全国高等师范专科学校教材

中学数学教材教法

第三分册　初等几何研究

赵振威　主编　　章士藻　副主编

华东师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

中学数学教材教法

第三分册 初等几何研究

主　　审　张奠宙

主　　编　赵振威

副 主 编　章士藻

编写人员　赵振威　章士藻
　　　　　何履端　沈培华
　　　　　谭　浩

华东师范大学出版社

中学数学教材教法

第三分册

赵振威 主编

华东师范大学出版社出版

（上海中山北路3663号）

新华书店上海发行所发行 常熟高专印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：7.5 字数： 200 千字

1990年3月第一版 1990年9月第二次印刷

印数：4,001—14,000

ISBN7-5617-0570-0/N·037 定价： 1.85 元

出版说明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决．长期以来，师范专科教材基本上是借用本科的教材，不但借用师范本科教材，而且还借用综合大学的本科教材，不适合师范专科的特点，影响了师范专科的教学质量．近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的科甚至编写了几种，质量参差不齐．虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而限制了师专办学效益的提高，也给师专的教学管理和评估工作带来了许多困难．

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教委师范司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请了全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》；1988年7月又在长春市东北师范大学召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988～1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》．八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理．同时，还准备组织编写二年制音乐、美术、体育和英语专业教材．

在国家教委师范司的统一部署、各省市自治区教委的大力帮助和出版社的积极组织下，聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编．各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，

组织编者收集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续面世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保持与当代科学和师专教育实践的同步发展。

1989年1月

目　录

绪言

§1　几何学的历史简介……………………………………（ 1 ）

§2　初等几何研究的对象和目的…………………………（ 4 ）

第十四章　几何题的证明 ……………………………………（ 8 ）

§1　几何证明的概述…………………………………………（ 8 ）

§2　证度量关系………………………………………………（ 25 ）

§3　证位置关系………………………………………………（ 47 ）

第十五章　几何量的计 算 …………………………………（ 74 ）

§1　线段的度量………………………………………………（ 74 ）

§2　角与弧的度量……………………………………………（ 80 ）

§3　面积的计算………………………………………………（ 82 ）

§4　解三角形 …………………………………………………（ 86 ）

第十六章　初等几何变换 …………………………………（ 95 ）

§1　变换群与几何学…………………………………………（ 95 ）

§2　合同变换…………………………………………………（ 98 ）

§3　相似变换与位似变换……………………………………（ 121 ）

第十七章　轨 迹……………………………………………（ 137 ）

§1　轨迹的基本知识…………………………………………（ 137 ）

§2　轨迹的探求………………………………………………（ 152 ）

第十八章　作 图……………………………………………（ 174 ）

§1　尺规作图的基本知识……………………………………（ 174 ）

§2　常用的作图方法…………………………………………（ 186 ）

第十九章　平面几何教法研究 ……………………………（ 208 ）

§1　平面几何教学的目的和规律……………………………（ 208 ）

§2　入门阶段的教学…………………………………………（ 213 ）

§3　三角形及四边形的教学……………………………………（217）
§4　相似形的教学……………………………………………（223）
§5　圆的教学………………………………………………（225）
§6　轨迹与作图的教学………………………………………（228）
后记

绪　言

“几何”一词，本为希腊文Γεωμετρια，土地测量的意思.几何在我国文言文中原是“多少”的意思，而作为数学专门名词，这是意大利传教士利玛窦和我国明末科学家徐光启1607年合译《几何原本》时首次采用的，以后发展成为数学分支的名称，甚至被亚洲一些国家所采用.

几何学是一门十分古老而又崭新的数学分支．它的产生可追溯到距今8000～14000年的新石器时期，原是研究现实世界空间形式，即研究现实世界物体的形状、大小和相互位置关系的学科，而后发展成为研究一般空间结构的学科.

初等几何是中学数学的基本内容，它在生产实际中有着重要的作用，也是进一步学习整个几何学以至现代数学的基础.

§1　几何学的历史简介

几何学的发展大致经历了四个基本阶段.

