全国中考数学

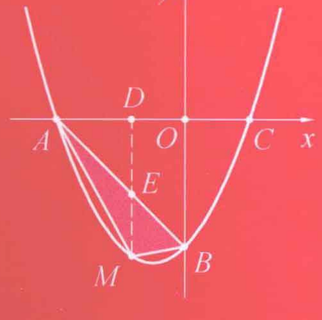
压轴题

审题要津与解法研究

(0,1)

O

$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$



策　划：王成维

主　编：孙家文

副主编：余凤冈

邵德彪

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国中考数学

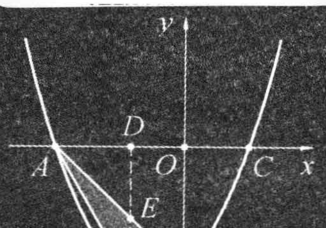
压轴题

审题要津与解法研究

(0,1)

O

$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$



策　划：王成维

主　编：孙家文

副主编：余凤冈

　　　　邵德彪

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书以十二个专题对中考数学进行深入剖析，分别是几何综合题、坐标与几何、图形中点的运动图形的折叠、旋转及剪拼、代数综合题，等等，本书着重解决中考数学中学生普遍感觉困惑的疑问、难点、重点问题. 本书是备考中考的精萃解题大典.

本书适合初中生学习和初中教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

全国中考数学压轴题审题要津与解法研究/孙家文主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.5

ISBN 978-7-5603-4057-9

Ⅰ.①全… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①中数数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 081684 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 慧 刘家琳 齐新宇 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451—86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张 33.75 字数 898 千字
版 次 2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4057-9
定 价 78.00 元

《全国中考数学压轴题审题要津与解法研究》编委会

前言

中考对数学成绩层次的区分和对优秀生的选拔主要依靠压轴题来完成预设目标.新课程改革以来,一些省市在适当调整各类题型的最后一题难度的同时,相应地提高了倒数第二题的难度.本书所有题目,都是从近几年来全国各地中考数学试卷中的选择、填空和解答题的最后两题当中精选出来的.

这些题目突出的是:综合性、深刻性、灵活性、创新性和阶梯性.这些特征既体现在命题设计上,又体现于我们审题和解题的感悟之中.综合性是指它广泛覆盖初中数学的重点知识,全面考察解决数学问题的各种数学方法;深刻性是指它凸现数学知识和方法的本质,突显数学思想的应用价值;灵活性是指在解题过程中要善于掌握图形与数式的转换,实际问题向数学模型的转换,以及不同思维角度的转换;创新性是指命题设计的不断出新以及解决问题所需要的创新意识和创造能力;而阶梯性既指命题设计中把握"起点低、坡度缓、尾巴翘"的原则,以使不同层次的学生都能得到符合自己真实水平的成绩,又指在解答过程中需要制定的合理解题程序,步步攀登,直至终极目标.

压轴题是中考试题中的精华,它凝聚着命题者的智慧与心血.不少压轴题或从课本的例题、习题演变、延伸而来,或从实际生活中提炼、归纳而成.多数压轴题将代数与几何的核心知识科学整合,合理链接,寓意深刻.一些压轴题精致灵动,把观察、探求、计算和证明巧妙融合,可谓独具匠心.近年来的压轴题多以平移、旋转、翻折等图形变换与直线、抛物线、双曲线有机结合,在平面直角坐标系这个舞台上联袂演出压轴大戏,动静有秩,高潮迭起,充满创意,令人赏心悦目!我们深感有责任将它们归集成册,以飨读者.

不久之前应光明日报出版社之邀,我们编写出版了《中考精品试题解析与研究》,限于篇幅,忍痛删去了压轴题一章.承蒙哈尔滨工业大学出版社刘培杰

先生的垂青，遂又重新着手弥补上述缺憾．编写伊始我们相互约定："每位编者都要按分工独立思考解答，谁也不准看参考答案"．在这紧张忙碌的百日之内，每位编委都经历了灯下夜战与室内踱步相伴，苦思冥想与拍案而起相生，突围成功与一气呵成相随．火花伴着逾越"题坎"，灵感随着清除"题障"，智慧源自多年功底．尔后的自查互查阶段又经历了：肯定与否定的交锋，欣赏与争论的碰撞，于是催生出更简捷、更优美的思路，蕴育出更合理、更圆满的解答．这是对我们所拥有的数学知识的一次大的洗礼，也是对我们自身数学能力的一次大的提升．

编写过程中我们也有难言的苦衷：一是因为不同压轴题之间所涉及的知识和解决方法往往"你中有我，我中有你"，很难对它进行"不重不漏"的科学分类；二是难以归纳出解答所有压轴题的通性通法．编写此书的实践，终于使我们感悟到：压轴题的难以分类和它的解无定法，正是压轴题本身的魅力之所在！

本书分为12个专题．这些专题的称谓主要是根据题目及其中图形所呈现出来的形式来确定的．其出发点，谨在于使学生和老师容易查找．本书鲜明的特色是每一道题的解答前后都分别设计了"审题要津"和"解法研究"．而这正是诸位编委亲历审题思考——解题设计——分析解答——矫正反思——归纳提升的全过程后，其心得体会和经验教训的结晶．

"审题的深透程度是决定解题顺利与否的关键"．压轴题从题设到结论，从内容到图形，内涵丰富，条件隐蔽，本书之所以突出"审题要津"，意在引导读者捕捉题干中的隐情，辨识图形中的内涵，及时发现合理的解题入口，从而迅速把握解题抓手，架设由题设条件通往终极目标的桥梁，借此引导学生步步深入，层层闯关．

圆满地解答压轴题，既需要扎实的数学基础知识，全面的数学能力及良好的表达方式，更需要以基本的数学思想为支撑，正确处理数与形，动与静，直接与间接，正面与侧面，特殊与一般，整体与局部的辩证关系．要善于转化，善于调整．压轴题的深刻内涵和解答过程的艰辛，必将给予学生和老师以深刻丰富的启示和弥久弥醇的回味．"解法研究"不仅给出该题不同思路，同时归纳总结一般规律及派生的结论，与此同时也指出解答本题的关键所在及易错点和需要注意的环节，以指导学生解后反思，触类旁通，提升能力，优化思维．

