初中一分册

数学奥林匹克同步训练

（修订版）

魏鸿增 主编

地质出版社

数学奥林匹克同步训练

（修订版）

初中一分册

主编　魏鸿增
编者　张谊宾　闫崇正
　　　王春森　杨春宏　程海奎

地质出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克同步训练：初中一分册/魏鸿增主编；张谊宾等编，
-北京：地质出版社，1994.4（2000.1 重印）
ISBN 7-116-01569-8

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①魏…②张…　Ⅲ. 数学-初中-教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 02910 号

地质出版社出版发行

（100083　北京海淀区学院路 29 号）

责任编辑：郑长胜

北京隆华印刷厂印刷　　新华书店总店科技发行所经销

开本：787×1092 1/16　印张：6.625　字数：148000

2000 年 1 月北京第一版修订・2000 年 1 月北京第三次印刷

印数：15001—25000 册　　定价：6.80 元

ISBN 7-116-01569-8
G・134

修订版说明

《数学奥林匹克同步训练(初中版)》自1994年出版以来，由于它“以教学大纲内容为主，与现行教材同步”的特点而受到广大同学、老师的欢迎与关心。本书被许多学校、班级选做培训教材与参考书，并成为同学们喜爱的课外读物，在一定程度上满足了加强、提高对青少年进行素质教育的社会需要。

当前，中央提出“科教兴国”的伟大战略方针。如何迎接21世纪知识经济的挑战，如何培养大批高素质的优秀人才，已是中学学科教育特别是数学学科教育的重要任务与核心目标。在新世纪到来之际，为共同的战略目标，为满足社会、学校对本书的需求，编者根据这套书的综合使用情况及专家的审查意见进行一次修订，这是很有必要的。这次修订本着“循序渐进、启迪思维、培养能力、提高素质”的精神，继续突出“与现行教材同步进行加宽与提高”这一特点，以发挥出它更高的效益。编者本着对广大青少年的无限厚望，愿意通过这套书在“把传统的应试教育转化到现代素质教育；把知识的直接灌输转化为培养科学精神和创新意识”这两大根本转变上做出新的尝试。

最后，我们在此衷心感谢关心本书第一版并提出过宝贵意见的专家、老师和同学们。

编　者

1999年12月于北京

前　言

近年来中学数学竞赛活动蓬勃开展，日益广泛深入。特别是由于我国中学生在国际数学奥林匹克竞赛中频频取得优异成绩，更加激发了广大青少年钻研数学的浓厚兴趣。数学奥林匹克越来越成为中学生课外生活中具有强大吸引力的重要活动。

初中学生是长身体、出智慧的最好时期，他们是数学奥林匹克优秀选手的预备大军。在国家、社会及家长的关注下，我国各级各类奥林匹克学校成批出现，对青少年的数学教育已呈现出较高的层次。在此形势下我们编写本书是对数学竞赛规律的有益探索，同时也是适应竞赛培训工作的客观需求，满足广大青少年和家长的迫切愿望的。

本书是以数学竞赛大纲为依据，参照初中数学教学大纲，按年级组织内容并编写的数学奥林匹克同步训练教材。全书注重基本内容、基本方法、典型例题及解题技巧的有机结合，并配有足量的精选习题(附解答)。在整体构思上立足同步训练，着眼数学竞赛；在内容编排上注意循序渐进，兼顾各部分内容的有机联系；在解题方法上突出系统性和实用性，注意加强各种技巧的灵活运用。本书将使学生在同步水平基础上，开扩视野，启迪思维，不断提高数学能力和竞技水平。“同步提高”是本书异于其它同类书本的一个显著特点，同步培训、快速奏效是我们共同的追求。

由于水平所限，难免有疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　整数与整除

§1　整　　除

1. 整除的概念和性质

两个整数的和、差、积仍为整数，但一个整数除以一个不等于零的整数，其商不一定是整数. 我们有：

带余除法　如果 a、b 是二个整数，$b\neq 0$，那么一定有并且只有二整数 q、r，使得

$$a=bq+r,\qquad 0\leqslant r<|b|$$

成立.