1．实验几何的形成和发展

几何学最早产生于对天空星体形状、排列位置的观察，产生于丈量土地、测量容积、制造器皿与绘制图形等实践活动的需要．人们在观察、实践、实验的基础上积累了丰富的几何经验，形成了一批粗略的概念，反映了某些经验事实之间的联系，形成了实验几何.我国古代、古埃及、古印度、巴比仑所研究的几何，大体上就是实验几何学的内容.

例如，我国古代很早就发现了勾股定理和简易测量知识，《墨经》中载有“圜（圆），一中同长也”，“平（平行），同

高也”．古印度人认为“圆面积等于一个矩形的面积，而该矩形的底等于半个圆周，矩形的高等于圆的半径”等等，都属于实验几何学的范畴．

2． 理论几何的形成和发展

随着古埃及、希腊之间贸易与文化的交流，埃及的几何知识逐渐传入希腊．古希腊许多数学家，如泰勒斯（Thales）、毕达哥拉斯（Pythagoras）、柏拉图（Plato）、欧几里德（Euclid）等人都对几何学的研究作出了重大贡献．特别是柏拉图把逻辑学的思想方法引入几何学，确立缜密的定义和明晰的公理作为几何学的基础，尔后欧几里德在前人已有几何知识的基础上，按照严密的逻辑系统编写的《几何原本》十三卷，奠定了理论几何（又称推理几何、演绎几何、公理几何、欧氏几何等）的基础，成为历史上久负盛名的巨著．

《几何原本》尽管存在公理的不完整，论证有时求助于直观等缺陷，但它集古代数学之大成，论证严密，影响深远，所运用的公理化方法对以后数学的发展指出了方向，以至成为整个人类文明发展史上的里程碑，全人类文化遗产中的瑰宝．

3． 解析几何的产生与发展

公元3世纪，《几何原本》的出现，为理论几何奠定了基础．与此同时，人们对圆锥曲线也作了一定研究，发现了圆锥曲线的许多性质．但在后来较长时间里，封建社会中的神学占有统治地位，科学得不到应有的重视．直到15、16世纪欧洲资本主义开始发展起来，随着生产实际的需要，自然科学才得到迅速发展．法国笛卡尔（Descartes）在研究中发现，欧氏几何过分依赖于图形，而传统的代数又完全受公式、法则所约束，他们认为传统的研究圆锥曲线的方法，只重视几何方面，而忽略代数方面，竭力主张将几何、代数结合起来取长补短，认为这是促进数学发展的一个新的途径．

在这样的思想指导下，笛卡尔提出了平面坐标系的概念，实现了点与数对的对应，将圆锥曲线用含有两个未知数的方程来表

示，并且形成了一系列全新的理论与方法，解析几何就这样产生了。

解析几何学的出现，大大拓广了几何学的研究内容，并且促进了几何学的进一步发展。18、19世纪，由于工程、力学和大地测量等方面的需要，又进一步产生了画法几何、射影几何、仿射几何和微分几何等几何学的分支。

4. 现代几何的产生与发展

在初等几何与解析几何的发展过程中，人们不断发现《几何原本》在逻辑上不够严密之处，并不断地充实一些公理，特别是在尝试用其他公理、公设证明第五公设“一条直线与另外两条直线相交，同侧的内角和小于两直角时，这两条直线就在这一侧相交”的失败，促使人们重新考察几何学的逻辑基础，并取得了两方面的突出研究成果。

一方面，从改变几何的公理系统出发，即用和欧氏几何第五公设相矛盾的命题来代替第五公设，从而导致几何学研究对象的根本突破。俄罗斯数学家罗巴切夫斯基用“在同一平面内，过直线外一点可作两条直线平行于已知直线”代替第五公设，由此导出了一系列新结论，如“三角形内角和小于两直角”、“不存在相似而不全等的三角形”等等，后人称为罗氏几何学（又称双曲几何学）。德国数学家黎曼从另一角度，“在同一平面内，过直线外任一点不存在直线平行于已知直线”代替第五公设，同样导致了一系列新理论，如“三角形内角和大于两直角”、“所成三角形与球面三角形有相同面积公式”等，又得到另一种不同的几何学，后人称为黎氏几何学（又称椭圆几何学）。习惯上，人们将罗氏几何、黎氏几何统称为非欧几何学。将欧氏几何（又称抛物几何学）、罗氏几何的公共部分统称为绝对几何学。