我们相信阅读本书的莘莘学子一定会从"审题要津"与"解法研究"中感受到深入浅出的点拨指引，领悟到高屋建瓴的数学思维．我们更期待阅读本书的教师同仁通过邮件（邮箱：XDLH1@yahoo.com.cn）提出自己的卓见．

本书虽已竣工，研究未有穷期．丰富多彩的压轴题必将创设出浓厚的研究氛围，不断创新的压轴题也必将引发出新的研究课题．愿本书能成为引玉之砖．

南开大学应届毕业生郭文峰，天津理工大学应届毕业生徐廼苓，以及天津新华中学李智，实验中学岳晓斐，天津一中刘润哲，第二南开中学徐雅楠等同学在本书付梓之前的勘校工作中投入了大量的精力，对此我代表本书编委会全体同仁向这些同学表示由衷的谢意．

孙家文

目　录

专题一　几何综合题　//　1

专题二　坐标与几何　//　60

专题三　图形中点的运动　//　112

专题四　图形的折叠、旋转及剪拼　//　153

专题五　代数综合题　//　217

专题六　抛物线与三角形　//　259

专题七　抛物线与四边形　//　305

专题八　抛物线与圆　//　343

专题九　抛物线的平移及翻转　//　376

专题十　反比例函数与几何图形　//　401

专题十一　图形规律的探究　//　441

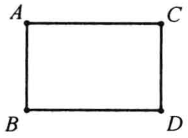
专题十二　有实际背景的应用问题　//　490

专题一　　几何综合题

一、选择题

1.（2011内蒙古乌兰察布10） 如图，已知矩形 $ABCD$，一条直线将该矩形 $ABCD$ 分割成两个多边形，若这两个多边形的内角和分别为 M 和 N，$M+N$ 不可能是（　　）.

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 630°



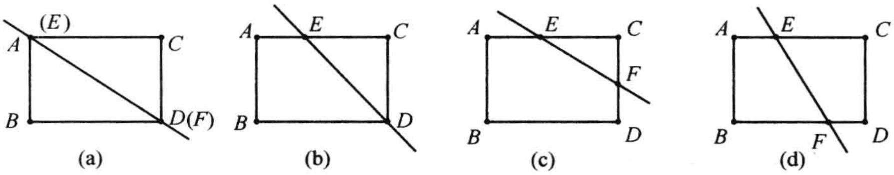
1 题图

【审题要津】 一条直线将矩形分割成两个多边形，虽然会出现多种情况，但每个多边形的内角和均应是 180° 的整数倍，据此即可直接求解.

解　依审题要津，由 630° 不是 180° 的整数倍，选 D.

【解法研究】 实际上，一条直线将矩形 $ABCD$ 分割成两个多边形，有以下四种情况：如图(a)，该直线经过矩形的相对的两个顶点，将矩形分割成两个直角三角形，则 $M+N=360°$；如图(b)，直线经过矩形的一个顶点，并与矩形的一条边相交，则该直线将矩形分割成一个三角形和一个四边形，则 $M+N=540°$；如图(c)，一条直线与矩形的相邻的两条边相交，则该直线顶点，将矩形分割成一个三角形和一个五边形，则 $M+N=720°$；如图(d)，一条直线与矩形的一组对边相交，则该直线将矩形分割成两个四边形，此时 $M+N=720°$. 所以这两个多边形内角和不可能的是 630°.

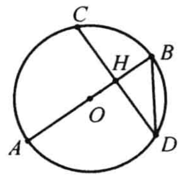
（郝海龙供解）



1 题答案图

2.（2009安徽省9） 如图，弦 CD 垂直于 $\odot O$ 的直径 AB，垂足为 H，且 $CD=2\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$，则 AB 的长为（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5



2 题图

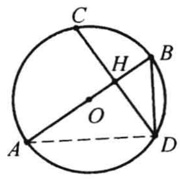
【审题要津】 由直径 $AB\perp CD$，又 CD 为 $\odot O$ 的弦，故 H 为 CD 中点，由题设，可知 $HD=\frac{1}{2}CD=\sqrt{2}$. 又 $BD=\sqrt{3}$，进而由勾股定理易得 $BH=1$. 如图，联结 AD，即可在 Rt$\triangle ABD$ 中，利用射影定理 $BD^2=AB\cdot BH$ 解决问题.

解　依审题要津，可知有 $BD^2=AB\cdot BH$，即 $3=AB\cdot 1$，$AB=3$，故选 B.

【解法研究】 平面几何的计算题，有时需要由已知条件逐步“扩展”，即哪些是可以立即

计算的，再哪些是可以接着计算的. 例如 BH 是可立即计算的，而 AB 只有当 BH 已算出后才能接着算出. 如熟知"相交弦定理"，也可由 $AH \cdot BH = CH \cdot DH$ 直接求解.

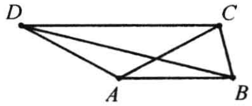
（刘绍峰供解）



2 题答案图

3.（2011 内蒙古呼和浩特 9） 如图所示，四边形 $ABCD$ 中，$DC \parallel AB$，$BC=1$，$AB=AC=AD=2$，则 BD 的长为（　　）.

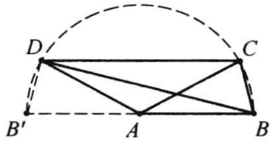
A. $\sqrt{14}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$



3 题图

【审题要津】 依题意，四边形 $ABCD$ 是梯形，尽管题设条件中给出了"$BC=1$"及"$AB=AC=AD=2$"，但针对所求，仅凭题图是难以找到解题入口的. 为此必须通过作辅助线探索解题思路. 因为需要计算的是 BD 之长，因此应设法将 BD 置放于一个直角三角形中. 为了充分利用题设数据解决问题，不妨从关注"$AB=AC=AD$"入手，通过作辅助圆打开僵局：如图，以点 A 为圆心，以 AB 为半径作圆，使之交 BA 的延长线于点 B'，联结 DB'. 由 BB' 为 $\odot A$ 直径，则 $\angle BDB'$ 为直角，以下只需说明 $B'D=BC$，即可利用勾股定理完成所求.