当 $r=0$ 时，则称 b 整除 a，或说 a 被 b 整除，记作 $b|a$.此时，称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的因数.

由整除的定义易得如下性质：

(1) 若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$.

(2) 若 $a|b$，则 $a|ub$，这里 u 为整数.

(3) 若 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b\pm c)$，进一步有，若 $a|b_1$，$\cdots a|b_n$，则 $a|(u_1b_1\pm u_2b_2\pm\cdots\pm u_nb_n)$，这里 u_1，$\cdots u_n$ 为整数.

(4) 若 $a|b$ 且 $c\neq 0$，则 $ac|bc$；反之，若 $ac|bc$ 且 $c\neq 0$，则 $a|b$.

(5) 若 $a|c$，$b|d$，则 $ab|cd$.

例 1　已知存在正整数 n 使 $1989|\underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}$，若

$$p=\underbrace{11\cdots1}_{n个}\ \underbrace{99\cdots9}_{n个}\ \underbrace{88\cdots8}_{n个}\ \underbrace{99\cdots9}_{n个}$$

求证：$1989|p$.

证 因为 $1989|11\cdots1$，所以存在正整数 q 使得

$11\cdots1=1989\times q$，而

$$\begin{aligned}p&=11\cdots1\times10^{3n}+(9\times11\cdots1)\times10^{2n}+(8\times11\cdots1)\\&\quad\times10^{n}+9\times11\cdots1\\&=11\cdots1\times(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^{n}+9)\\&=1989\times q\times(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^{n}+9)\end{aligned}$$

由整除定义得 $1989|p$.

例 1 是直接用定义来判断一个数整除另一个数，这种方法称为**定义法.**

例 2 若 $(m-p)|(mn+pq)$，证明 $(m-p)|(mq+np)$.

证

$$\begin{aligned}mq+np&=mq+np-mn-pq+mn+pq\\&=q(m-p)-n(m-p)+(mn+pq)\\&=(m-p)(q-n)+(mn+pq)\end{aligned}$$

由于 $(m-p)|(mn+pq)$，$(m-p)|(m-p)(q-n)$，所以 $(m-p)|(mq+np)$，问题得证.

例 2 的证法是将 $mn+pq$ 拆成两部分的和，而每一部分均可被 $m-p$ 整除，然后再利用整除的性质，像这样配凑成具有某种性质的整数的方法，通常称为“**配凑法**”.

例 3 证明：$7|(2222^{5555}+5555^{2222})$.

证 $2222^{5555}+5555^{2222}$

$$=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})$$

因为 $7|(2222+4)$，$7|(5555-4)$，$7|(64-1)$，又有 $(2222+4)|(2222^{5555}+4^{5555})$，$(5555-4)|(5555^{2222}-4^{2222})$，$(64-1)|(64^{1111}-1)\cdot4^{2222}$，所以 $7|(2222^{5555}+5555^{2222})$.

例 4 证明：n 个连续整数中，有且仅有一个是 n 的倍数.

证 设这 n 个整数是

$$m,\ m+1,\ \cdots,\ m+(n-1) \qquad ①$$

以 n 除 m 得 $m=nq+r, 0\leqslant r<n.$

当 $r=0$ 时，m 就是 n 的倍数.

否则当 $0<r\leqslant n-1$ 时，

$$m+n-r=nq+r+n-r=n(q+1)$$

是 n 的倍数，且 $m+n-r$ 是①式中的一个.

由于 n 的两个不同的倍数的差至少是 n，而①中任意两个数之差至多是 $n-1$，所以①中不可能有两个数都是 n 的倍数.

例 5 试问 1993 以内是 3 的倍数但不是 5 的倍数的自然数有几个?

分析 既是 3 的倍数又是 5 的倍数的数一定是 15 的倍数，在所有 3 的倍数中除去那些 15 的倍数剩下的就是 3 的倍数但不是 5 的倍数.

解 利用带余除法有

$$1993=3\times 664+1$$

$$1993=15\times 132+13$$

这两个式子说明，在 1 到 1993 之间的整数有 664 个是 3 的倍数，有 132 个既是 3 的倍数又是 5 的倍数，因此 1993 以内有

$$664-132=532$$

个整数是 3 的倍数但不是 5 的倍数.

