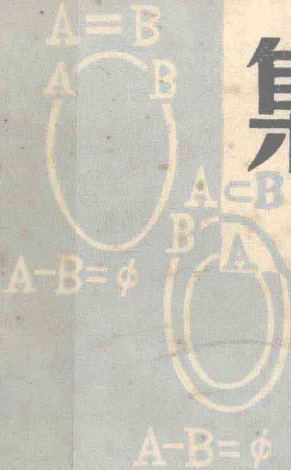
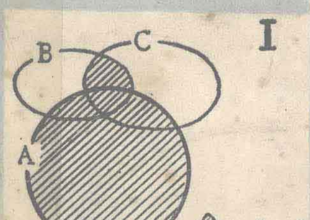
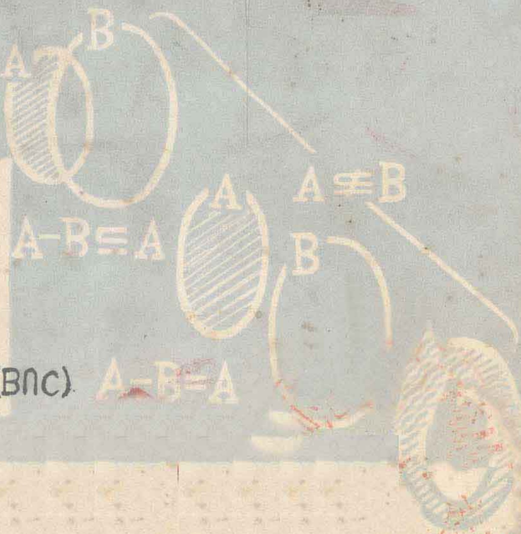
学会内部交流资料

集合论初阶



王和宽编





四川省绵阳地区数学学会

集合论初阶

王和宽　编

四川省绵阳地区数学学会

内 容 简 介

本书较为详尽地述叙了集合论的初步知识。内容包括绪论、集合的运算、映射、集合的势、集合的序等五章。

本书深入浅出，通俗易懂，并有大量的图示和练习题，方便于自学。

本书的主要对象是中小学教师，大学低年级学生和其他需要掌握集合论入门知识的读者。高中学生亦可读懂大部分内容，有些章节和篇目初中学生亦可学习。

学会内部交流资料

集 合 论 初 阶

王和宽　编

本书系本学会内部交流资料，如需翻印请告知本会，征得作者同意，并由原书作者根据使用单位意见补充修订后供稿。

开本 787×1092　1/32　印张6.75　字数134,000
1981年 3 月第 1 版　第 1 次印刷　定价：

编者的话

集合论在今天已经成了整个数学的基础。不管是集合论的理论还是集合论中展示出来的方法，在数学中，甚至在其他自然科学中都显示出越来越巨大的重要作用。学习好集合论的初步知识已经或将要成为对小学生、中学生、大学低年级学生的基本要求。而通俗地阐述这些知识，力求浅显易懂，这是我们的愿望。

在编写的时侯，我们假定学习者不具有或少具有高等数学的知识就能阅读，叙述总是力求详尽、明了、直观；尽量多的对各种问题给以图示；大量的习题是为了巩固和稍稍加深知识而设的，难一点的题目都给了解答提示。当然集合论的学习道路和学习其他科学的道路一样，一定是不平坦的，我们编写的这本小册子，只希望能给攀登者在崎岖的道路上清除一些障碍，前进仍然需要奋发和努力。

这本书的内容，不涉及集合论中一些较高深的部份，那些与高等数学各支有较密切联系的部份均未编入，如点集的理论、集系的理论、空间的理论等等都只好割爱。我们只想写成为一本通俗读物，能给青年学生，中小学教育工作者以及那些愿意和需要学习集合论的人们提供一个初级的阶梯。

