

高中数学 总复习

北京出版社

高中数学总复习

北京市教育局教学研究部 编

北 京 出 版 社

(京)新登字 200 号

高中数学总复习
GAOZHONG SHUXUE ZONGFUXI

北京市教育局教学研究部 编

*

北京出版社出版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码 100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京印刷一厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 16.75印张 370000字

1983年2月第1版 1984年4月第2版

1985年2月第3版 1989年2月第4版

1990年8月第5版 1991年12月第6版

1991年12月第13次印刷

印数 1705631—1743730

ISBN 7-200-01538-5/G·498

定价: 6.10元

第二次修订说明

为了做好初、高中毕业班的总复习工作，我部在1983年邀请北京市部分有经验的中学教师，编写了中学有关学科的总复习教学参考书，并于1988年对该书进行了全面修订。经过几年使用，广大师生反映这套总复习教学参考书符合教学大纲要求，能起到使学生系统掌握知识，提高分析问题、解决问题能力的作用。为了适应目前的教学要求，我们依据现行教材，参照国家教委1990年制订的教学大纲（修订本），对1988年版高中语文、数学、历史、地理、物理、化学、生物、初中语文等科的总复习教学参考书，进行了第二次修订。这次修订后，本书在保持原有知识的系统性、综合性的基础上，对复习内容进行了精心选择，使练习题的题型更接近于标准化试题的要求，以期减轻学生的过重负担，使复习收到更好的效果。

本书是《高中数学总复习》教学参考书。全书分为代数、立体几何、平面解析几何三篇。每篇按知识系统分为若干章。为了便于教学，每章又分若干单元。各单元选配了适量的典型例题和练习题。书末附有习题解答。

参加本次修订及编写的有明 知白（第一篇第一～三章）、田 佣（第一篇第四、五章）、储瑞年（第一篇第六～八章）、邵琰明（第一篇第九、十章）、任光辉（第二篇第一章）、陶乃阁（第二篇第二章）、王建民（第三篇第一、

四、五章）、董世奎（第三篇第二、三、六章）。全书由东城区教研科研中心数学教研室明知白、本部数学教研室陈捷统稿。

几年来我市许多同志参加了本书的编写及修订工作，对所有这些同志的辛勤劳动再次表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

北京市教育局教学研究部

1991年5月

目 录

第一篇 代 数

第一章 预备知识.....	(1)
§ 1.1 集合、充要条件.....	(1)
§ 1.2 指数式与对数式.....	(9)
第二章 函 数.....	(15)
§ 2.1 函数的有关概念.....	(15)
§ 2.2 函数的图象与性质.....	(24)
第三章 二次函数、幂函数、指数函数与对数函 数.....	(34)
§ 3.1 二次函数.....	(34)
§ 3.2 幂函数、指数函数与对数函数.....	(44)
第四章 三角函数及其恒等变形.....	(55)
§ 4.1 任意角的三角函数.....	(55)
§ 4.2 三角函数的恒等变形.....	(64)
§ 4.3 三角函数的图象及性质.....	(85)
第五章 反三角函数、三角方程.....	(101)
§ 5.1 反三角函数.....	(101)
§ 5.2 简单三角方程.....	(114)
§ 5.3 三角形中的一些问题.....	(128)
第六章 方 程.....	(138)
第七章 不等式.....	(156)

§ 7.1 不等式的性质与证明	(156)
§ 7.2 不等式的解法与应用	(170)
第八章 数列与极限 数学归纳法	(188)
§ 8.1 数列	(188)
§ 8.2 数学归纳法	(199)
§ 8.3 数列的极限	(207)
第九章 复数	(214)
第十章 排列、组合、二项式定理	(240)
§ 10.1 排列与组合	(240)
§ 10.2 二项式定理	(249)

第二篇 立体几何

第一章 直线与平面	(255)
§ 1.1 平面的基本性质及其作用	(255)
§ 1.2 空间两条直线的位置关系	(256)
§ 1.3 空间两条直线平行的判定方法	(257)
§ 1.4 空间两条直线垂直的判定方法	(257)
§ 1.5 空间直线与平面的位置关系	(258)
§ 1.6 直线与平面平行的判定方法	(259)
§ 1.7 直线与平面垂直的判定方法	(260)
§ 1.8 空间两平面的位置关系	(261)
§ 1.9 两平面平行的判定方法	(261)
§ 1.10 两平面垂直的判定方法	(262)
第二章 多面体与旋转体	(292)
§ 2.1 简单多面体、旋转体的概念	(292)
§ 2.2 简单多面体、旋转体的性质	(294)