解　依审题要津，如图，由于 CD，BB' 是 $\odot A$ 的平行弦，于是有 $B'D=BC=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BB'D$ 中，因为 $BD^2+B'D^2=B'B^2$，即 $BD^2+1^2=4^2$，所以 $BD=\sqrt{15}$，故选 B.



3 题答案图

【解法研究】 对一般同学来讲，本题属于具有一定难度的试题. 难在构造直角三角形的辅助圆不易想. 实际上，当得知"与定点等距的三个点"时，通常从"不共线的三点决定一个圆"出发来设计辅助线. 汲取这一经验，对提高解题能力是有好处的.

（王成维供解）

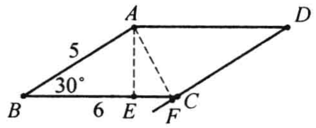
4.（2012 湖北武汉 12） 在面积为 15 的平行四边形 $ABCD$ 中，过点 A 作 AE 垂直于直线 BC 于点 E，作 AF 垂直于直线 CD 于点 F，若 $AB=5$，$BC=6$，则 $CE+CF$ 的值为（　　）.

A. $11+\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$　　B. $11-\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$

C. $11+\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$ 或 $11-\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$　　D. $11+\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$ 或 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

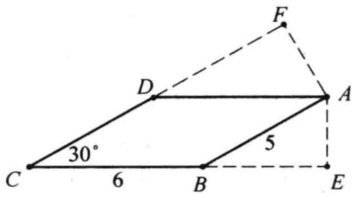
【审题要津】 由"$AB=5$，$BC=6$"及 $S_{\square ABCD}=15$，即可求出 AE 和 AF，注意到本题没有给出图示，且选项 C，D 结果不唯一，因此应留意双解情况. 此时应以 $\angle A$ 和 $\angle B$ 分别为锐角讨论求解.

解　依审题要津，① 如图(a)，当 $\angle B$ 为锐角时，由平行四边形面积公式得：$BC \cdot AE = CD \cdot AF = 15$，即 $6AE=5AF=15$，可得 $AE=\dfrac{5}{2}$，$AF=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，由勾股定理得：$AB^2=AE^2+BE^2$，即 $5^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+BE^2$，所以 $BE=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，类似地可得 $DF=3\sqrt{3}>5$，即点 F 在 DC 的延长线上. 所以 $CE=6-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，$CF=3\sqrt{3}-5$，即 $CE+CF=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



4 题答案图(a)

② 如图(b)，当 $\angle DAB$ 为锐角时，垂足 E,F 分别在 CB，CD 的延长线上. 由 ① 知 $BE=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$DF=3\sqrt{3}$，则 $CE=6+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$CF=5+3\sqrt{3}$，所以 $CE+CF=11+\frac{11\sqrt{3}}{2}$，故选 D.



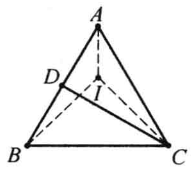
4 题答案图(b)

【解法研究】 “无图几何题”常具有不确定性，因此应配图并通过从讨论入手求解. 如发现平行四边形 $ABCD$ 的一个锐角为 30°，则计算还可更简单. 如单纯为了应试，只分析图(a)，即可选 D.　　（郝海龙供解）

5. (2009 安徽省 10) $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A$ 为锐角，CD 为 AB 边上的高，I 为 $\triangle ACD$ 的内切圆圆心，则 $\angle AIB$ 的度数是(　　).

A. 120°　　B. 125°　　C. 135°　　D. 150°

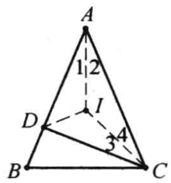
【审题要津】 由于题设条件仅给出了图形结构的特征，而丝毫没有涉及到关于长度的具体数据，因此应考虑从特殊化入手求解. 如图(a) 设 $\triangle ABC$ 为等边三角形，联结 AI,BI,CI. 由对称性，显然有 $\angle AIC=\angle AIB$. 为此只需计算出 $\angle AIC$ 的度数即可.



(a)

解　在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，即知 $\angle DAC=60°$，$\angle ACD=30°$，由 I 为 $\triangle ACD$ 的内心，即知 $\angle CAI=30°$，$\angle ACI=15°$，从而 $\angle AIC=180°-(\angle CAI+\angle ACI)=135°$，故选 C.

【解法研究】 审题举轻若重，解题自然举重若轻. 从特殊化入手，是应试本题的最佳方案. 既便将本题改为填空题，这种以特例取代一般的手段仍可达到化难为简的效果. 如对一般等腰三角形如图(b)，可采取如下思路，在 I 为 Rt$\triangle ACD$ 的内心的条件下，AI 平分 $\angle BAC$，即知 AI 为 $\triangle ABC$ 的对称轴，从而有 $\angle AIB=\angle AIC$. 由 $CD\perp AB$，易知 $\angle DAC+\angle ACD=90°$，即 $2\angle 2+2\angle 4=90°$，故 $\angle 2+\angle 4=45°$，从而可得 $\angle AIC=135°$.　　（王成维供解）

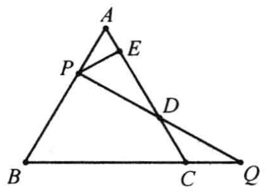


(b)

5 题答案图

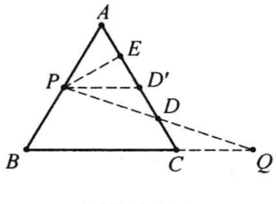
6. (2010 湖北黄冈 15) 如图，过边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P，作 $PE\perp AC$ 于 E，Q 为 BC 延长线上一点，当 $PA=CQ$ 时，连 PQ 交 AC 边于 D，则 DE 的长为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 不能确定



