有：

如果$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$；

如果$A \subset B$，$B \subset C$，那么$A \subset C$。

（2）交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的交集，记作$A \cap B$，即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A\text{且}x \in B\}.$$

对于任何集合A，B有

$$A \cap A=A，A \cap \varnothing=\varnothing，A \cap B=B \cap A.$$

（3）并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的并集，记作$A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A\text{或}x \in B\}.$$

对于任何集合A，B有

$$A \cup A=A，A \cup \varnothing=A，A \cup B=B \cup A.$$

（4）两个非空集合间的五种关系（图1-1-1）

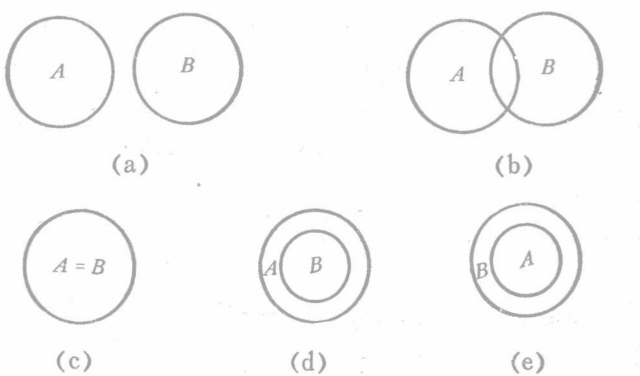


图1-1-1

(5) 全集、补集

全集（略）。

补集：已知全集I，集合$A\subset I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x|x\in I且x\notin A\}.$$

对于任何集合A，有

$$A\cup\overline{A}=I,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ \overline{\overline{A}}=A.$$

二、 充要条件

1．命题

可以判断真假的语句叫做命题。

命题可以是真的，也可以是假的，但不能又真又假。

命题常用字母p，q，r等表示。

“若p则q”形式的命题是条件命题，它的真假取决于在p成立的条件下q是否成立。

2．充要条件

（1）如果p成立，那么q成立，即$p\Longrightarrow q$，则称p是q成立的充分条件，q是p成立的必要条件。

（2）如果p是q的充分条件，又是q的必要条件，即$p\Longleftrightarrow q$，则称p是q成立的充要条件．（显然，此时q也是p成立的充要条件）。

（3）对于“若p则q”形式的命题，条件p和结论q之间的逻辑关系有以下四种情况：

$p\Longrightarrow q$且$q\not\Longrightarrow p$，称p是q的充分条件，但不是q的必要条件；

$q\Longrightarrow p$且$p\not\Longrightarrow q$，称p是q的必要条件，但不是q的充分

条件；

$p\Longrightarrow q$且$q\Longrightarrow p$，称p是q的充要条件；

$p\not\Longrightarrow q$且$q\not\Longrightarrow p$，称p既不是q的充分条件，也不是q的必要条件.

三、例题

例1 （选择题❶）若$A=\{x|x=0\}$，$B=\{x|x^2+1=0, x\in R\}$，则（　　）.

（A）$A=B=\varnothing$.　　（B）$A=0$且$B=0$.

（C）$B\subseteq\{0\}\subseteq A$.　　（D）$0\in A$且$0\in B$.

分析：显然有$A=\{0\}$，$B=\varnothing$，由此可知(A)、(B)、(D)都不对，只有（C）是正确的.

例2 设$I=R$，$P=\{y|y=-x^2, x\in R\}$，$Q=\{y|y=|x|-1, x\in R\}$，求$P\cap Q$，$P\cup Q$，$\overline{P\cup Q}$与$\overline{P}\cap Q$.

解：由已知得

$$P=(-\infty,0], \quad Q=[-1,+\infty),$$

于是

$$P\cap Q=(-\infty,0]\cap[-1,+\infty)=[-1,0],$$

$$P\cup Q=(-\infty,0]\cup[-1,+\infty)=R,$$

$$\overline{P\cup Q}=\overline{R}=\varnothing,$$

$$\overline{P}\cap Q=(0,+\infty)\cap[-1,+\infty)=(0,+\infty).$$

例3 设S，T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令$X=S\cap T$，那么$S\cup X$等于（　　）.

---

❶ 若无特殊说明，本书中的选择题是指：题中给出了代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个结论是正确的.

(A) X　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) S

分析：两个非空集合 S 与 T 之间存在如图1-1-1所示的五种关系，而由已知可得，S 与 T 只能是图中的（a）、（b）两种关系，这时都有 $S\cup X=S$，因此选择（D）。

说明：利用文氏图解决有关集合的问题，有时是很方便的。

例4　（填空题）在下列各题的括号内填写 A，B，C 中的一个，其中

A 表示"充分条件，但不是必要条件"；

B 表示"必要条件，但不是充分条件"；

C 表示"充要条件"。

(1)　"$x>1$"是"$x>0$"的（　　）；

(2)　"$(a+b)^2=a^2+b^2$"是"a,b都是零"的（　　）；

(3)　"$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$"是"$x=\frac{\pi}{4}$"的（　　）；

(4)　"$b^2-4ac\leqslant 0$"是"实系数二次三项式 ax^2+bx+c（$a>0$）总取非负值"的（　　）；

(5)　"$\triangle ABC$ 的一个内角是60°"是"$\triangle ABC$ 的三个内角成等差数列"的（　　）。

解：(1) 由于"$x>1$" $\Longrightarrow$ "$x>0$"，但"$x>0$" $\not\Longrightarrow$ "$x>1$"，所以"$x>1$"是"$x>0$"的充分条件，但不是"必要条件"，故填写 A。