例 6 五只猴子分一堆花生，第一只猴子将花生平均分成五堆，余一粒吃掉，带走一堆，第二只猴子将剩余的花生又平均分成五堆，恰余一粒，吃掉后，又带走一堆，如此下去，直

到第五只猴子来分剩余花生时，恰好均分成五堆而余一粒，问这堆花生最少有几粒？

解 依题意，每只猴子所分的那堆花生数都是 5 的倍数余 1，因而可列出下列带余除式：

$N=5A_1+1$，$4A_1=5A_2+1$，$4A_2=5A_3+1$，$4A_3=5A_4+1$，$4A_4=5A_5+1$.

其中 N 表示花生总数，$A_1, A_2, \cdots, A_5$ 表示每只猴子所带走的花生数，即有

$$4A_i=5A_{i+1}+1, i=1,2,3,4;$$

$$4(A_i+1)=5(A_{i+1}+1), i=1,2,3,4;$$

$$A_5+1=\frac{4}{5}(A_4+1)=\left(\frac{4}{5}\right)^2(A_3+1)=\cdots$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^4(A_1+1)$$

由于 A_5+1 为整数，所以 A_1+1 至少应该是 5^4，即 $A_1=5^4-1=624$，由此得 N 的最小数为 $5\times624+1=3121$.

2. 自然数的整除性判别法

(1) 一个自然数的个位数若能被 2(或 5)整除，则这个自然数能被 2(或 5)整除.

(2) 一个自然数的各位数字之和若能被 3(或 9)整除，则这个自然数能被 3(或 9)整除.

(3) 一个自然数的末两位数若能被 4(或 25)整除，则这个自然数能被 4(或 25)整除.

(4) 一个自然数的个位数字以前组成的数与个位数字的 2 倍的差若能被 7 整除，则这个自然数能被 7 整除.

(5) 一个自然数的末三位数若能被 8 整除，则这个自然数能被 8 整除.

(6) 一个自然数的奇数位上的数字之和与偶数位上数字之和的差若能被 11 整除,则这个自然数能被 11 整除.

(7) 一个自然数从个位起向左每三位分为一节,奇数节各数之和与偶数节各数之和的差若能被 7(或 11,或 13)整除,则这个自然数能被 7(或 11,或 13)整除.

例如 38333295 能否被 7 整除? 先将该数分节: 38, 333, 295. 因为奇数节各数之和为

$$38+295=333$$

偶数节各数之和也是 333, 于是

$$(38+295)-333=0$$

而 $7|0$, 故 $7|38333295$.

例 7 证明: $\overline{abcabc}$能被 11 整除.

证一 因为 $(a+c+b)-(b+a+c)=0$ 能被 11 整除, 所以 $11|\overline{abcabc}$.

证二 分节 $\overline{abc}$, $\overline{abc}$.因为 $\overline{abc}-\overline{abc}=0$, $11|0$, 所以 $11|\overline{abcabc}$.

例 8 证明: 如果一个整数能被 8 整除, 那么这个数的个位数字与十位数字的二倍以及百位数字四倍的和能被 8 整除, 并且反过来也成立.

证 设该数为

$$A=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots$$
$$+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$$

其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9$, $i=0,1,\cdots,n$, 且 $a_n\neq 0$.

因为 $a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_3\times 10^3$ 能被 8 整除, 所以只要考查$a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$, 而

$$a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0=8(12a_2+a_1)$$

$$+(4a_2+2a_1+a_0)$$

若 A 能被 8 整除，则有 $4a_2+2a_1+a_0$ 能被 8 整除.反之，若 $4a_2+2a_1+a_0$ 能被 8 整除，则 A 也能被 8 整除.

例 9 有一个 n 位数，将这个 n 位数的数字按逆顺序重新排列得一新数. 证明：新数与原数的差能被 9 整除.

