經濟學名著翻譯叢書第一四七種

計量經濟學

（下册）

G. S. Maddala 著

吳惠林 譯

臺灣銀行經濟研究室編印

計量經濟學

Econometrics

G. S. Maddala 著

吳 惠 林 譯

第四部　進一層討論選擇性課題

第十二章　不等變異性與自我相關

12-1　緒　論

開始時，我們再回憶我們的模型中關於 y 和 x 間直線關係的基本假設，其可寫成

$$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$$

而且殘差 u_i 滿足下列假設：

1. 對所有的 i 來說，平均數爲 0 ，即 $E(u_i)=0$。
2. 對所有的 i 來說，具均齊變異或有相同的變異數，即 $V(u_i)=\sigma^2$ 。
3. 殘差中呈現序列獨立，即對所有的 $i\neq j$ 來說，u_i 和 u_j 是獨立的。
4. u_i 係常態分配。
5. x_i 係非機遇的或非隨機變數，因而對所有的 i 和 j 來說，u_i 和 x_j 是獨立的。

本章中我們將討論若 1 ， 2 ，和 3 等三種假設皆破壞時，將要怎麼辦。下一章中我們將討論假設 4 的破壞，以及由於變數中誤差所引起的假設 5 之破壞。正如前面已討論過的，假設 5 亦可能由於他種原因而被破壞。

首先，我們來考慮假設 1 的破壞。若對所有的 i 來說 $E(u_i)=\theta$ ，則因可將之歸於常數項，故不會產生問題。此時的迴歸方程式爲 $y_i=(\alpha+\theta)+\beta x_i+V_i$, $V_i=u_i-\theta$ 且 $E(V_i)=0$。然而，若 $E(u_i)=\theta_i$ ，亦即隨觀察值不同而有所差別，則除非我們有重複的觀察值或對於 θ_i 作某些强烈的假設，否則我們對之無能爲力。如：假若我們有 T 期的 N 個農場之產出和勞動投入資料，模型爲：

$$y_{it}=\alpha+\beta x_{it}+u_{it}\quad \begin{matrix} i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ T \end{matrix}$$

而且 $E(u_{it})=\theta_i$, θ_i 被視作所有被忽略掉的實體投入和管理投入。本例中，由於對每個農場來說我們有 T 個觀察值，我們可以用一種虛擬變數法估計 θ_i 。實際上，我們能估計這些常數的 $(N-1)$ 個，而第 N 個則被吸收於常數項中。我們定義虛擬變數如下：

$D_i=1$　代表第 i 個農場

$\quad =0$　代表其他的農場　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ (N-1)$

並且求取 y 對 x 和 $(N-1)$ 個虛擬 D_i 之迴歸。這個模型的更複雜說明將於綜合橫剖面和時間序列資料的章節中討論（第14章）。

殘差具有非零平均數的原因通常係方程式中有變數被遺漏之故。若這些遺漏變數與包含在模型內的變數無關，則上面的方析方式是有效的，並且若這些變數是常數且我們有重覆觀察值時，我們即能對此等變數有某些作爲。上例中的管理投入即爲此等變數之一。然而，若遺漏變數是資本投入，則其與勞動投入會有關係。因此，此時的殘差不僅有一個非零的平均數，而且其與迴歸自變數 x 有關。我們已在前面第九章中考慮過這個問題。我們係謂眞正的關係是

$$y_i=\beta x_i+\gamma z_i+V_i\quad E(V_i)=0 \tag{12-1}$$

但我們却估計

$$y_i=\beta x_i+u_i\qquad E(u_i)=\gamma z_i\neq 0 \tag{12-2}$$

由（12—2）得到的 β 之最小平方估計式係

$$\hat{\beta}=\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}=\frac{\Sigma x_i(\beta x_i+\gamma z_i+V_i)}{\Sigma x_i^2}$$