(2) $(a+b)^2=a^2+b^2 \Longleftrightarrow ab=0$。

由于"a，b都是零" $\Longrightarrow$ "$ab=0$"，但"$ab=0$" $\not\Longrightarrow$ "a，b都是零"，所以"$ab=0$"是"a，b都是零"的必要条件，但不是充分条件，故填写 B。

(3) 由于"$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$" $\not\Longrightarrow$ "$x=\frac{\pi}{4}$"，但"$x=\frac{\pi}{4}$"

$\Longrightarrow$ “$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$”，所以填写$B$。

(4) “二次三项式$ax^2+bx+c(a>0,b,c\in R)$总取非负值”就是“$ax^2+bx+c\geqslant 0(a>0,\ b,\ c\in R)$对任何$x\in R$成立”。

由于“$b^2-4ac\leqslant 0$”$\Longleftrightarrow$“$ax^2+bx+c\geqslant 0(a>0,\ b,c\in R)$对任何实数$x$成立”，所以填写$c$。

(5) 如果$\triangle ABC$的一个内角为60°，不妨设$B=60°$，于是$A+C=180°-60°=120°$，因此$A+C=2B$，故A，B，C成等差数列；

反之，如果$\triangle ABC$的三个内角成等差数列，不妨假A,B，C成等差，则$A+C=2B$。由于$A+C=180°-B$，所以$180°-B=2B$，故$B=60$。

综上可知，应该填写C。

例5 求证：一次函数$y=kx+b$是奇函数的充要条件是$b=0$。

证明： 设$f(x)=kx+b(k\neq 0,\ x\in R)$。

先证充分性，即证“$b=0\Longrightarrow f(x)=kx+b$是奇函数”。

当$b=0$时，对任何$x\in R$，有

$$f(-x)=k(-x)=-kx=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数。

再证必要性，即证“一次函数$f(x)=kx+b$是奇函数$\Longrightarrow b=0$”。

由于$f(x)=kx+b$是奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$，对任何$x\in R$成立，即

$$k(-x)+b=-(kx+b),$$

$$-kx+b=-kx-b,$$

上式对任何$x\in R$成立，所以$b=0$。

习 题 1-1

1. 用适当的符号（$\in, \notin, =, \subset, \supset$）填空：

(1) 0____$\{0\}$；　　　　(2) $\{0\}$____$\varnothing$；

(3) $\{0,1,2\}$____$\{1,0,2\}$；

(4) -4____$\{x|2x^2-5x-12=0, x\in Z\}$；

(5) $\{x|x+1>0\}\cap\{x|x-1>0\}$____$\{x|(x+1)(x-1)>0\}$。

2. 用列举法表示下列各集合：

(1) {绝对值不大于3的整数}；

(2) $\{x|x^2-x-6<0,\ x\in Z\}$；

(3) $\{(x,y)|x+2y=7,\ x,y\in N\}$；

(4) $\{x|x=\frac{q}{p},\ q\in Z,\ |q|<2,\ p\in N,\ p\leqslant 3\}$。

3. 填空：

(1) 设$A=\{x|x\geqslant 4\}$，$B=\{x|2\leqslant x<5\}$，则$A\cap B=$____，$A\cup B=$____；

(2) 设$I=R$，$A=\{x|x^2>0\}$，$B=\{x|\,|x+1|\leqslant 1\}$，$C=\{x|\frac{x+1}{x}<1\}$，则$\overline{A}=$____，$A\cap B=$____，$B\cup\overline{C}=$____。

(3) 设$I=$\{三角形\}，$P=$\{锐角三角形\}，$Q=$\{钝角三角形\}，那么$\overline{P}\cap\overline{Q}=$____；

(4) 设$A=\{(x,y)|y=|x|+1,\ x\in R\}$，$B=\{(x,y)|y=$

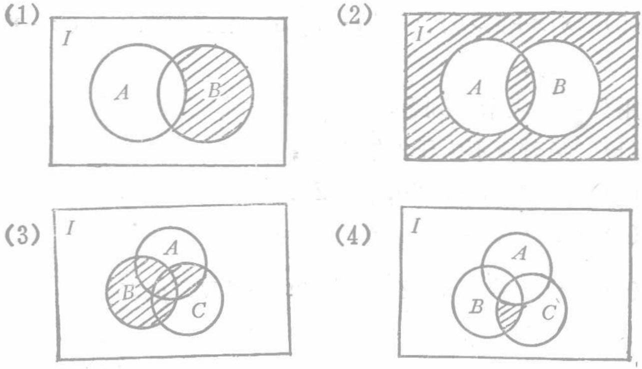
$\frac{1}{2}x+a,x\in R\}$，且$A\cap B=\varnothing$，则a的取值范围是____。

4. 数集 $X=\{(2n+1)\pi,\ n\in Z\}$与$Y=\{(4k\pm 1)\pi,\ k\in Z\}$之间的关系是（　）。

　(A) $X\subset Y$。　　(B) $X\supset Y$。

　(C) $X=Y$。　　(D) $X\neq Y$。

5. 图中I为全集，试用集合A，B或A，B，C表示图中各阴影部分：



（第 5 题）

6. (1) 集合$\{a,\ b,\ c\}$的子集有多少个？

　(2) 设 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4\}$，那么 $A\cup B$ 的真子集有多少个？

7. 设A，B，C的意义如例4所述，则

　(1) "a，b都是偶数"是"ab是偶数"的（　）；

　(2) "$x^2=5$"是"$x=\sqrt{5}$"的（　）；

　(3) "$x-1=0$"是"$(x-1)(x-2)=0$"的（　）；

　(4) "$a\neq 0$"是"$ab\neq 0$"的（　）；

　(5) "$x<1$"是"$x\leqslant 1$"的（　）；