证 设这 n 位数为 A，则

$$A=a_{n-1}\times 10^{n-1}+a_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1\times 10+a_0$$

其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9, i=0,1,\cdots,n-1$，且 $a_{n-1}\neq 0$，将 A 各位上的数字依次按逆顺序排列得新数 A'，则 A' 可表示为

$$A'=a_0\times 10^{n-1}+a_1\times 10^{n-2}+\cdots+a_{n-2}\times 10+a_{n-1}$$

作两数的差

$$\begin{aligned}B&=A'-A\\&=a_0(10^{n-1}-1)+a_1(10^{n-2}-10)+\cdots+a_{n-2}(10\\&\quad-10^{n-2})+a_{n-1}(1-10^{n-1})\\&=a_0(10^{n-1}-1)+10a_1(10^{n-3}-1)+\cdots+10a_{n-2}(1\\&\quad-10^{n-3})+a_{n-1}(1-10^{n-1})\end{aligned}$$

因为 9 整除上式右端的每一项，故 $9|B$.

例 10 今有甲、乙两人作猜数字游戏.甲对乙说：“今有一 n 位数 A，若将此数的数字按逆顺序重新排列得一新数 A'，并已知 $A'-A=B$，请你从 B 中任意去掉一个数字(请你默记心头而不要告诉我)后，将余下的几个数字之和告诉我，我便可猜中你去掉的这个数字是几.”

试问：甲如何能猜中去掉的这个数字，为什么？在什么情况下猜出的数字不准？

解 设乙从 B 中去掉的数字是 x，并设 B 的数字之和减去 x 等于 a，由例 9 知 $9|B$，则由性质(2)知 $a+x$ 可被 9 整除，

即 $a+x=9q$(q 为大于 0 的整数),从而

$$0\leqslant x=9q-a\leqslant 9$$

故当 a 确定时,q 便随之确定,于是由 $x=9q-a$ 可求得 x.

由 $x=9q-a$ 可知,当 a 是 9 的倍数时,得 x 等于 0 或 9,即在差数 B 的数字和中减去的数字差是 9 的倍数时,猜出的数应不唯一.

§2 质数与合数

1. 质数的概念与简单性质

一个大于 1 的整数若只能被 1 和它本身整除,不能被其他正整数整除,这样的正整数叫做**质数**(或称**素数**),而一个正整数除了能被 1 和本身整除以外,还能被另外的正整数整除时,叫做**合数**.由此可知,全体正整数可分为三类: **1**; **全体质数**; **全体合数.**

设 a、b 是不全为零的正整数,若整数 d 是 a 和 b 的因数,则称 d 为 a 和 b 的一个**公因数**,公因数中最大的一个称为**最大公因数**,记作 (a,b),如果 $(a,b)=1$,则称 a 和 b 互质.

我们给出以下性质:

(1) 若 $(a,b)=d$,则存在整数 u、v 使得

$$au+bv=d$$

(2) $(a,b)=1$ 的充分必要条件是存在整数 u、v,使得

$$au+bv=1.$$

(3) 设 $(a,c)=1$, i) 若 $a|bc$,则 $a|b$; ii) 若 $a|b$, $c|b$,则 $ac|b$.

(4) 设 p 是质数,若 $p|ab$,则 $p|a$ 或 $p|b$.

例 1 证明: 如果 a 是一个大于 1 的整数, 则 a 的大于 1 的最小因数一定是质数.

证 若 a 是一个质数, 则 a 的大于 1 的因数只有一个就是 a, 所以 a 的大于 1 的最小因数就是 a, 而 a 是质数.

若 a 是合数, 则 a 除 1 和 a 外一定有其他的正因数, 假设 b 是这些正因数中最小的, 今证 b 是质数, 如若不然, b 是合数不是质数, 所以 b 一定有大于 1 而不等于 b 的因数 c, 由 $c|b$, $b|a$ 可得 $c|a$, 即 c 是 a 的因数, 又有 $1<c<b$, 这与 b 是 a 的大于 1 的最小因数矛盾, 所以 b 是质数, 问题得证.

例 2 证明: 质数有无限多个.