如能达到编书的目的，将给我们很大的欣慰。

由于我们知识的局限性，缺点和错误很难避免。殷切地希望读者批评指正。

在这里也向精心审阅此书的我数学会副理事长王怀安先生致以衷心的谢意！向引用其著作而又未提名的学者们致以歉意！

编　　者

1979年7月1日

目　录

第一章　绪　论

集合论是十九世纪末二十世纪初才开始蓬勃发展起来的一个数学分支。德国数学家康托尔（Georg Cantor，1846—1918）是科学集合论的奠基人。虽然集合论的发生历史还不长，但是，现在它已是数学中一门范围很广的科学了。

在这一章里，我们主要是阐述集合的概念，介绍集合的各种表示方法与分析集合间的关系，作为全书的绪论。

§1·1　集合的概念

集合是数学中的基本概念之一，在我们的书里被采用为一个原始概念，不给定义①。我们通常把某些事物的一个完全确定的整体叫做集合，把要研究的对象作为一个总体来对待，便得到集合的概念。

宇宙间存在着各式各样具有某种共同属性的事物，它们常聚集在一起而被研究。例如：

全体自然数，

---

①在现代集合论里，集合这一概念是用公理定义的。

有理数的**总体**，

平面π上的点的**集体**，

平面几何定理的**全体**，

空间中的**全部**平面，

宇宙间星球的**集合**，

一**组**拉丁字母，一**班**学生，一**堆**石头，一**群**羊，一**伙**人等等都给我们以集合的概念。这里全体、集体、总体、组、伙，……等概念都表示所指事物的一个集合。

组成一个集合的每一个对象叫做这个集合的一个**元素**。例如，2是自然数集（“集合”也可简称“集”）的元素，太阳是星球集的元素。为了方便起见，事物a，b，c，……组成集M这一事实记为

$$M=\{a,\ b,\ c,\ \cdots\cdots\}。$$

而“a是集M的元素”这一句话用数学符号写下来就是

$$a\in M \quad 或 \quad M\ni a,$$

读作“元素a属于集M”或简单的读成“a属于M”；若事物a不是集M的元素，我们记为

$$a\ \overline{\in} M 或 \quad M\ \overline{\ni}\ a,$$

读作“a不属于M”。

例1　设A为30的约数（指正约数）的集合，则

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$$

$$1\in A,\ 2\in A,\ 4\ \overline{\in}\ A,\quad 7\ \overline{\in}\ A 等等。$$

这里应该指出，前面描述集合这一概念时曾说：“某些事物的一个完全确定的整体叫集合”。这句话或类似的语句不能作为集合这个概念的定义，因为“整体”与“集合”两个概念实际上是同义的。为了使初学者能较清楚的掌握集合

这一重要概念，我们再作几点说明：

1.我们虽然不给集合这一概念下定义，但是，一个集合是可以指出它含的东西是什么而给以说明的。我们说按某种方式指出一些事物a，b，c，……就确定了一个集合 M，反之我们也认为集合M确定了它所指的事物a，b，c，……，集合与它的元素是相互确定的。我们将遵循这一原则，集合论上把这一原则叫**“外延原则”**①。

2.一个集合可以被某一给定性质所确定。我们认为，任给一个性质P，都存在着一个集合A，它恰好为所具有性质P的那样一些事物所组成。集合论上把这一假定叫做**“概括原则”**②。

根据外延原则与概括原则，给定一个集合必须有明确的界限，也就是说要能确切的判断任何一个事物是否属于这个集合③。我们不能说“很大的数的集合”，“较少的同学的集合”，“一本习题集中难题的集合”等等，因为“很大”，“较少”、“难题”等概念不能给出一个明确的界限。但是我们却能说“有理数的集合，”因为“有理数”能给出一个明确的界限，虽然我们还不知道π^{π}是否有理数，但它属不属于有理数集却是肯定的。

3.集合中的元素的个数可以是有限的，也可以是无限

---

①②集合论的深入研究发现，使用外延原则和概括原则可能导致逻辑悖论，这在下面第9点说明中便可初见。不过，从我们的“朴素的”集合论观点来看，这两个原则还是可以接受的。顺便指出，这两个原则是康托尔首先提出的。③现代数学的一个分支模糊集合论（Fuzzy集论），是研究不清晰对象组成的集合的，不属于本书讨论的范围。