§ 2.3	多面体、旋转体的面积、体积、柱、 锥、台、球的侧面积和体积公式	(298)
§ 2.4	多面体、旋转体的截面	(301)
§ 2.5	组合体	(303)
§ 2.6	最值问题	(304)

第三篇 平面解析几何

第一章	曲线和方程	(339)
§ 1.1	平面直角坐标系	(339)
§ 1.2	曲线和方程	(340)
第二章	直线	(350)
§ 2.1	直线的倾角、斜率和截距	(350)
§ 2.2	直线方程	(351)
§ 2.3	直线方程的应用	(352)
§ 2.4	直线方程的确定	(354)
第三章	圆锥曲线	(365)
§ 3.1	圆	(365)
§ 3.2	椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程及 性质	(375)
§ 3.3	圆锥曲线方程的应用	(387)
第四章	参数方程和极坐标	(413)
§ 4.1	参数方程	(413)
§ 4.2	极坐标	(432)
第五章	轨迹方程	(443)
§ 5.1	轨迹方程问题的两种设问方式	(443)
§ 5.2	直接法求轨迹方程	(443)

§ 5.3 参数法求轨迹方程.....	(443)
第六章 含参数的问题.....	(473)
§ 6.1 曲线与曲线的交点个数问题.....	(473)
§ 6.2 曲线系过定点问题.....	(478)
§ 6.3 对称点的存在问题.....	(480)
§ 6.4 含参数的轨迹问题.....	(485)
§ 6.5 定值问题.....	(487)
§ 6.6 方程讨论.....	(488)
习题解答.....	(491)

第一篇 代 数

第一章 预备知识

§ 1.1 集合、充要条件

一、集合

1. 集合的概念

(1) 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。 a 是集合 A 的元素表示成 $a \in A$, a 不是集合 A 的元素表示成 $a \notin A$ 。

(2) 集合的特性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的、无序的。

2. 集合的表示

(1) 集合的表示方法：列举法、描述法及图示法。

用区间（如 (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ 等）表示某些实数的集合属于描述法。

(2) 常见数集的表示： N —自然数集， Z —整数集， Q —有理数集， R —实数集， C —复数集。此外，还可以用 Q^+ 表示正有理数集， R^- 表示负实数集，等等。

3. 集合与集合的关系

(1) 子集、真子集、集合相等 (略)。

对于任何一个集合 A , 规定 $\emptyset \subseteq A$ 。

对于集合 A, B, C 有:

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;

如果 $A \subset B, B \subset C$, 那么 $A \subset C$ 。

(2) 交集: 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

对于任何集合 A, B 有

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A.$$

(3) 并集: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

对于任何集合 A, B 有

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

(4) 两个非空集合间的五种关系 (图1-1-1)

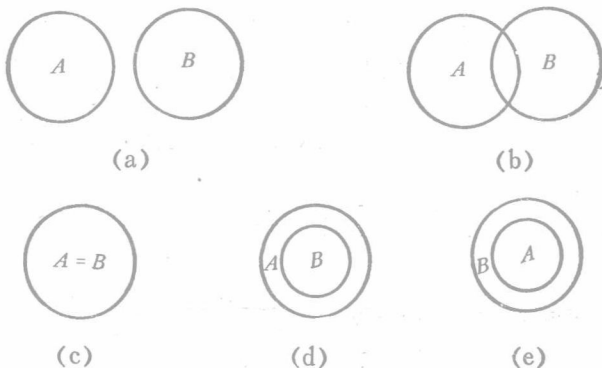


图1-1-1

(5) 全集、补集

全集 (略)。

补集: 已知全集 I , 集合 $A \subset I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在集合 I 中的补集, 记作 $\overline{A}$, 即

$$\overline{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

对于任何集合 A , 有

$$A \cup \overline{A} = I, A \cap \overline{A} = \emptyset, \overline{\overline{A}} = A.$$

二、充要条件

1. 命题

可以判断真假的语句叫做命题。

命题可以是真的, 也可以是假的, 但不能又真又假。

命题常用字母 p, q, r 等表示。

“若 p 则 q ”形式的命题是条件命题, 它的真假取决于在 p 成立的条件下 q 是否成立。

2. 充要条件

(1) 如果 p 成立, 那么 q 成立, 即 $p \implies q$, 则称 p 是 q 成立的充分条件, q 是 p 成立的必要条件。

(2) 如果 p 是 q 的充分条件, 又是 q 的必要条件, 即 $p \iff q$, 则称 p 是 q 成立的充要条件。(显然, 此时 q 也是 p 成立的充要条件)。

(3) 对于“若 p 则 q ”形式的命题, 条件 p 和结论 q 之间的逻辑关系有以下四种情况:

$p \implies q$ 且 $q \not\implies p$, 称 p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件;

$q \implies p$ 且 $p \not\implies q$, 称 p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分

条件;

$p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 称 p 是 q 的充要条件;

$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 称 p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件.