另一方面，人们在对欧氏几何公理系统的严格分析中，形成了公理法，并由德国数学家希尔伯特在他所著《几何基础》中完善地建立起严格的公理体系，通常称为希尔伯特公理体系，其结

构为

- 基本概念
  - 基本对象
    - 点
    - 直线
    - 平面
  - 基本关系
    - 结合关系
      - 点在直线上
      - 点在平面上
    - 顺序关系：一点介于两点之间
    - 合同关系
      - 两线段合同
      - 两角合同
  - 根据这些基本概念来定义所有几何概念和关系
- 公理
  - 结合公理($\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_8$)
  - 顺序公理($\mathrm{II}_1-\mathrm{II}_4$)
  - 合同公理($\mathrm{III}_1-\mathrm{III}_5$)
  - 平行公理(Ⅳ)
  - 连续公理($\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2$)
  - 根据这些公理逻辑地推证出所有的定理

希尔伯特公理体系是完备的，即用纯逻辑推理的方法，定能推演出系统严密的欧氏几何学．但如果根据该公理体系，逐步推演出欧氏几何中那些些熟知的内容，却是一件相当繁琐的工作，对此，读者可参阅有关的著作．

§2　初等几何研究的对象和目的

一、初等几何研究的对象

人们将物体抽象而得到几何体的概念，简称体．体由面所围成，面与面相交于线，线与线相交于点．

点、线、面的集合称为几何图形．几何学是研究几何图形性质的科学，即研究几何图形形状、大小、位置关系的科学．所谓图形的大小，就是指图形的度量关系；所谓图形的位置，就是指结合关系、顺序关系、平行关系、合同关系、连续关系等．

初等几何的研究对象，就是以最常见的规则图形——直线形、圆、相似形、柱、锥、台、球等为对象，研究它们的度量性质和基本的位置关系。初等几何又分平面几何与立体几何两部分。平面几何则是研究由点、线二元素集合而成的平面几何图形的度量性质和基本的位置关系；立体几何则是研究由点、线、面三元素集合而成的空间几何图形的度量性质和基本的位置关系。

初等几何有三方面的涵义：

其一，就研究内容来说，它基本上不超出《几何原本》所涉及的范围，即直线、角、直线形、相似形，圆、空间位置关系、多面体和旋转体。对这些图形，主要研究它们有关的相等、不等和成比例等度量关系，以及结合、平行和垂直等位置关系。

其二，就研究方法来说，主要借助于逻辑的方法，而尽量避免借助于直观图形。它们较多侧重于定性地进行研究，而较少地涉及到定量的处理。

其三，就体系安排上，带有运用公理法的倾向，尽可能保证论证的严密性。然而，它不是严格按照希尔伯特体系建立起来的理论几何。这就是说，根据教学的需要，考虑学生的可接受性，某些概念是通过直观描述来定义的。例如“面与面相交于线”，“线与线相交于点”，“线段向两方无限延伸形成直线”等；某些概念不加定义，而直接使用。例如“角”、“始边”、“终边”、“旋转”、“平移”等；扩大公理系统，例如把“两点间距离最短”、“平行线的同位角相等”等等作为公理。这样，对初学几何的学生，不致于一开始就接触到繁难的证明，而有利于教学，又同样可达到培养逻辑推理能力的目的，这正是中学几何课程逻辑体系的特点所在。

二、初等几何研究的目的与方法

在古希腊的普通教育中，《几何原本》成了通用教材，几何教育占有特殊的地位。后来随着中世纪整个文明的衰落，几何教育的地位也有所降低。文艺复兴以后，几何教育的地位和作用才