6 题图

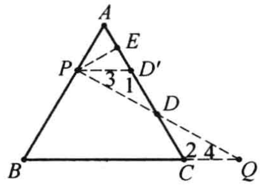
【审题要津】 面对这个一时捉摸不透的问题，可通过特殊化的方法进行探索：若将 AB 边上的点 P 取为端点 B，则点 D 即与点 C 重合. 而由 $PA=CQ$ 可知，此时点 D(即点 C) 则是 BQ 的中点，若引 PE(即 BE) $\perp AC$ 于 E，则点 E 即为 AC 中点，于是 DE(即 CE) 的长度显然等于等边 $\triangle ABC$ 边长的一半，看来所求应当选 B 或 D. 为了证明选 B 的猜想，我们不妨再作进一步的探索：若是点 P 为 AB 的中点，如图(a)，引 $PD'\parallel BC$，交 AC 于 D'. 这样一来，由 $AP=PD'$，知点 E 为 AD' 的中点，随之又有 $PD'=PA=CQ$，若证得 $\triangle PDD'\cong\triangle QDC$，则 D 点又成为 CD' 的中点. 于是可得出 $DE=D'E+D'D=\frac{1}{2}AD'+\frac{1}{2}CD'=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$. 以



6 题答案图(a)

下只需按照如上思路，探索一般情况下的结论，即可求解.

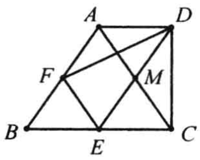
解 如图(b)，引 $PD' /\!/ BC$ 交 AC 于 D'. 易知 $\triangle APD' \backsim \triangle ABC$，于是 $\triangle APD'$ 即为等边三角形，从而 $AP=PD'=CQ$，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所以 $\triangle PDD' \cong \triangle QDC$，故而 $D'D=CD$. 在等边 $\triangle APD'$ 中，由 $PE \perp AD'$ 于 E，即知 $AE=ED'$. 由点 E,D 分别平分 AD',CD'，则知 $DE=\frac{1}{2}AC$. 由等边 $\triangle ABC$ 边长为 1，得 $DE=\frac{1}{2}$. 选 B.



6 题答案图(b)

【解法研究】 实际上，在 $AP=CQ$ 的条件下，注意到“正三角形”的条件，总是应当考虑以等边代换来解决问题. 针对 AP,CQ 各自的位置，显然从 AP 着手为宜. 于是引 $PD' /\!/ BC$ 也就不觉突然了. 除此之外，面对等腰，等边三角形的命题背景，见到垂直于底边的条件，首先要想到三线合一，就本题而言，设法使垂足变成某边中点，也是对如何作辅助线的一个提示. (王成维供解)

7. (2012 山东莱芜 12) 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\angle BCD=90°$，$BC=2AD$，E,F 分别是 BC,BA 的中点，DE 交 AC 于 M，则下列结论不正确的是(   ).

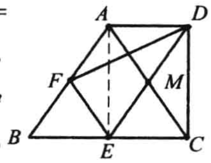


7 题图

A. $\triangle ABC$ 是等腰三角形　　B. 四边形 $EFAM$ 是菱形

C. $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$　　D. DE 平分 $\angle CDF$

【审题要津】 逐一判断，别无它法. 考察 A：由 E 为 BC 中点，又 $BC=2AD$，即知 $EC=AD$，如图，连 AE. 由 $AD /\!/ BC$，即 $AD /\!/ EC$，又 $AD=EC$，则知四边形 $AECD$ 为平行四边形，从而由 $\angle BCD=90°$，及 $AE /\!/ DC$，即知 $AE \perp BC$，于是由 AE 垂直平分 BC，可知 $AB=AC$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，故 A 正确. 考察 B：依上述，四边形 $AECD$ 为平行四边形，于是 M 为 AC 中点，由三角形中位线定理，$EF /\!/ AC$，$EM /\!/ AB$，从而由 $AF=AM$ 及四边形 $EFAM$ 为平行四边形，可知四边形 $EFAM$ 是菱形，故 B 正确. 考察 C：在 $\triangle ABE$ 中，EF 为 AB 边中线，则知 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}$，又 $\triangle ABE \cong \triangle DEC \cong \triangle ACD$，则 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$. 综上所述，选项 D 给出的结论是不正确的，故选 D.



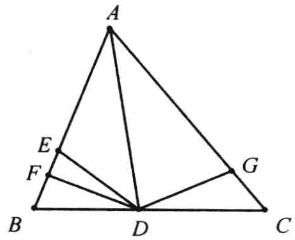
7 题答案图

解 依审题要津，选 D.

【解法研究】 实际上，只有当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，DE 平分 $\angle CDF$ 才能成立(建议同学对此进行思考)，可见若从考察选项 D 入手，则可径直选 D. (郝海龙供解)

8. (2011 湖北恩施 9) 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DF \perp AB$，垂足为 F，$DE=DG$，$\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为 50 和 39，则 $\triangle EDF$ 的面积为(   ).

A. 11　　B. 5.5　　C. 7　　D. 3.5

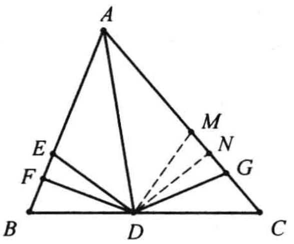


8 题图

【审题要津】 设法将已知其面积的 $\triangle ADG$，$\triangle AED$ 及欲求其面积的 $\triangle EDF$ 统统归纳到一个范畴内，是寻求破解线索的基本思路，而题中恰好含有角平分线及 $DE=DG$ 的条件，因此可从对称的角度考虑构造辅助线，这样就可以把位于角平分线两侧的边角关系，转

移到一侧来整合条件.

解　由于 $S_{\triangle ADG} > S_{\triangle ADE}$，则 $AG > AE$. 在 AC 上截取点 M，使得 $AM = AE$，则 M 在线段 AG 上，联结 DM. 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$AM = AE$，AD 是公共边，故有 $\triangle ADE \cong \triangle ADM$. 即 $S_{\triangle ADM} = 39$. 引 $DN \perp AC$ 于点 N. 因为 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $DF = DN$，又因为 $DE = DG$，$DE = DM$，所以 $DM = DG$，可见 $\triangle DMG$ 等腰，由等腰三角形三线合一定理，所以 $MN = GN$，所以 $S_{\triangle DMN} = S_{\triangle DNG}$. 而由 $DF = DN$，$DE = DM$ 又能推出 $\triangle DEF \cong \triangle DNM$，所以 $S_{\triangle DMG} = 2S_{\triangle EDF}$，因为 $\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为 50 和 39，$S_{\triangle ADG} - S_{\triangle AMD} = 50 - 39 = 11$，所以 $S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5$，故选 B.