上式係代入方程式（12—1）中的 y_i 值之結果。由於$E(\Sigma x_i V_i/\Sigma x_i^2)=0$，我們可得

$$E(\hat{\beta})=\beta+\gamma\frac{\Sigma x_i z_i}{\Sigma x_i^2} \tag{12-3}$$

而 $\Sigma x_i z_i/\Sigma z_i^2$ 係 z 對 x 的迴歸之迴歸係數 。因此，$E(\hat{\beta})$ 即等

於 x 的眞實係數加上遺漏變數的眞實係數乘以遺漏變數對包含於模型中的變數迴歸之迴歸係數。因此，最小平方估計式是偏誤的，而且在某些情況我們可以說出偏誤的方向。舉個例來說，若我們考慮的是產出的對數對勞動投入的對數之迴歸，則遺漏變數即係資本投入的對數，而且我們相信勞動投入高的農場也即是資本投入高的農場，由於 $E(\hat{\beta})=\beta+$ 一個正數，故估計的勞動彈性將爲向上偏誤。同樣地，若我們由時間序列資料估計電視機的需要，而且省略了所得變數(所得和價格在時間過程中呈現負相關)，則因 $E(\hat{\beta})=\beta+$ 一個負值且 β 亦係負值，故估計的價格彈性之絕對值亦係向上偏誤。

12-2　不等變異性

我們接著碰到殘差有一個共同的變異數 σ^2 之假設。此即係均齊變異，而此假設之破壞是謂不等變異。這個問題在橫剖面資料比在時間序列資料中更時常發生。Prais 和 Houthakker① 在他們的家庭預算之分析中發現，由迴歸得到的殘差，其變異數隨家計所得增加而加大。

不等變異的結果有兩重。迴歸參數的估計值仍然是不偏但却是無效率的；而且變異數的估計值是偏誤的。爲了明白此點，考慮下面的沒有常數項的最簡單模型。

$$y_i=\beta x_i+u_i \quad V(u_i)=\sigma_i^2 \tag{12-4}$$

最小平方估計式是 $\hat{\beta}=\Sigma x_i y_i/\Sigma x_i^2=\beta+\Sigma x_i u_i/\Sigma x_i^2$ 。若殘差的他種假設皆滿足，則因 $E(\Sigma x_i u_i/\Sigma x_i^2)=0$，我們得 $E(\hat{\beta})=\beta$ 。因此，$\hat{\beta}$ 是不偏的。

$$V(\hat{\beta})=V\left(\frac{x_1}{\Sigma x_1^2}u_1+\frac{x_2}{\Sigma x_i^2}u_2+\cdots+\frac{x_n}{\Sigma x_i^2}u_n\right)$$

$$=\frac{1}{(\Sigma x_i^2)^2}(x_1^2\sigma_1^2+x_2^2\sigma_2^2+\cdots+x_n^2\sigma_n^2)=\frac{\Sigma x_i^2\sigma_i^2}{(\Sigma x_i^2)^2} \tag{12-5}$$

假若我們寫 $\sigma_i^2=\sigma^2 z_i^2$, z_i 爲已知；亦即，我們知道變異數擴大爲一

個加倍的常數。將（12—4）除以 z_i，我們即得模型

$$\frac{y_i}{z_i}=\beta\frac{x_i}{z_i}+V_i$$

此地的 $V_i=u_i/z_i$，其有一個常數變異數 σ^2。由此方程式得到的加權最小平方估計式爲

$$\beta^*=\frac{\Sigma(y_i/z_i)(x_i/z_i)}{\Sigma(x_i/z_i)^2}$$

$$=\beta+\frac{\Sigma[(x_i/z_i)V_i]}{\Sigma(x_i/z_i)^2}$$

由於上式最後一項的期待值爲 0, β^* 亦爲不偏的。

$$V(\beta^*)=\frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i/z_i)^2}$$

而且由（12—5）知道

$$V(\hat{\beta})=\sigma^2\frac{\Sigma x_i^2z_i^2}{(\Sigma x_i^2)^2}$$

因此

$$\frac{V(\beta^*)}{V(\hat{\beta})}=\frac{(\Sigma x_i^2)^2}{[\Sigma(x_i^2/z_i^2)](\Sigma x_i^2z_i^2)}$$