的。也就是说，我们**承认无限集的存在性**。

4.**也承认空集的存在性**。我们规定，把一个元素也没有的集体叫做空集，记为$\varnothing$：

$$\varnothing=\{\quad\}。$$

“$\varnothing$”读作“欧”，是丹麦文字母。

5.集合中的元素一般无顺序可言，集{1，2，3}与{2，3 1，}是同一集合①。

6.同一集中的两个元素应认为是不同的。如a与b是集M的两个元素，则$a\neq b$。方程$x^3+x^2=0$的根的集合为{0，－1}而一般不写成{0，0，－1}。

7.只有一个元素的集合叫**单元集**。{a}是单元集，不要把单元集与它的元混为一谈，即$a\neq\{a\}$。例如“由王强组成的学习组”中，学习组是一个集合，而王强是这集合的元素，王强$\neq$学习组；又如$\{\varnothing\}\neq\varnothing$，$\{\varnothing\}$是单元集，它以空集$\varnothing$为一个元素，$\varnothing$为空集，它没有元素。

8.集合的元素可以是集合，即是说，我们承认由一些集合组成的集合，这样的集合常叫**集系**。例如，平面可以看成线的集合，线可以看成点的集合，于是平面就是点的集合的集合，是一个集系。

9.**“包罗一切的集合”或与此类似的语句要谨慎使用。**如通常所作，我们可以说“一切点的集合”，“一切直线的集合”，可是却不能说“一切集合组成的集合”。错误的说包罗一切的集合，会导致逻辑悖论②。

---

①考虑集合元素的“顺序”的集合叫“有序集”，这是我们第五章讨论的内容。

②逻辑学上的悖论是指从一个命题P出发，可以找到一个命题S，然后推出“S为真的充要条件是$\neg$S（非S）为真”。

〔附〕对于集合论中的悖论的探讨，是推动集合基础理论的研究的动力。这里，我们给读者介绍历史上很有名的两个悖论：

康托尔悖论 康托尔在1899年发现了以他命名的这一悖论。悖论指出按概括原则**能确定**的集合“一切集合组成的集合”是**不存在**的，我们留在§4·6去分析它。

罗素（Roosell）**悖论** 罗素在1901年发现，并在1903年发表的这一悖论的概意如下：用“不以自身为元素的集合”构造一集合L，

$$L=\{A\mid A\notin A\},$$

进而导出矛盾。用我们现在的语言，把不以自身为元素的集叫做**寻常集**（我们总是遇到这样的集），而把“以自身为元素的集”叫做**非寻常集**。根据逻辑学的“排中律”与“矛盾律”，任何一集，或是寻常集或是非寻常集，而不会同是两者。现在我们来看：

如L为寻常集，由于L为所有寻常集组成，则L∈L，这说明L为非寻常的；

如L为非寻常集，那么它应以自身为元素，即L∈L，但L只由寻常集组成，于是作为L的元素的L是寻常集。我们得到一个悖论“L为寻常集的充分必要条件是L为非寻常集”，这就是罗素悖论。