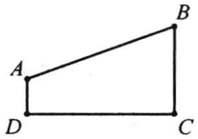
8 题答案图

【解法研究】　利用角平分线这样的已知条件，首先应想到具有便于构建轴对称图形的特殊功能. 自题解中引 $DN \perp AC$ 于点 N 起，即可认作 $\mathrm{Rt}\triangle ADN$ 是由 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 沿 AD 翻折而成，于是 $DE = DM$ 也是显而易见的. 这以下仅需由等腰三角形三线合一定理，即可轻取所求. 当然在 AB 上截取 $AK = AG$，将各要素集中于 $\triangle ADK$ 内也是可行的，但指出 $AG > AE$ 是关键.

（郝海龙供解）

9.（2012 新疆乌鲁木齐 10） 如图，$AD \parallel BC$，$\angle D = 90°$，$AD = 2$，$BC = 5$，$DC = 8$，若在边 DC 上有点 P，使 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 相似，则这样的 P 点有（　　）.

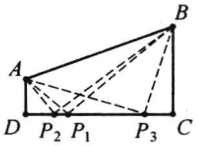
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



9 题图

【审题要津】　考虑到 $\angle D = \angle C = 90°$，若 $\triangle PAD \backsim \triangle PBC$ 有两种可能，一是 $\angle APD = \angle BPC$，二是 $\angle DAP = \angle BPC$. 从而可分别得出不同的比例关系. 根据题设给出的数据，列比例式计算即可.

解　如图所示，$\triangle PAD \backsim \triangle PBC$. 设 $DP = x$，则 $PC = 8 - x(0 < x < 8)$. 若 $\angle APD = \angle BPC$，则有 $\frac{AD}{BC} = \frac{DP}{PC}$，即 $\frac{x}{8-x} = \frac{2}{5}$，解得 $x = \frac{16}{7}$；若 $\angle DAP = \angle BPC$，则有 $\frac{AD}{PC} = \frac{DP}{BC}$，即 $\frac{2}{8-x} = \frac{x}{5}$，解得 $x = 4 \pm \sqrt{6}$；三个解均符合 $0 < x < 8$，故选 C.



9 题答案图

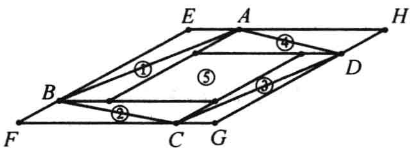
【解法研究】　就应试而言，只要细心，从构图角度亦可分析出符合题意的点 P 在 DC 上有三个位置. 而上述解法，则更为严谨.

（刘绍峰供解）

10.（2011 浙江舟山 10） 如图，①②③④⑤ 五个平行四边形拼成一个含 30° 内角的菱形 $EFGH$（不重叠无缝隙）. 若 ①②③④ 四个平行四边形面积的和为 14 cm²，四边形 $ABCD$ 面积是 11 cm²，则 ①②③④ 四个平行四边形周长的总和为（　　）.

A. 48 cm　　B. 36 cm

C. 24 cm　　D. 18 cm



10 题图

【审题要津】　在 ①②③④ 四个平行四边形中，每一个四边形各取一组（外围的）邻边即可

连成菱形 $EFGH$ 的一周，由此可知，它们的周长的总和恰为菱形 $EFGH$ 周长的 2 倍. 以下只需利用题设其他条件求出菱形 $EFGH$ 的一个边长即可. 为方便起见，不妨设其为 x. 注意到平行四边形的对角线将平行四边形剖分成面积相等的两个三角形，即可根据题设数据完成解答.

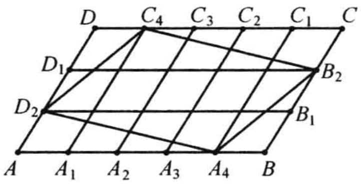
解 依审题要津，显然有 $S_5=S_{ABCD}-\frac{1}{2}(S_1+S_2+S_3+S_4)=11-\frac{1}{2}\times 14=4(\text{cm}^2)$. 所以菱形 $EFGH$ 的面积 $S=14+4=18(\text{cm}^2)$. 设菱形的边长为 x. 因为 $\angle F=30°$，根据 30° 角所对的直角边是斜边长的一半，则菱形的高为 $\frac{1}{2}x$，由菱形的面积公式得：$x\cdot\frac{1}{2}x=18$，解得：$x=6$，所以菱形的边长为 6 cm，从而 ①②③④ 四个平行四边形周长的总和为 $2\times(4\times 6)=48$ (cm). 故选 A.

【解法研究】 作为中心对称图形的平行四边形，具有很强的转换功能，一是由平行线间的距离处处相等，可用来作等积变换；二是对边平行且相等，可用来作等边或等角转换. 除此之外，结合图形本身的中心对称性，又可以用来作分割、剪拼的处理. 解题时要选择合适的方案，发现 ① 至 ④ 四个平行四边形的周长是菱形周长的 2 倍，体现的是整体思想. 用边长的平方乘以两邻边夹角的正弦来表示菱形的面积，也是一法.

（王成维供解）

11.（2008 山东潍坊 11） 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 A_1，A_2，A_3，A_4 和 C_1，C_2，C_3，C_4 分别是 AB 和 CD 的五等分点，点 B_1，B_2 和 D_1，D_2 分别是 BC 和 DA 的三等分点，已知四边形 $A_4B_2C_4D_2$ 的面积为 1，则平行四边形 $ABCD$ 面积为（　　）.