此式亦可表示爲 $(\Sigma a_ib_i)^2/\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2$, $a_i=x_iz_i$ 且 $b_i=x_i/z_i$。因此，除非 a_i 和 b_i 是呈比例的，亦即，x_iz_i 和 x_i/z_i 是呈比例的或 z_i^2 是常數（殘差係均齊變異時即有此種情況），否則上式＜1。

因此，普通最小平方（OLS）估計式是不偏的，但比加權最小平方（WLS）估計式較無效率（即其變異數較大）。

而且，若我們不去管不等變異，我們即會以下式來估計 OLS 估計式 $\hat{\beta}$ 的變異數

$$\frac{殘差\ SS}{n-1}\quad\frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

但是　E（殘差 SS）$=E\left[\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i)^2\right]=\Sigma\sigma_i^2-\dfrac{\Sigma x_i^2\sigma_i^2}{\Sigma x_i^2}$

（此係簡化後之式子，此地省去細節，不過它們却能容易的被導出）。

若 $\sigma_i^2=\sigma^2$（對所有 i 來說），則上式即縮減爲 $(n-1)\sigma^2$。因此，我們能以期待值爲下式的式子來估計 $\hat{\beta}$ 的變異數

$$\frac{\Sigma x_i^2\Sigma\sigma_i^2-\Sigma x_i^2\sigma_i^2}{(n-1)(\Sigma x_i^2)^2}$$

然而眞實的變異數是

$$\frac{\Sigma x_i^2\sigma_i^2}{(\Sigma x_i^2)^2}$$

因此，估計的變異數也是偏誤的。若 σ_i^2 和 x_i^2 像多數經濟資料所顯示的呈現正相關，以至於 $\Sigma x_i^2\sigma_i^2>(1/n)\ \Sigma\sigma_i^2\Sigma x_i^2$，則估計的變異數之期待值小於眞實變異數。因此，我們會〔低估〕OLS 估計式的眞實變異數，而且得到比眞正信任區間還短的信任區間。此亦影響迴歸參數 β 的假設檢定。第一類誤差將比假設值還高。

不等變異問題的解答爲何？若變異數已知擴大爲一個加倍的常數，則便會完全沒有問題。若 $V(u_i)=\sigma^2z_i^2$，此處的 z_i 已知，我們即能以 z_i 遍除方程式而能使用普通最小平方。唯一要記住的事情是若原始的方程式包含一個常數項，亦即 $y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$，則轉換後的方程式將沒有一個常數項，其係

$$\frac{y_i}{z_i}=\alpha\frac{1}{z_i}+\beta\frac{x_i}{z_i}+V_i$$

此地 $V_i=u_i/z_i$。因此，我們應當求取 y_i/z_i 對 $1/z_i$ 和 x_i/z_i 之沒有常數項的迴歸。一件有趣的事情是：當 $V(u_i)=\sigma^2x_i$ 且 $\alpha=0$ 時，轉換後的方程式是

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_i}}=\beta\frac{x_i}{\sqrt{x_i}}+V_i$$

因此

$$\beta^* = \frac{\Sigma(y_i x_i / x_i)}{\Sigma(\sqrt{x_i})^2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

亦即，WLS 估計式恰好是平均數的比率。

我們往往不知道不等變異的本質，Prais 和 Houthakker 兩人考慮了一種特別的模型，他們考慮 σ_i^2 係與迴歸函數的平方成比例，亦即 $\sigma_i^2=\sigma^2(\alpha+\beta x_i)^2$。對於這個模型來說，我們能考慮如下的兩個步驟：先以 OLS 估計 α 和 β，令其估計式爲 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$。其次使用前面說過的 WLS 程序，亦即，求 $y_i/(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i)$ 對$1/(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i)$ 和 $x_i/(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i)$ 的沒有常數項之迴歸。此可以稱爲兩個步驟 WLS 程序。我們能更進一步的重覆這個程序，亦即使用新的 α 和 β 之估計值以及再用 WLS 且重複直至 WLS 收斂爲止。 我們可以稱此爲反覆的 WLS 程序。若我們對殘差的分配作某些特別的假設，如：設其爲常態分配，而後由於 $V(u_i)=\sigma^2(\alpha+\beta x_i)^2$，我們能將對數的概似函數寫成

$$\log L = -n\log\sigma - \Sigma\log(\alpha+\beta x_i) - \frac{1}{2\sigma^2}\Sigma\left(\frac{y_i-\alpha-\beta x_i}{\alpha+\beta x_i}\right)^2$$

