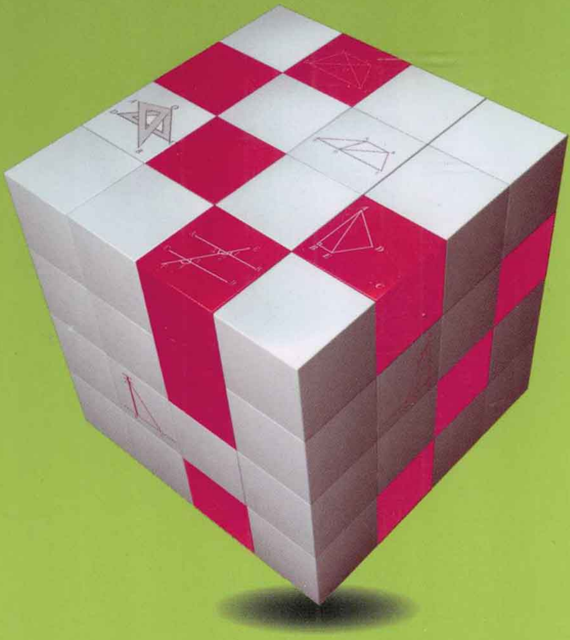
给力数学
GEILI MATHEMATICS



彭林 / 编著

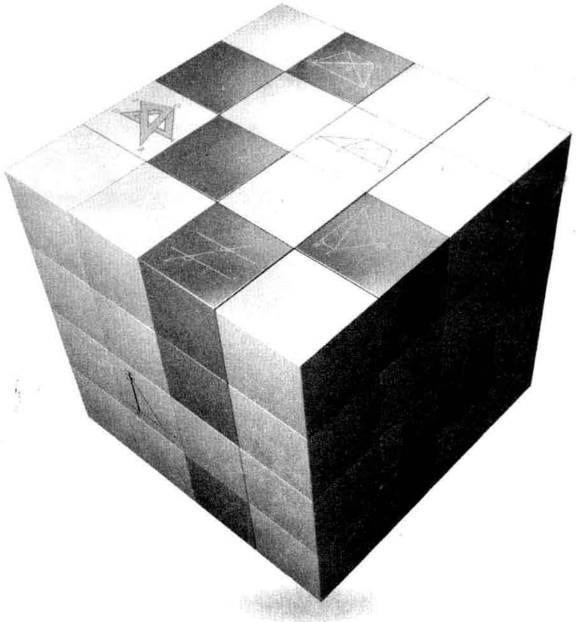
中考数学压轴题

命题思路剖析 必考题型详解

实战真题演练

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

给力数学
GEILI MATHEMATICS



彭林 / 编著

中考数学压轴题

命题思路剖[illegible] ▲ [illegible]必考题型详解

实战真题演练

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

给力数学:中考数学压轴题:命题思路剖析+必考题型详解+实战真题演练/彭林编著. —上海:华东理工大学出版社,2013. 6

ISBN 978-7-5628-3572-1

Ⅰ.①中… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①中学数学课-初中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 116292 号

给力数学:中考数学压轴题
命题思路剖析十必考题型详解十实战真题演练

编　　著 / 彭　林
策划编辑 / 庄晓明
责任编辑 / 庄晓明
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 裘幼华
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252718(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press. ecust. edu. cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 13
字　　数 / 331 千字
版　　次 / 2013 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2013 年 6 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-3572-1
定　　价 / 29.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust. edu. cn
官方微博 e. weibo. com/ecustpress
淘宝官网 http://shop61951206. taobao. com

2

目 录

第一单元

中考数学压轴题破解策略

要想成功破解综合题，我们首先要了解综合题的特点.

一般来说，综合题里包含的知识点较多，隐含的数量关系或图形性质较多，有的综合题可能蕴含多种数学思想，有的综合题可能设计新颖，甚至表面上根本看不出解题的影子，有的综合题在解题上还可能有一定的技巧性.

但是，所有的综合题，不管哪一种类型，在分析解决它们的过程中，总有普遍且通用的规律可循，这也正是我们探寻综合题的解法的意义所在.

一　我们该怎么去审题

什么是审题？审题在解题中占什么地位呢？通俗地讲，审题就是当你拿到一个题目时，应该如何找到思路并且整理好思路去解这个题.

首先，你必须弄清问题：未知是什么？已知是什么？

其次，进一步审题：你是否知道与此题有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

你以前见过这个问题吗？你是否见过类似的问题而形式稍有不同？

看着未知数，试想出一个具有相同的未知数或相似未知数的熟悉问题.