我们约定，在这本书里，研究的集合都是寻常集。

练　习　1·1

1．试说明下列语句都不能作为集合的定义的原因。

（1）“具有某种性质的事或物的总体叫做集合”。

（2）“一类事物叫做一个集合”。

2.举出一些有限集，无限集，多元集，单元集，空集，寻常集的例子。

3.分析下列语句中的逻辑悖理。

（1）“我只能给所有不会给自己照像的人照像”。

（2）“万能的上帝造出了一块谁也举不起的石头”。

（3）“命题P：命题P是不成立的”。

（4）“命题P：命题P是不可证明的”。

（5）“我讲的全是假话”。

§1·2 集合的表示法

数学中常用大写的拉丁字母A，B，C，……表示集合，而用小写的字母a，b，c，……表示集合的元素。要具体的指出一个集合与组成它的元素，常见的表示方法有下列几种：

1.列举法 如果集合A的元素a，b，c，……能列举出来，不管是有限的或是无限的，我们可以把这些元素放在大括号{ }里面，并且用“逗点”把它们彼此分开，记为

$$A=\{a, b, c, \cdots\cdots\},$$

这样的记法叫做列举法，用列举元素法表示集合的依据是外延原则。

例1. 自然数集合：$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$；

偶自然数集合：$\{2, 4, 6, \cdots\cdots, 2n, \cdots\cdots\}$；

3的自然数幂集合：$\{3, 9, 27, \cdots\cdots, 3^n, \cdots\}$；

x^2-3x+2的零点的集合：$\{1, 2\}$；

x^6+1的实零点的集合：$\varnothing=\{\quad\}$。

在用列举法表示一个无限集或元素很多的集的时候往往使用省略号，这时要注意表示的明确性，要使人能从已经列举的元素中能了解到未列出的元素是什么。如$\{-1, 2, 0 -3, 1, -2, \cdots\cdots\}$不能认为是整数集的一个表示，而$\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \cdots\cdots\}$却能认为是整数集的一个表示。

例2. 各种四边形的集合表示为{平形 四 边形，梯形，没有一组对边平行的四边形}。

在用列举法表示例2中这样的集合时，要注 意 概念的外延。我们不要把“各种四边形的集合”记为{正方形，矩形，平行四边形，梯形，对角线相互垂直的四边形，园内接四边形}。因为括号中各种元素 并 不 能 构成“各种四 边 形的集合”。

2.**描述法** 利用概括原则，指出确定集合元素的性 质P而给出集合这种方法叫描述法。用这种方法，具有性质P 的元素a的集合A记为

$$A=\{a|P\}=\{a|P(a)\}①$$

---

①有的书上表示为$\{a; p(a$

例3. 一方程$x^n+a=0$的实数根的集合可以表示为：

$\{x|x$为实数，$x^n+a=0\}$；

偶数集可表为：$\{a|a$为整数，$2|a\}$①；

绝对值小于1的有理数集可表为：

$\{x|x$为有理数，$-1<x<1\}$；

有理数集可表为：

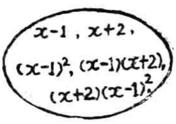
$\{a|a=\dfrac{q}{P}$，P为自然数，q为整数；$(P,|q|)=1\}$②

注意集合$\{x|x$为实数，$x^n+a=0\}$当n为偶自然数，a为正实数时，是一个空集合，这里也可以看出引入没有元素的空集的必要性。

3.**图示法** 用一个园圈，椭园或矩形来表示一个集合，而把集合的元素写在圈子里面，有时也直接用圈子周界上的点和内部的点来表示集合的元素。

例4. 用图示法表示"多项式$(x-1)^2(x+2)$的非常数因式集合"。

解 表示如右图



图示法具有直观性。我们将看到，图示还能直观地表示出集合论中的一些定理。掌握好图示法对我们直观地了解集论的知识很有邦助。集合这种图示叫**韦恩图**③。（韦恩，Venn，是英国数学家）。

---

①$2|a$，表示a能被2整除。

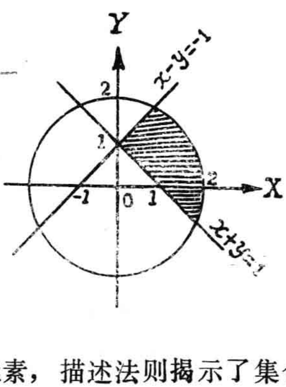
②$(p,|q|)=1$，表示p.$|q|$的最大公约数为1，也就是p，$|q|$互素（或叫互质）。

③有的书上称为"文氏图"。

集合的**另一种**常用的图示是在解析几何中遇到的。在解析几何中，可以借用数轴来表示直线上的点或实数的集合，可以借用平面坐标系来表示平面上的点或实数对的集合。例如我们常用：$[a, b]$，$(a, b]$，$[a, b)$与(a, b)分别表示满足不等式$a \leqslant x \leqslant b$，$a < x \leqslant b$，$a \leqslant x < b$与$a < x < b$的实数集或数轴上的“线节”点集：闭区间，半开区间，半闭区间与开区间。而满足不等式$x \geqslant a$，$x < a$，$x > a$，$x \leqslant a$的实数集（或数轴上的“射线”）用符号$[a, +\infty)$，$(-\infty, a)$ $(a, +\infty)$，$(-\infty, a]$分别表示之。