我們能以反覆的程序求此式之極大而得到最大概似估計值。②

一個更一般性的模型係假設變異數 σ_i^2 等於 $(\gamma+\delta x_i)^2$， 此時我們也能考慮一種 WLS 方法，亦即，求下式極小

$$\sum_i\left(\frac{y_i-\alpha-\beta x_i}{\gamma+\delta x_i}\right)^2$$

或若殘差能被假設呈現一種已知的分配，則用ML法。如：若呈現一個常態分配，我們即能將對數概似函數寫成

$$\log L = -\Sigma\log(\gamma+\delta x_i) - \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{y_i-\alpha-\beta x_i}{\gamma+\delta x_i}\right)^2$$

我們能以一種反覆程序求取上式極大。很明顯的，WLS 和 ML 程序並不相同。ML 程序已由 Rutemiller 和 Bowers 兩人所討論。③

在 WLS 方法中，我們能用如下的一種兩個步驟之程序。算出 α 和 β 的 OLS 估計式，得到估計的殘差後再求這些殘差的絕對值對x的迴歸來得到 γ 和 δ 的估計值，而後再用 WLS 。我們能反覆此種程序直至得到收斂爲止。

不假設 $V(u_i)=(\gamma+\delta x_i)^2$ ，我們亦能考慮他種如 $\gamma+\delta x_i$ 或 $\gamma+\delta/x_i$ 等等的函數。在每種情況下， $\delta=0$ 的檢定是即一種均齊變異之檢定。此係實際上由 Glejser 提供的程序。④ 若 $|e_i|$ 係由最小平方得到的估計殘差之絕對值。Glejser 建議求下列的迴歸

$$|e_i|=\alpha+\beta x_i$$

$$|e_i|=\alpha+\beta/x_i$$

$$|e_i|=\alpha+\beta\sqrt{x_i}\quad \text{等等}$$

他認爲基於某些抽樣試驗來說，一般而言此種檢定比 Goldfeld 和 Quandt 的更有力量。⑤ Goldfeld 和 Quandt 檢定的觀念係將觀察值分爲兩組，一組對應於 x 的大值，另一組則對應於 x 的小值，每組各求取迴歸式，而後再用 F 檢定來檢定殘差變異數是否相等。他們建議將中間的觀察值省掉，而提高我們區別兩個誤差變異數的能力。另一種無母數檢定係由 Johnston 提出的。⑥ 此係求算殘差的絕對值和 x_i 的絕對值間之等級相關 (rank correlation) ，而後再檢定此相關是否爲 0 。

若觀察值的數目多，我們即能應用一種概度比檢定。將殘差（由 OLS 迴歸估得）分成 k 組，在第 i 組中有 n_i 觀察值，$\Sigma n_i=n$ 。估計每組的殘差變異數，令這些變異數爲 $\hat{\sigma}_i^2$ ， 且令由全部樣本估得的變異數爲 $\hat{\sigma}^2$ 。則若

$$\lambda=\frac{\prod_{i=1}^{k}(\hat{\sigma}_i)^{n_i}}{\hat{\sigma}^n}\tag{12-6}$$

$-2\log\lambda$ 即係一個自由度爲 $k-1$ 的 χ^2 分配 。若方程式中只有一個解釋變數，則殘差的次序即能依這個變數絕對值的大小來決定

。但若有兩個或更多的解釋變數，而且沒有單一個解釋變數能提供一種令人滿意的次序，則應變數的預測值就可能被用上。

當然，對任一種不等變異的檢定來說，在檢定之後的問題往往是做什麼。對 Goldfeld-Quandt 檢定或 Glejser 檢定來說，若我們棄却均齊變異的假設，我們就必須繼續下去再估計參數，而針對不等變異的本質作合適的假設。此等兩個步驟估計式在小樣本中的表現正如（錯誤地）假設不等變異係未知的估計式。應用這些檢定的目的在於避免若均齊變異的假設不被棄却時作更多複雜的計算。但若計算的簡易並非一種重要的評判準則，而且若樣本的大小是中等的，我們即能繼續下去並且對於不等變異的本質作合適的假設，而且同時得到 ML 估計值和適當的 LR 檢定，此即 Rutemiller 和 Bowers 兩人的處理方式。