证 假设质数的个数是有限多个, 共有 n 个: $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 令

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

若 N 是质数, 则因 N 不等于 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的任何一个, 故质数的个数至少有 $n+1$ 个, 而与假设质数有 n 个矛盾. 若 N 不是质数, 而由例 1 知 N 的大于 1 的最小因数 p 是质数, 但是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都不是 N 的因数, 因此 p 不等于 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中任何一个, 且是质数, 故在 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 以外还有质数, 这也与假设质数有 n 个矛盾, 问题得证.

例 3 证明: 能够找到 1991 个连续自然数, 它们中恰好只有一个质数.

分析 直接寻找适合于题设条件的 1991 个自然数犹如大海捞针, 但我们可以设计一种方法, 按照这个方法去做一定能够找到 1991 个适合条件的自然数. 这类似于例 2 证明中构造新数 $N=p_1p_2\cdots p_n+1$ 的方法.

证 设 $N=1991!$[1]$+1$.因为质数有无限多，取大于 N 的最小质数 p，由于 $N+k=1991!+k+1=(k+1)b(k=1,2,3,\cdots,1990)$，则易见 $N+1,N+2,\cdots,N+1990$ 均不是质数，且从 $N+1$ 至 $p-1$ 均不是质数.

由于 $p>1991!+1990, p-1990>1991!+1$，所以在 $p,p-1,\cdots,p-1990$ 这 1991 个连续自然数中 p 为质数，其余为合数.

例 2 和例 3 的证明主要是构造了某些特殊结构、特殊性质的整数或整数的组合，使问题得以解决，这种方法一般称为**"构造法"**.

例 4 证明：对任意的自然数 n，$21n+4$ 与 $14n+3$ 互质.

证一 设 $(21n+4,14n+3)=d$，则

$$21n+4=dq_1 \quad ①$$

$$14n+3=dq_2 \quad ②$$

其中 q_1,q_2 为整数.

$3\times$②$-2\times$①得

$$3dq_2-2dq_1=1$$

$$d(3q_2-2q_1)=1$$

这说明 $d|1$，即 $d=1$，所以 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互质.

证二 要证 $(21n+4,14n+3)=1$，只要找到整数 u 和 v，使得 $u(21n+4)+v(14n+3)=1$即可.

因为$3(14n+3)-2(21n+4)=1$，所以 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互质.

例 5 证明：对于任何大于 1 的自然数 n，n^4+4 是合数.

证 为证 $n^4+4(n>1)$是合数，应将 n^4+4 分解成因式后

---

[1] $1991!=1\times2\times3\times\cdots\times1990\times1991$.一般说来$n!=1\times2\times\cdots\times n$，称为$n$阶乘.

再考虑.

$$n^4+4=(n^2+2)n^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

因为 $n>1, n-1>0$，所以 $n^2-2n+2=(n-1)^2+1>1$，同理 $n^2+2n+2>1$，因此 n^4+4 是合数.

例 6 可以被 225 整除并且各位数字仅由 1 和 0 组成的最小自然数是什么?

解 由于 $225=9\times 25$ 且 $(9,25)=1$，所以，根据性质(3)，一个数若能同时被 9 和 25 整除，则一定能被 225 整除. 而一个数的各位数字是 1 和 0，它能被 25 整除，则它的末两位数字必为 00，它能被 9 整除，则它的各位数字之和必为 9 的倍数，即至少有 9 个 1，因而 11111111100 即为所求之数.

例 7 已知全部由 1 组成的 t 位数

$$p_t=\underbrace{11\cdots 1}_{n个}.$$

证明：如果 p_t 是质数，那么 t 也是质数.

证 假设 t 不是质数，则 t 必是 1 或合数.

若 $t=1$，则 $p_t=1$ 显然不是质数，与已知 p_t 是质数矛盾.

若 t 是合数，设 $t=mn$，其中 m、n 为正整数且 $1<m<t$，则

$$p_t=10^{t-1}+10^{t-2}+\cdots+10+1=\frac{10^t-1}{9}$$

$$=\frac{10^{mn}-1}{9}$$

由于

$$10^{mn}-1=(10^m)^n-1=(10^m-1)[(10^m)^{n-1}+(10^m)^{n-2}+\cdots+10^m+1]$$

所以 10^m-1 是 10^t-1 的因数，又由 $1<m<t$ 可得