A. 2　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 15



11 题图

【审题要津】 由于边长被“等分”，而题设和所求涉及的又是面积，因此可考虑从等积代换入手求解. 为此可设拥有 15 个小平行四边形的平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $15x$，其中 x 表示每个小平行四边形的面积. 注意到 $\triangle DD_2C_4$ 与 $\triangle BB_2A_4$ 可拼接成一个面积为 $2x$ 的平行四边形，$\triangle D_2AA_4$ 与 $\triangle B_2CC_4$ 可拼接成一个面积为 $4x$ 平行四边形，从而可知四边形 $A_4B_2C_4D_2$ 的面积为 $9x$，据此即可求解.

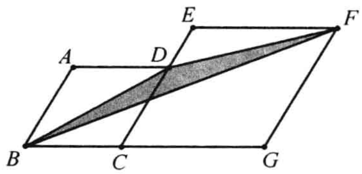
解 依审题要津，$9x=1$，即 $x=\frac{1}{9}$，$15x=\frac{5}{3}$. 故选 C.

【解法研究】 由于各边上的点均为等分点，因此也可以从比例的角度直接计算，设最小的平行四边形的面积为 x，更便于表述.“可拼接”的依据仍然是“平行四边形的对角线平分该平行四边形”. 即便不拼接，也可如下表达：$S_{\triangle DD_2C_4}=S_{\triangle A_4BB_2}=\frac{1}{2}\times 2x=x$，$S_{\triangle D_2AA_4}=S_{\triangle C_4CB_2}=\frac{1}{2}\times 4x=2x$. 于是 $S_{A_4B_2C_4D_2}=(15-6)x=1$，据此同样可解.

（王成维供解）

12.（2012 湖北恩施 12） 如图，菱形 $ABCD$ 和菱形 $ECGF$ 的边长分别为 2 和 3，$\angle A=120°$，则图中阴影部分的面积是（　　）.

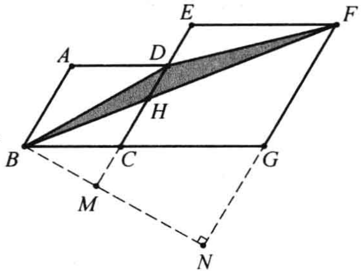
A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\sqrt{2}$



12 题图

【审题要津】 阴影部分图形的面积，可视为四边形 $BGFD$ 与 $\triangle BGF$ 的“差”，而 $BGFD$ 又可视为 $\triangle BCD$ 与梯形 $CGFD$ 的

“和”,算出相关的高,各部分面积即不难求.



12 题答案图

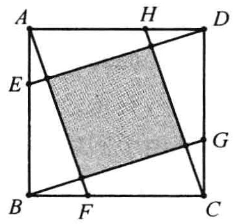
解　过点 B 作 $BN \perp FG$ 的延长线于点 N,延长 EC 交 BN 于点 M.

因为 $\angle A = 120°$,所以 $\angle BCD = \angle BGF = 120°$,$\angle BCM = \angle BGN = 60°$,所以 $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3}$,$BN = \frac{\sqrt{3}}{2}BG = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2+3) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$,$MN = BN - BM = \frac{3}{2}\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BCD} + S_{梯形CDFG} - S_{\triangle BGF} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times (2+3) \times \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$,故选 A.

【解法研究】　两个都是含 60° 角的菱形且边长都已知,根据菱形的特点和特殊角直角三角形的三边关系,其相关线段和面积都可计算出来,其中边长为 a 时,高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,$S_{菱形} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,求阴影部分面积用“割补法”来计算是很常用的方法. 设 BF 交 CE 于 H,则 $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDH} + S_{\triangle FDH}$,以 DH 为底边,两个三角形的高均不难求,又可利用三角形的相似求出 CH,则 DH 易得. 这样解也不失为一个好办法,“加”与“减”哪种方法更好,视条件而定.　(郝海龙供解)

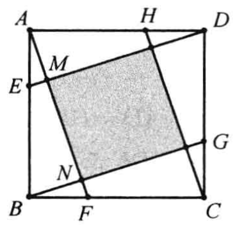
13. (2008 江苏无锡 18) 如图,E,F,G,H 分别为正方形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上的点,且 $AE = BF = CG = DH = \frac{1}{3}AB$,则图中阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为(　　).

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$



13 题图

【审题要津】　首先有 $\triangle ANB$,$\triangle AME$ 均为与 $\triangle ABF$ 相似的直角三角形,题目给出的条件是边与边之比,所求又是面积与面积之比. 因此可考虑利用相似三角形对应边成比例寻找解题入口. 由于已知和所求涉及的均为比值,因此我们不妨设 $AE = 1$,则 $AB = 3$. 由于 $S_{正方形ABCD} = 3^2 = 9$,因此只需求出阴影正方形(不难证明其为正方形)面积即可. 如图,设 AF 交 ED 于 M,交 BG 于 N. 因为 $AB = 3$,$BF = 1$,所以 $AF = \sqrt{10}$,以下只需计算出 AM,即可求得阴影正方形的边长. 为此可通过 $\triangle AEM \backsim \triangle AFB$ 解决问题.



13 题答案图

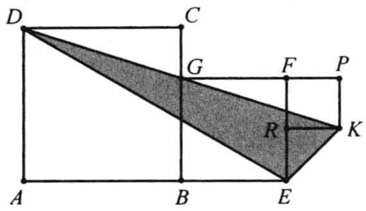
解　设 $AM = x$,依审题要津,$\triangle AEM \backsim \triangle AFB$,所以 $\frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AF}$,即 $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$,$MN = 2AM = \frac{6}{\sqrt{10}}$,所以 $\frac{S_{阴影正方形}}{S_{正方形ABCD}} = \frac{\frac{36}{10}}{9} = \frac{2}{5}$,故选 A.

【解法研究】　如果牢牢抓住比例性质,由 $Rt\triangle AME \backsim Rt\triangle ANB \backsim Rt\triangle ABF$,即可知 $MN = 2AM$,$AM = 3ME = 3NF$,于是 $AF = 10NF$,即知 $NF = \frac{1}{\sqrt{10}}$,$MN = 6NF = \frac{6}{\sqrt{10}}$.

(郝海龙供解)

14.（2010 广西南宁 12） 正方形 $ABCD$，正方形 $BEFG$ 和正方形 $RKPF$ 的位置如图所示，点 G 在线段 DK 上，正方形 $BEFG$ 的边长为 4，则 $\triangle DEK$ 的面积为（　　）.