Feldstein ⑦ 應用（12－6）中說明的 *LR* 檢定於他的醫院成本迴歸（在第八章中已說明）中。他將全部觀察值平分爲四組，殘差的次序依應變數的 OLS 預測值排列。估計的殘差變異數是71.47，114.82，102.81，以及239.34。他發現 $-2\log\lambda$ 的值是18.265。自由度爲 3 的 1％ χ^2 值是11.34。因此，殘差變異數間有顯著的差異。其次他使用 WLS, 以 $\hat{\sigma}_i^{-1}$ 加權組中的每個觀察值。四個組別的權數(常態化使他們的平均等於 1）分別是1.2599，.9940，1.0504，.6885。由再估計方程式得到的新誤差變異數都幾乎相等，各爲106.34，110.71，114.99，以及117.06。然而，迴歸參數却沒變動多少。⑧

其結果載於表12－1中。

表12－1 醫院成本迴歸的 OLS 和 WLS 估計值之比較

何種病患	每個病患的平均成本 OLS	WLS
一般內科	114.48	111.81

小兒科	24.97	28.35
一般外科	32.70	35.07
ENT	15.25	15.58
外傷的和整形外科	39.69	36.04
其他外科	98.02	101.38
婦科	58.72	58.48
產科	34.88	34.50
其他	69.51	66.26

資料來源：M. S. Feldstein, "Economic Analysis for Health Service Efficiency, " p. 54, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967。

本例中所作的假設爲：誤差變異數在四組不同的觀察值中是不同的，亦即，

$$\begin{aligned} V(u_i) &= \sigma_1^2 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1 \\ &= \sigma_2^2 \qquad i=n_1+1,\ \cdots,\ n_1+n_2 \\ &= \sigma_3^2 \qquad i=n_1+n_2+1,\ \cdots,\ n_1+n_2+n_3 \\ &= \sigma_4^2 \qquad i=n_1+n_2+n_3+1,\ \cdots,\ n \end{aligned}$$

對於此種模型來說，Rao⑨ 提出另一個估計殘差變異數的方法，稱爲 MINQUE〔最低基準二次不偏估計值 (minimum-norm quadratic unbiased estimation)〕方法。然而，我們的終極目標在於由變異數的最初估計值來估計迴歸參數，而且基於變異數的 MINQUE 估計值與上例中 Feldstein 所用的一般使用程序比較，是鮮爲人知的。也許差異並不至於那麼大。⑩

Lancaster⑪ 提議在不等變異模型時，使用分組方法。此等方法係由 Wald ⑫ 和 Bartlett ⑬ 在變數誤差模型中，爲估計迴歸參數而提出的。其方式是使用 $\hat{\beta}=(\bar{y}_1-\bar{y}_2)/(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$ 作爲斜率係數的一個估計值，此處 y 和 x 的平均數係包含 n_1 和 n_2 觀察值之兩個相互排斥組別的平均數。在 Wald 的方法中，$n_1=n_2=n/2$，而在 Bartlett 方法中，$n_1=n_2=n/3$（中間$n/3$觀察值被省略了）。

Lancaster 在下列假設下比較這些分組估計式和 OLS 估計式之係數：

A：x 係一個對數常態分配

B：$V(u_i)=\lambda x_i^p$ $(\lambda>0)$

他研究由－2到＋2的 p 之係數，一般的結論是分成三組的 Bartlett 方法優於分成兩組的 Wald 之方法，並且就 p 的正值和 x 的中等數值變異數來說，分組的估計式比 OLS 估計式有效得多。Lancaster 認為大多數的經濟資料皆屬於此類，因此，除了要求算簡單外，在不等變異存在時（時常發生在經濟資料），分組估計式也比 OLS 更為有效。分組估計式的表現，與 WLS 和 ML 估計式之比較却並不清楚。後兩者被認為更好，但它們的求算却複雜許多。