为了书写的简便，我们还约定下列字母记号来表示一些常见的数集：自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R，复数集C。今后，如无特别声明，我们将遵循这个约定。

例5. 画出集合$A=\{(x, y) | x^2+y^2<4, x+y>1, x-y>-1\}$的图示。



解　满足$x^2+y^2<4$的点在园$x^2+y^2=4$的内部，满足$x+y>1$的点在直线$x+y=1$的上方，满足$x-y>-1$的点在直线$x-y=-1$的下方，故集A的点在图中阴影部分（不包括周界）。

三种表示法，各有其优点。列举法可以具体看清集合的元素，描述法则揭示了集合元素的公共属性，当集合元素很多甚至无限时常用此法，图示法则直观性强，初学者易于理解。在具体使用时要根据情

况合理选取。

练　　习　1·2

1.选取合适的方法表示下列集合

整数平方数集，质数集，12的约数集，12的素因数集，绝对值大于4的整数集，100到1000之间能被7整除的自然数集，被3除余2的整数集，被3除余1的自然数集，三角形集，四边形集，组成水分子的元素的集，组成一个水分子的原子的集，$x^7-2x=0$的复根的集，n次单位根集。

平面上直角坐标变换的集，平面上仿射变换的集。

2.作出下列集合的图示

(1) $A=\{(x, y)|y^2-4x<0, (x+1)^2+y^2\leqslant 9\}$；

(2) $B=\{(x, y)|x^2+2y>0, x^2+y^2\leqslant 4, x^2-y^2>1\}$

(3) $C=\{(x, y)|(x-1)^2+(y+1)^2\geqslant 1, 2x+y\leqslant 2, y-x^2-2x+3\geqslant 0\}$；

3.用描述法表出下列集合

(1) A是满足条件$\sin x>\frac{1}{2}$的实数x的集合；

(2) B是满足条件$\lg(x^2-2x-3)\leqslant 0$的实数x集合。

§1·3　两集合的关系

对于两个集合A与B，我们用a表示A的元素，用b表示B的元素，如果我们考察其中一个集合的元素是否为另一个集合的元素，将会发现下列情况：

(1) 每个$a\in B$，每个$b\in A$（图1.31）；

(2) 每个$a\in B$，存在$b\overline{\in} A$（图1.32）

（3）存在$a\overline{\in}B$，每个$b\in A$（图1.33）

（4）存在 $a\overline{\in}B$存在$b\overline{\in}A$（图1.34）

任取两个集合，我们比较它们的元素就会发现它们必属于上面四种情况的一种，而且只属于一种情况，用韦恩图表示这四种情况如下：

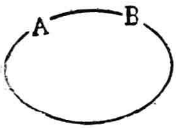


图 1.31

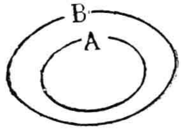


图1.32

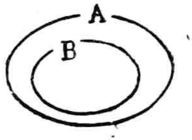


图1.33

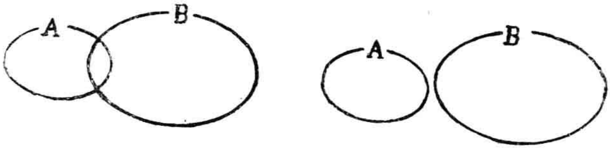


图 1.34

1 **集的相等** 属于（1）的情况称集合A与集合B相等。

定义1·31 两集合的元素如果完全相同，则说这两集合相等，集A与B集相等记为$A=B$。

我们知道，初等几何中的轨迹图形，代数中的函数图象，解析几何中的曲线方程等问题的证明，都涉及到两步：即"纯碎性"（不杂）和"完备性"（不漏），实质上就是证明两集相等。解方程（或不等式）一般都是通过同解变换来实现的。其理论根据是原方程（或不等式）与变换后的方程（或不等式）的解的集合相等。