三、例题

例1 (选择题①) 若 $A = \{x | x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 1 = 0, x \in R\}$, 则 ().

(A) $A = B = \emptyset$. (B) $A = 0$ 且 $B = 0$.

(C) $B \subseteq \{0\} \subseteq A$. (D) $0 \in A$ 且 $0 \in B$.

分析: 显然有 $A = \{0\}$, $B = \emptyset$, 由此可知(A)、(B)、(D) 都不对, 只有 (C) 是正确的.

例2 设 $I = R$, $P = \{y | y = -x^2, x \in R\}$, $Q = \{y | y = |x| - 1, x \in R\}$, 求 $P \cap Q$, $P \cup Q$, $\overline{P \cup Q}$ 与 $\overline{P} \cap Q$.

解: 由已知得

$$P = (-\infty, 0], Q = [-1, +\infty),$$

于是

$$P \cap Q = (-\infty, 0] \cap [-1, +\infty) = [-1, 0],$$

$$P \cup Q = (-\infty, 0] \cup [-1, +\infty) = R,$$

$$\overline{P \cup Q} = \overline{R} = \emptyset,$$

$$\overline{P} \cap Q = (0, +\infty) \cap [-1, +\infty) = (0, +\infty).$$

例3 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于 ().

① 若无特殊说明, 本书中的选择题是指: 题中给出了代号为 A, B, C, D 的四个结论, 其中只有一个结论是正确的.

(A) X (B) T (C) $\emptyset$ (D) S

分析: 两个非空集合 S 与 T 之间存在如图1-1-1所示的五种关系, 而由已知可得, S 与 T 只能是图中的 (a)、(b) 两种关系, 这时都有 $S \cup T = S$, 因此选择 (D)。

说明: 利用文氏图解决有关集合的问题, 有时是很方便的。

例4 (填空题) 在下列各题的括号内填写 A , B , C 中的一个, 其中

A 表示 “充分条件, 但不是必要条件”;

B 表示 “必要条件, 但不是充分条件”;

C 表示 “充要条件”。

(1) “ $x > 1$ ” 是 “ $x > 0$ ” 的 () ;

(2) “ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ” 是 “ a, b 都是零” 的 () ;

(3) “ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 是 “ $x = \frac{\pi}{4}$ ” 的 () ;

(4) “ $b^2 - 4ac \leq 0$ ” 是 “实系数二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 总取非负值” 的 () ;

(5) “ $\triangle ABC$ 的一个内角是 60° ” 是 “ $\triangle ABC$ 的三个内角成等差数列” 的 () 。

解: (1) 由于 “ $x > 1$ ” $\Rightarrow$ “ $x > 0$ ”, 但 “ $x > 0$ ” $\nRightarrow$ “ $x > 1$ ”, 所以 “ $x > 1$ ” 是 “ $x > 0$ ” 的充分条件, 但不是 “必要条件”, 故填写 A 。

(2) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow ab = 0$ 。

由于 “ a, b 都是零” $\Rightarrow$ “ $ab = 0$ ”, 但 “ $ab = 0$ ” $\nRightarrow$ “ a, b 都是零”, 所以 “ $ab = 0$ ” 是 “ a, b 都是零” 的必要条件, 但不是充分条件, 故填写 B 。

(3) 由于 “ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” $\nRightarrow$ “ $x = \frac{\pi}{4}$ ”, 但 “ $x = \frac{\pi}{4}$ ”

$\Rightarrow$ “ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”，所以填写B.

(4) “二次三项式 $ax^2 + bx + c (a > 0, b, c \in R)$ 总取非负值”就是 “ $ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0, b, c \in R)$ 对任何 $x \in R$ 成立”.

由于 “ $b^2 - 4ac \leq 0$ ” $\Leftrightarrow$ “ $ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0, b, c \in R)$ 对任何实数 x 成立”，所以填写c.

(5) 如果 $\triangle ABC$ 的一个内角为 60° ，不妨设 $B = 60^\circ$ ，于是 $A + C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，因此 $A + C = 2B$ ，故 A, B, C 成等差数列；

反之，如果 $\triangle ABC$ 的三个内角成等差数列，不妨设 A, B, C 成等差，则 $A + C = 2B$ 。由于 $A + C = 180^\circ - B$ ，所以 $180^\circ - B = 2B$ ，故 $B = 60^\circ$ 。

综上所述，应该填写C.