①請見 S. J. Prais 和 H. S. Houthakker, "The Analysis of Family Budgets, "pp. 55ff., Cambridge University Press, New York, 1955。

② Amemiya 在殘差係一個常態，對數常態，以及 gamma 分配時，討論這個模型的最大概似估計值。他也比較了 WLS 和 ML 估計式的漸近有效性。當殘差係一個常態或對數常態分配時，WLS 估計式比 ML 估計式較無效率。但當殘差為 gamma 分配時，兩者有同等效率。請見 T. Amemiya, Regression Analysis When Variance of Dependent Variable Is Proportional to Square of Its Expectation, *Journal of the American Statistical Association*, December, 1973年。

③請見 H. C. Rutemiller 和 D. A. Bowers, Estimation in a Heteroscedastic Regression Model, *Journal of the American Statistical Association*, June 1968年。Rutemiller 和 Bowers 以 OLS 估計參數 α 和 β，且取殘差變異數估計值的平方根作為 γ 的一個估計值（最先的 $\hat{\delta}=0$）。然後他們從這些起始值開始，以一種反覆的程序求算 ML 估計值。他們也以概度比檢定來檢定假設 $\delta=0$。求出 $\delta\neq0$ 時的概似函數之極大，稱之為 L_1；而且又求出 $\delta=0$ 的極大，稱其為 L_0。則 $-2\log(L_0/L_1)$ 即係一個自由度為1之 χ^2 分配。在他們所舉的兩個例子中，在1%水準時皆棄却了 $\delta=0$ 的假設。

④請見 H. Glejser, A New Test for Heteroscedasticity, *Journal of the American Statisitical Association*, March, 1969年。

⑤請見 S. M. Goldfeld 和 R. E. Quandt, Some Tests for Homoscedasticity, *Journal of the American Statistical Association*, September, 1965年。

⑥請見 J. Johnston, "Econometric Methods, " 2d ed., p. 219, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972。

⑦請見 M. S. Feldstein, "Economic Analysis for Health Service Efficiency, " pp. 52—54, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967。

⑧雖然點估計值並沒變動多少，標準差可能是不同的。Feldstein 並未將它們表示出來。甚且，標準差現在是對的，然而在 OLS 中却是偏誤的。

⑨請見 C. R. Rao, Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models, *Journal of the American Statistical Association*, March, 1970年。

⑩此種情況的另一種不等變異模型之證據請見 G. S. Maddala 和 T. D. Mount, A Comparative Study of Alternative Estimators for Variance Components Models, *Journal of the American Association*, June , 1973年。

⑪請見 Tony Lancaster, Grouping Estimators on Heteroscedastic Data, *Journal of the American Statistical Association*, March, 1968年。

⑫請見 A. Wald, The Fitting of Straight Lines if Both Variables Are Subject to Errors, *Annals of Mathematical Statistics*, 1940。

⑬請見 M. S. Bartlett, Fitting a Straight Line When Both Variables Are Subject to Errors, *Biometrics*, 1949。

12-3　不等變異性與平減指數的使用

有兩種時常被提起並亦被使用的不等變異性補救法，一爲將變數轉換成對數， 另一種係將全部變數以某種測量的〔尺寸〕（size）來平減。雖然我們必須決定直線式或是對數式時也須根據其他準則，但前一種方法往往能減少殘差變異數的不等變異。我們將展緩此種討論直到較後階段才進行。

談到平減，正如前面指出的（請見第七章中 7－6 節），若原來的方程式中有一個常數項，我們就不能只估計只有平減過的變數之迴歸方程式。我們亦必須將平減指數的倒數當成一個額外變數，而估計一條沒有常數項的迴歸方程式（除非平減指數也出現在原來的方程式中而成爲一個額外變數）。Griliches① 以估計鐵路成本函數當作一個使用平減指數來解決不等變異的例子，其模型中的變數