又重新受到重视，并成为普通数学教育的两大支柱之一。

19世纪末叶以来，传统的几何教育的地位和作用又受到怀疑。每当教学领域考虑重大改革时，往往都拿几何课程开刀，因此，20世纪以来中学几何教育的地位几起几落，至今还没有能形成统一的认识。

今天，我们来恰当地评价初等几何教育的目的和探讨它的研究方法时，既不能扩大，又不能贬低；既要看到几何教育的历史地位，又要看到数学发展的新形势，更要面对当前中学数学教学改革实际，这是我们研究问题的出发点。

首先，初等几何所涉及的几何知识，无论是对进一步学习，还是直接参加生产，或是作为公民的一般素养，都是完全必要的。同时，它在培养和发展逻辑推理能力和空间想象能力，训练正确使用数学语言，掌握一定的绘制图形的技能技巧，初步学会使用现代数学基本研究方法——公理法、演绎法方面都具有重要的意义。

其次，初等几何传统的研究方法“综合法”，即是一种以图形直观分析和逻辑论证相结合的方法。目前教学改革中争论较大的问题是：用综合法研究基本图形是否有意义？能否用解析几何的方法来研究相应的内容？诚然，这些方法都能推导出几何的基本内容，可以作为教材改革的试点，但在人们还未能找到这种可能性变成现实性的合理途径，未能取得足够的教学实践经验之前，对现行的综合几何的作用和地位，仍应予以充分的肯定，给予足够的重视。

再次，在强调综合几何的作用与地位时，也不可忽视教材与教法上的改革。例如，对传统几何内容删繁就简，改革理论几何的逻辑体系，充实几何变换的知识；重视推理方法，而不是追求论证格式；重视一般方法的掌握，而不是追求特殊技巧；重视代数的、几何的、三角的等方法的综合运用，而不是一味追求综合法等等。

本书立足于中学几何教学，把初中几何课本一些基本问题，分别组成几何证明、几何计算、几何变换、轨迹、作图、平面几何教法研究六个专题，在内容上都适当作了延伸和充实，在理论、观点和方法上予以提高，尽可能概括初中几何的全部内容，而又不是初中几何的简单重复，同时对现行初中几何教材进行分析，并提出了一般的教法建议。

第十四章　几何题的证明

几何题的证明，方法灵活，富于变化．总结证题的一般规律，研究证题的思路、方法，积累证题的技能、技巧，历来是几何教学的重要任务．本章从几何题证明的基本思想入手，系统研究度量关系和位置关系几何题的常用证明方法．

§1　几何证明的概述

一、几何证明的一般方法

在本书第三章中，对数学证明方法已作了系统的介绍．无疑，这对几何题的证明也同样是适用的．即几何题的证明方法，按推理的逻辑结构不同，可分为演绎法和归纳法；按推理序列的方向不同，可分为分析法和综合法；按所选证的命题不同，可分为直接证法和间接证法；其中间接证法又有反证法和同一法．对于与自然数有关的命题，一般还可用数学归纳法证明．这些都是几何证题的一般方法，也是综合几何证题的理论基础．

作为具体应用，先来看几个例子．

例1　如图14-1所示，已知$\odot O$的两直径AB与CD互相垂直，E为$\overset{\frown}{AD}$上任意一点，求证：$S_{ACBE}=\frac{1}{2}CE^2$．

证法一（分析法）：考虑$\triangle ACE$和$\triangle BCE$的面积，作$AM\perp CE$于M，作$BN\perp CE$于N，则$S_{ACBE}=\frac{1}{2}(AM+BN)\cdot CE$．

显然，欲证$S_{ACBE}=\frac{1}{2}CE^2$，只要证$CE=AM+BN$即可．

因为$CD \perp AB$，$AC=BC$，

又 $\angle ACB=90°$， $\angle BCN=90°-\angle NCA=\angle MAC$，所以

$\triangle ACM \cong \triangle CBN$，

$CM=BN$。

故欲证$CE=AM+BN$，只要证$AM=EM$，即只要证$\angle AEM=\angle EAM=45°$即可，而 AB、CD 皆为直径，且 $AB \perp CD$，$\angle AEM=\angle ABC=45°$，所以，命题一定成立。