例5 求证：一次函数 $y = kx + b$ 是奇函数的充要条件是 $b = 0$ 。

证明： 设 $f(x) = kx + b (k \neq 0, x \in R)$ 。

先证充分性，即证 “ $b = 0 \Rightarrow f(x) = kx + b$ 是奇函数”。

当 $b = 0$ 时，对任何 $x \in R$ ，有

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数。

再证必要性，即证 “一次函数 $f(x) = kx + b$ 是奇函数 $\Rightarrow b = 0$ ”。

由于 $f(x) = kx + b$ 是奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ ，对任何 $x \in R$ 成立，即

$$k(-x) + b = -(kx + b),$$

$$-kx + b = -kx - b,$$

上式对任何 $x \in R$ 成立, 所以 $b=0$.

习 题 1-1

1. 用适当的符号 ($\in, \notin, =, \subset, \supset$) 填空:

(1) 0 ____ $\{0\}$; (2) $\{0\}$ ____ $\emptyset$;

(3) $\{0, 1, 2\}$ ____ $\{1, 0, 2\}$;

(4) -4 ____ $\{x | 2x^2 - 5x - 12 = 0, x \in Z\}$;

(5) $\{x | x+1 > 0\} \cap \{x | x-1 > 0\}$ ____ $\{x | (x+1)(x-1) > 0\}$.

2. 用列举法表示下列各集合:

(1) $\{\text{绝对值不大于3的整数}\}$;

(2) $\{x | x^2 - x - 6 < 0, x \in Z\}$;

(3) $\{(x, y) | x+2y=7, x, y \in N\}$;

(4) $\{x | x = \frac{q}{p}, q \in Z, |q| < 2, p \in N, p \leq 3\}$.

3. 填空:

(1) 设 $A = \{x | x \geq 4\}$, $B = \{x | 2 \leq x < 5\}$, 则 $A \cap B =$ ____,
 $A \cup B =$ ____;

(2) 设 $I = R$, $A = \{x | x^2 > 0\}$, $B = \{x | |x+1| \leq 1\}$,

$C = \{x | \frac{x+1}{x} < 1\}$, 则 $\overline{A} =$ ____, $A \cap B =$ ____, $B \cup \overline{C}$
 $=$ ____.

(3) 设 $I = \{\text{三角形}\}$, $P = \{\text{锐角三角形}\}$, $Q = \{\text{钝角三角形}\}$, 那么 $\overline{P} \cap \overline{Q} =$ ____;

(4) 设 $A = \{(x, y) | y = |x| + 1, x \in R\}$, $B = \{(x, y) | y =$

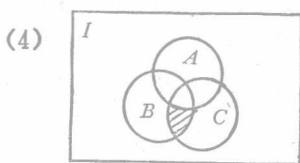
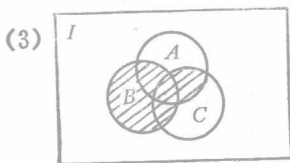
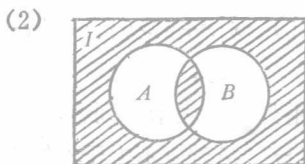
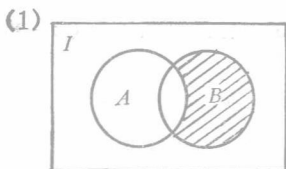
$\frac{1}{2}x + a, x \in R\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

4. 数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \in Z\}$ 与 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \in Z\}$ 之间的关系是 ().

(A) $X \subset Y$. (B) $X \supset Y$.

(C) $X = Y$. (D) $X \neq Y$.

5. 图中 I 为全集, 试用集合 A, B 或 A, B, C 表示图中各阴影部分:



(第5题)

6. (1) 集合 $\{a, b, c\}$ 的子集有多少个?

(2) 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 那么 $A \cup B$ 的真子集有多少个?

7. 设 A, B, C 的意义如例4所述, 则

(1) “ a, b 都是偶数” 是 “ ab 是偶数” 的 ();

(2) “ $x^2 = 5$ ” 是 “ $x = \sqrt{5}$ ” 的 ();

(3) “ $x - 1 = 0$ ” 是 “ $(x - 1)(x - 2) = 0$ ” 的 ();

(4) “ $a \neq 0$ ” 是 “ $ab \neq 0$ ” 的 ();

(5) “ $x < 1$ ” 是 “ $x \leq 1$ ” 的 ();