有 C＝總成本， M＝鐵路哩數，以及 X＝產出。

若 $C=aM+bX$，除以 M 後成爲 $C/M=a+b(X/M)$，但若眞正的關係是 $C=aM+bX+c$，平減後變成 $C/M=a+b(X/M)+c(1/M)$，對於97個觀察值來說，以1957—1969平均作爲單位，其迴歸結果如下：

$$\underset{}{C/M}=\underset{(6218)}{13{,}016}+\underset{(.871)}{6.431}X/M \qquad R^2=.365$$

$$C/M=\underset{(5115)}{827}+\underset{(.682)}{6.439}X/M+\underset{(393{,}000)}{3{,}065{,}000}\ 1/M \qquad R^2=.614$$

$$C=\underset{(2.906)}{-1.884}M+\underset{(.375)}{6.613}X+\underset{(4730)}{3676} \qquad R^2=.945$$

第二條方程式中的係數 c 是顯著的，但第三條中則否，而 a 的係數值無論在第二或第三條方程式都不顯著。由此等結果， Griliches 下結論說對於任何形式的方程式而言，沒有證據來證明 M 係其中之變數。M在第二條方程式中顯示出係一個顯著變數，此只因其他變數被其所除而已。

利用同樣的資料估計得到的其他方程式如下：

$$C=\underset{(4524)}{2811}+\underset{(.18)}{6.39}X \qquad R^2=.944$$

$$C/\sqrt{M}=\underset{(3713)}{3805}\quad 1/\sqrt{M}+\underset{(.51)}{6.06}X/\sqrt{M} \qquad R^2=.826$$

若 $C=a+bX+u$，且 $V(u)=M\sigma^2$，則最後一條方程式係一條合適的估計式。

有一件重要的事情必須注意，所有這些平減的方法皆在得到更有效的參數估計值。但是一旦那些估計值得到後，我們必須由原先的方程式（而非由平減的方程式）作如下的推論：求算殘差，預測未來值，求在平均數時的彈性等等。

另外要注意的一點是由於平減的目的在於得到更有效估計值，

於是會想到藉由觀察係數的標準差來看出不同方法的優點。然而，正如前面已提過的，當產生不等變異時，標準差本身即是偏誤的，故此種比較並不正確。如：在上面的五條方程式中，第二和第三條是可以互相比較的，第四和第五兩條也是。在兩種情況中，若我們觀察 X係數的標準差，則未經平減方程式的係數比對應的經過平減後之方程式的係數，前者的標準差小於後者。故若標準差是偏誤時，我們必須小心避免過分強調此等差異。倒不如去觀察殘差將能得到較佳的結果。

在上面的例子中我們以哩數 M 作爲平減指數，而且其亦爲一個解釋變數。此時我們必須提及文獻中關於比率間「假性相關」（spurious correlation）的討論。② 即使兩個彼此不相關的變數 X 和 Y，當我們以同一個變數 Z 去平減它們時，由於 X/Z 和 Y/Z 有共同的分母 Z，兩者間的相關可能會很強。若由此推論說 X 和 Y 間存在著密切關係則是錯誤的。當然，若我們的興趣實際上在於X/Z 和 Y/Z 間的相關，則沒有理由稱此種相關爲：「假性」的。正如 Kuh 和 Meyer③ 所指出的，「當假設檢定最初係設定於比率的基礎上時，如相對價格的問題，則假性相關的問題很明顯的不存在。同樣地，當一種像產出的貨幣值之數列被價格指數所除，而得到產出的「固定幣值」估計值時，也沒有假性相關的問題發生。因此，僅當關於未經平減的變數之假設以及資料被另外的序列基於與非機遇性關係的正確假設不相衝突的另一種序列除過後之資料，才會產生假性相關。」