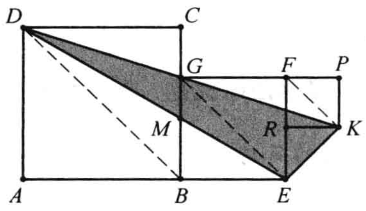
A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16



14 题图

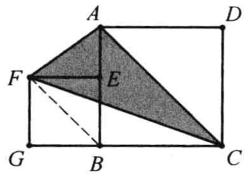
【审题要津】 考虑到这个三角形的三条边都是斜线，而题设只给出了一个正方形的边长，"底"和"高"都无法计算，故需要做等积变换. 从整合图形结构入手，引平行线最为便利. 注意到并排摆放的正方形，对角线 BD，EG，KF 互相平行，则为等积变换提供了方便. 分割或补形后，把阴影部分面积转化到唯一已知边长的正方形中，即可求解.

解 如图(a)，连 DB，GE，FK，则 $DB \parallel GE \parallel FK$，在梯形 $GDBE$ 中，$S_{\triangle DGE}=S_{\triangle BGE}$（同底等高），同理 $S_{\triangle KGE}=S_{\triangle FGE}$. 所以阴影部分面积 $S=S_{\triangle DGE}+S_{\triangle GKE}=S_{\triangle GEB}+S_{\triangle GEF}=S_{\text{正方形}GBEF}=4\times4=16$. 故选 D.



(a)

【解法研究】 本题源于一道经典问题：如图(b)，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 在 AB 边上. 四边形 $EFGB$ 也是正方形，求 $\triangle AFC$ 的面积. 其解法即为联结 BF，把 $\triangle AFC$ 的面积转化为 $\triangle ABC$ 的面积. 在平时解题的过程中，随时注意总结，归纳，类比，延伸，则可积累一些有实用价值的经验.　　（俞风冈）



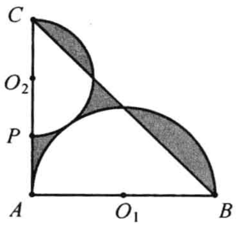
(b)

14 题答案图

15.（2009 四川绵阳 12） 如图，$\triangle ABC$ 是直角边长为 a 的等腰直角三角形，直角边 AB 是半圆 O_1 的直径，半圆 O_2 过点 C 且与半圆 O_1 相切，则图中阴影部分的面积是（　　）.

A. $\frac{7-\pi}{36}a^2$　　B. $\frac{5-\pi}{36}a^2$　　C. $\frac{7}{36}a^2$　　D. $\frac{5}{36}a^2$

【审题要津】 如图(a)，设 BC 与 $\odot O_1$，$\odot O_2$（除 B，C 以外）的交点分别为 D，E. 联结 AD，PE. 因为 AB，CP 分别为 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的直径，所以 $\angle ADB=\angle CEP=90°$，又因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle ACB=\angle ABC=45°$，由此可知 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CPE$ 均为等腰直角三角形. 故 $AD=DB$，$CE=PE$. 于是弓形 DB 与弓形 AD 面积相等，弓形 CE 与弓形 DE 面积相等，进而所求阴影面积可以转化为求直角梯形 $PADE$ 的面积. 为了求直角梯形的面积，首先应当求出 $\odot O_2$ 的半径. 为此，如图(b)，联结 O_1O_2（过点 F），并设 $\odot O_2$ 的半径为 x，以下只需在 $\mathrm{Rt}\triangle AO_1O_2$ 中，利用勾股定理列出关于 x 的方程，即可通过确定 x 来完成解答.

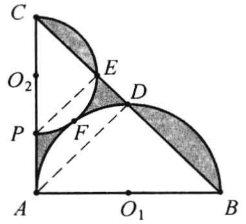


15 题图

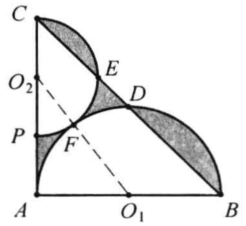
解 如图(b)，联结 O_1O_2. 设 $\odot O_2$ 半径为 x，则 $AO_2=a-x$，$AO_1=\frac{a}{2}$. $O_1O_2=x+\frac{a}{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1AO_2$ 中，$AO_2{}^2+AO_1{}^2=O_1O_2{}^2$，即 $(a-x)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$，解之得 $x=\frac{a}{3}$，即小圆半径为 $\frac{a}{3}$. 因为 AB 为 $\odot O_1$ 直径，所以 $\angle ADB=90°$，又 $\angle ABC=45°$，故 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形. 同理 $\triangle PEC$ 也为等腰直角三角形. 所以 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{梯形}ADEP}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}-S_{\triangle CEP}=$

$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}a^2=\frac{5}{36}a^2$. 故选 D.

【解法研究】 当阴影呈现出不规则图形的时候，求其面积通常需要进行拼接，以便从整体入手解决问题. 这种解题思路的宗旨，是将不规则的图形面积转化为规则图形的面积的和或差. 就本题来说，求出 $x=\frac{a}{3}$ 后，即知 $PE=CE=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，$AD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，则 $DE=CD-CE=\frac{\sqrt{2}}{6}a$. 如此也可直接计算直角梯形 $ADEP$ 的面积. （孙家文供解）



(a)

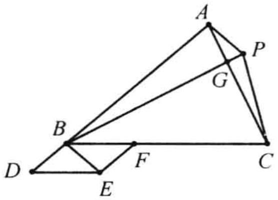


(b)

15 题答案图

16.（2012 四川德阳 11） 如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的延长线上一点，点 F 是边 BC 上的一个动点（不与点 B 重合）. 以 BD，BF 为邻边作平行四边形 $BDEF$，又 $AP \mathrel{\underline{\parallel}} BE$（点 P，E 在直线 AB 的同侧），如果 $BD=\frac{1}{4}AB$，那么 $\triangle PBC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积之比为（　　）.