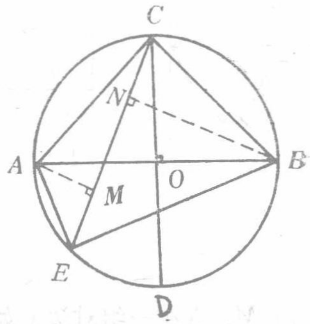

图14-1

证法二（综合法）：

作$AM \perp CE$于 M，$BN \perp CE$ 于 N，则在 $Rt\triangle ACM$ 与 $Rt\triangle CBN$中，注意到$CD \perp AB$，且AB、CD均为直径，有

$$AC=BC，\angle ACB=90°，\angle ACM=90°-\angle BCN=\angle CBN，$$

$$\therefore \quad Rt\triangle ACM \cong Rt\triangle CBN，CM=BN。$$

又在$Rt\triangle AEM$中，有

$$\angle AEM=\angle ABC=45°， \qquad \therefore EM=AM。$$

$$\therefore \quad CE=EM+CM=AM+BN。$$

$$\therefore \quad S_{ACBE}=\frac{1}{2}(AM+BN)\cdot CE=\frac{1}{2}CE^2。$$

例2 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，如果将其分成面积相等的两部分，求证这条曲线的长度不小于1。

证明（归纳法）：

如图14-2所示，单位正方形$ABCD$周界上任意两点M、N的分布有且仅有三种情况：

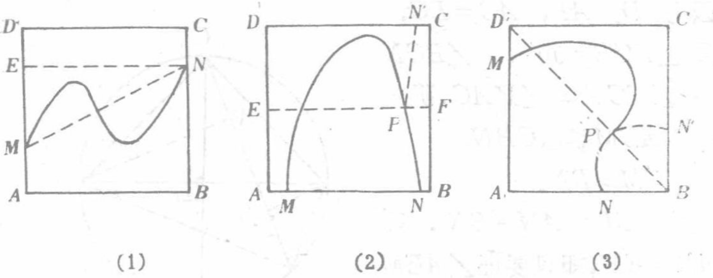

图14-2

(1) M、N在一组对边（如AD、BC）上；

(2) M、N在同一边（如AB）上；

(3) M、N在相邻两边（如AB、AD）上。

如图14-2(1)，连MN，并作$EN /\!/ AB$，则曲线$\overset{\frown}{MN} \geqslant MN \geqslant EN = 1$。

如图14-2(2)，分别取AD、BC中点E、F，设曲线与EF交于P，作$\overset{\frown}{PN}$关于EF的对称图形$\overset{\frown}{PN'}$，则$\overset{\frown}{PN'} = \overset{\frown}{PN}$，由上述(1)显然$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MN'} \geqslant 1$。

如图14-2(3)，连BD，设曲线与BD交于P，作$\overset{\frown}{PN}$关于BD的对称图形$\overset{\frown}{PN'}$，则$\overset{\frown}{PN'} = \overset{\frown}{PN}$。同样，由上述(1)，有$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MN'} \geqslant 1$。

这样，综合以上三种情况，原题即得证。

例3 如图14-3，设E是正方形$ABCD$内一点，且$\angle ECD = \angle EDC = 15°$，求证$\triangle EAB$是正三角形。

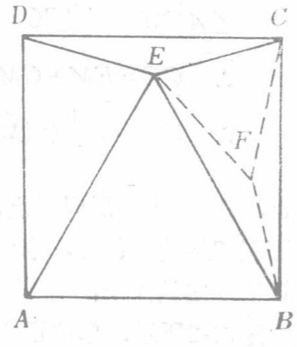

图14-3

证法一 （直接证法）：

$\because \quad \angle EDC = \angle ECD = 15°$，

$\therefore \quad DE = EC$，

$\angle EDA = \angle ECB = 75°$。