然而，即使在平減係由於估計的原因而做的情況下，我們也要注意，僅當我們不應該基於相關係數來做推論，但卻已經如此做時，「假性相關」的問題才會存在。如：假若我們所導出的關係是下列形式

$$Y=\alpha Z+\beta X+u \qquad (12-7)$$

而且我們發現殘差 u 係不等變異，其變異數大略比例於 Z^2。

則我們必須毫不遲疑的以 Z 遍除（12—7）並且估計下面的迴歸方程式

$$\frac{Y}{Z}=\alpha+\beta\frac{X}{Z}+u' \qquad (12\text{—}8)$$

此時的 $u'=u/Z$ 有一個固定變異數 σ^2。α, β, 和 σ^2 的估計值必定由（12—8）而不是由（12—7）來得到。Y/Z 和 X/Z 間的相關不管是否高於或低於 Y 和 X 間的相關，都是不相干的。要注意的重點是經由觀察相關，我們並不能認為到底（12—7）或（12—8）何者係一條較佳的方程式。只要我們的推論並不基於相關，則此時的平減就沒有錯。另一件必須注意的事是若（12—7）不是齊質的，亦即其包括了一個常數項，則我們最後得到的是一條下面形式的方程式

$$\frac{Y}{Z}=\gamma\frac{1}{Z}+\alpha+\beta\frac{X}{Z}+u'$$

此與（12—8）不同。若 u 的變異數不是比例於 Z^2 而是比例於 Z 或為 Z 的某種其他函數，則方程式亦將不同。

在實際應用上，平減可能增加或減低相關。代數式是有些單調沉悶的，但 Kuh 和 Meyer 以某種簡化的假設，導出在何種條件下，X/Z 和 Y/Z 間的相關確實小於 X 和 Y 間之相關。在已知的特定簡化條件下，「比率的相關高於或低於數字的相關，係依平減指數的變異係數與被平減系列的變異係數之比率是否高於或低於平減指數與被平減系列間相關的兩倍而定。」④

雖然在時間序列問題中也做平減，不過它還是較通常用在横剖面的研究上。觀察值的單位大通常其值也大，小單位的值也將是小的，因而尺寸大小的影響必定被剔除一些了。一般的方法是使用一種尺寸的測量（毛固定資產，總銷售量等等）作為一個平減指數。然而，正如上面的討論所顯示的，是使用這些尺寸大小的變數作為平減指數或將它們用作一個新增的解釋變數，得視殘差的不等變異

之本質以及關係是否爲齊質（亦即，沒包括一個常數項）而定。Kuh 和 Meyer 擧了一個平減可能會造成（而非修正）不等變異性的例子（比例係一個時間序列研究的例子）。

有時，對時間序列資料來說，平減也用來〔逐走一般趨勢〕。此地的問題是一種由於一般趨勢所導致的解釋變數間强烈相互關係的問題，平減在解決這個問題時並不一定對。這個問題是我們在第十章討論過的〔線型重合問題〕。

總之，在計量經濟學領域中，平減或比率變數時常被使用。它們係由經濟理由或安定殘差變異數的統計方式來調整。我們必須緊記在心的是，在所要考慮的特別例子中，平減在這些方面是否能用來調整？在任何情況下，平減也許可能增加或減少相關，但這是題外話。我們必須避免的是，不要只由相關（此係往往無法比較的）來下推論。

①參見 Z. Griliches, Railroad Cost Analysis, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Spring, 1972。

②請見 E. Kuh 和 J. R. Meyer, Correlation and Regression Estimates When the Data Are Ratios, *Econometrica*, October, 1955, pp. 400—416。

③同（註 2）書，p. 401。

④同（註 2）書，p. 412。

12-4　不等變異性與分組資料

誤差變異數不相等的另一種情況係當我們處理分組資料時發生。在此情況下，我們有 k 組，而在第 i 組中有 n_i 觀察值（$i=1, 2, \cdots, k$），而且我們使用的是組平均的迴歸。亦即，我們估計下條方程式

$$\bar{y}_i=\alpha+\beta\bar{x}_i+\bar{u}_i \qquad (12\text{—}9)$$

由於若 $\operatorname{var}(u_i)=\sigma^2$ 時，$\operatorname{var}(\bar{u}_i)=\sigma^2/n_i$，故知（12—9）中殘差變異數係常數 σ^2 的倍數。因此，我們容易地能用加權最小平方法。我們以普通最小平方估計下條方程式（沒有常數項）