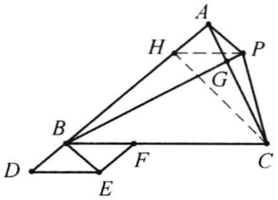
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$



16 题图

【审题要津】 由于 $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共边 BC，因此它们的面积比即为 BC 边上的高之比，于是可考虑在 AB 上找与点 P“等高”的点. 为此，如图，过 P 作 BC 的平行线，交 AB 于 H，连 CH. 显然 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle HBC}$. 以下只需求出 $\frac{HB}{AB}$ 即可. 此时关注条件 $AP \mathrel{\underline{\parallel}} BE$ 及 $PH \parallel ED$，则可由 $\triangle BDE \cong \triangle AHP$ 解决问题.

解　依审题要津，如图，过点 P 作 $PH \parallel BC$ 交 AB 于 H，则 H，P 到 BC 的距离相等. 因为 $AP \parallel BE$，所以 $\angle DBE=\angle HAP$；因为 $HP \parallel DE$，所以 $\angle D=\angle AHP$，又 $BE=AP$，所以 $\triangle BDE \cong \triangle AHP$，从而有 $AH=BD$. 因为 $BD=\frac{1}{4}AB$，所以 $AH=\frac{1}{4}AB$，即 $HB=\frac{3}{4}AB$. 于是可得 $\frac{HB}{AB}=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{S_{\triangle BCH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{4}$，而 $S_{\triangle BCH}=S_{\triangle BCP}$，所以 $\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{4}$，故选 D.



16 题答案图

【解法研究】 题解示范的“同底等高”的转换，使我们顺利地找到了解题入口，这个思路历程颇值得品味. 本题也可以与题意“相悖”，从特殊化入手求解. 令 F 点重合于点 C，如此，则平行四边形 $BDEF$ 与 $\triangle PBC$ 及 $\triangle ABC$ 将以 BC 为公共边. 以下只需利用 $S_{\triangle PBE}=S_{\triangle ABC}$ 及 $BD=\frac{1}{4}AB$，即可求解. 建议同学自行配图作一番思考.（注意：总有 P，F，E 三点共线）

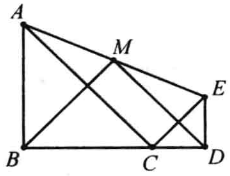
（王成维供解）

17.（2011 四川南充 10） 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等腰直角三角形，点 B，C，D 在一条直线上，点 M 是 AE 的中点，下列结论：

①$\tan\angle AEC=\frac{BC}{CD}$；②$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CDE}\geqslant S_{\triangle ACE}$；③$BM\perp DM$；④$BM=DM$.

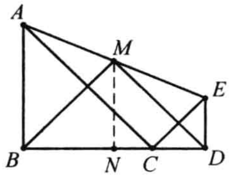
正确结论的个数是(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



17 题图

【审题要津】 根据题设条件，易知四边形 $ABDE$ 是一个直角梯形，其中一个腰等于两底之和，另一腰的中点为 M. 此时应想到结合中位线的知识，将会得到一些有关的信息：如图，引 $MN \perp BD$ 于 N，则 N 为 BD 的中点，且有 $MN = \frac{1}{2}(AB + ED) = \frac{1}{2}(BC + CD) = \frac{1}{2}BD$，随之应判断出 $\triangle BMD$ 既是直角三角形又是等腰三角形. 注意到所有的等腰直角三角形都是相似的，即可利用等腰直角三角形边角的特点及"相似比"解决问题.



17 题答案图

解　考察 ①：两个等腰直角三角形一定是相似的，则 $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$. 由 $\angle ACB = \angle ECD = 45°$，即知 $\angle ACE = 180° - 2 \times 45° = 90°$. 从而 $\tan \angle AEC = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$. 故 ① 正确.

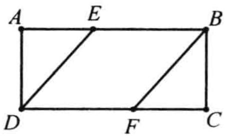
考察 ②：设 AC 为 a，CE 为 b，则 $AB = BC = \frac{\sqrt{2}a}{2}$，$CD = DE = \frac{\sqrt{2}b}{2}$，因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{4}$，$S_{\triangle CDE} = \frac{b^2}{4}$，$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}ab$，所以 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE} - S_{\triangle ACE} = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$，即 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE} \geqslant S_{\triangle ACE}$. 故 ② 正确.

考察 ③ 与 ④：MN 为梯形 $ABDE$ 的中位线，$MN = \frac{1}{2}(AB + DE) = \frac{1}{2}BD$，$\triangle BMD$ 是等腰直角三角形，$BM \perp DM$，$BM = DM$. 可见结论 ③，④ 均正确，故选 D.

【解法研究】 深入发掘题设内涵，充分利用已知条件，是熟练运用综合法解题的关键. 先想自己手中有什么，再想自己能干什么，这便是利用综合法解题的基本要领. 解答此类题目时还要有动态变化的思维意识，本题中等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 大小不论发生任何改变，结论依然成立. 依审题要津所述，综合分析到位，则判断 ①，③，④ 的正确性将手到擒来. 考察 ② 时，如设 $BC = a$，$CD = b$，则问题可转化为 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant ab$，即 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ 是否成立，显然结论是正确的. 此外也可沿着这一线索比较 $S_{\triangle BMD}$ 与 $S_{\triangle ACE}$ 及 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDE}$ 的大小关系，有兴趣的同学不妨一试.

（王成维供解）

18. (2011 浙江杭州 10) 在矩形 $ABCD$ 中，有一个菱形 $BFDE$(点 E，F 分别在线段 AB，CD 上)，记它们的面积分别为 S_{ABCD} 和 S_{BFDE}. 现给出下列命题：



18 题图

① 若 $\frac{S_{ABCD}}{S_{BFDE}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$，则 $\tan \angle EDF = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ② 若 $DE^2 = BD \cdot EF$，则 $DF = 2AD$. 则：(　　).

A. ① 是真命题，② 是真命题　　B. ① 是真命题，② 是假命题

C. ① 是假命题，② 是真命题　　D. ① 是假命题，② 是假命题

【审题要津】 针对所求，不可避免地应对 ①，② 两个命题依次进行考察. 考察 ①：如图，由