你能不能从已知条件推出某些有用的东西？你是否利用了所有已知数据？你是否利用了所有的条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要概念？

例 1　已知一次函数 $y=kx+b$，当 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-3\leqslant y\leqslant 5$，求此函数的关系式.

解析： 你是这样做的吗？

$\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点$(-2,-3)$，$(3,5)$，

$\therefore \begin{cases}-2k+b=-3,\\ 3k+b=5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{8}{5},\\ b=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 此函数的关系为 $y=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{1}{5}$.

这样的解法是错误的！错误的原因就是审题不清，没有真正弄清函数图像经过哪两个点，一拿到这样的题，就想当然地认为一次函数的图像经过点$(-2,-3)$，$(3,5)$，而没有结合图形来看一次函数图像可能经过哪两个点.

请同学们思考如下的问题:

(1)这道题目已知什么?要求的是什么?

(2)你们能在平面直角坐标系中画出直线,当自变量的取值范围是$-2\leqslant x\leqslant 3$时,因变量的取值范围恰好为$-3\leqslant y\leqslant 5$吗?

(3)现在你们能说说这条线经过哪两个点了吗?

(4)你们认为画出函数图像对解决这个问题有什么帮助?

回答:(1)这道题目已知的是当x的取值范围是$-2\leqslant x\leqslant 3$时,y的取值范围是$-3\leqslant y\leqslant 5$,要求函数关系式.

(2)一条直线,如图1-1-1,还有一条直线,如图1-1-2.

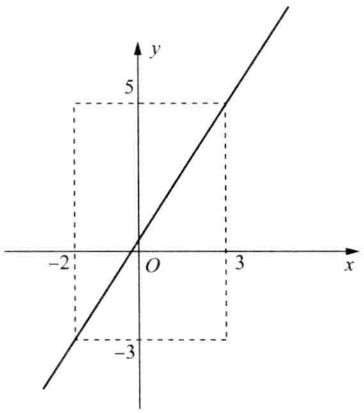


图1-1-1

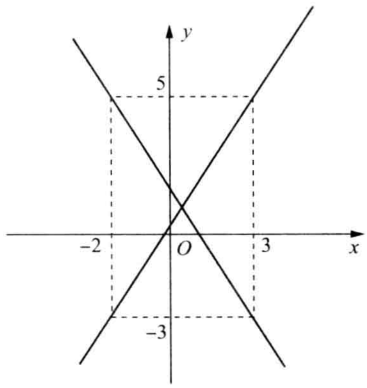


图1-1-2

(3)有两种情况,这条直线可能经过点$(-2,-3)$,$(3,5)$,也可能经过点$(-2,5)$,$(3,-3)$.

(4)画出函数图像可以使这个问题的两种情况直观地展示在我们面前.

通过这样的分析,我们才发现错误所在.造成漏解的主要原因是在审题的时候,分析问题的方法不对,没有借助图像将所有可能出现的情况考虑全.

这个一次函数的图像经过点$(-2,-3)$,$(3,5)$或点$(-2,5)$,$(3,-3)$.由待定系数法易得函数的关系式为$y=\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}$或$y=-\frac{8}{5}x+\frac{9}{5}$.

例2 已知,如图1-1-3所示,在$\triangle ABC$中,BD是AC边上的中线,$DB\perp BC$于B,$\angle ABC=120°$,求证:$AB=2BC$.

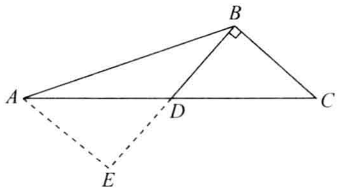


图1-1-3

解析: 第一步:弄清问题和熟悉问题,就是弄清题目的已知条件和解题目标,主要包括以下几个方面.

1.有几个已知条件,能否把各个已知条件分开.

2. 明确解题的目标是什么，要求的是什么.

3. 是否需要画一个图，如果能画图，最好画一个图，并在图中标出必要的条件和数据，画图的过程是一个熟悉问题的过程，是一个对已知条件和解题目标进行再认识的过程.

本题已知条件：BD 是 AC 边上的中线，$DB \perp BC$，$\angle ABC=120°$.

要求证的目标：$AB=2BC$.

可见，审题的第一步就是弄清问题的已知条件和解题目标，在弄清条件时，对题目一定要字斟句酌，解错这道题就是因为在没有看清"求什么"的时候就仓促下笔. 所以，熟悉问题是审题的重要步骤，在熟悉的过程中，要弄清已知条件和未知条件，仔细地重复这些条件，如果问题与图形有关，还应该画一张图，在图上标示已知条件.

第二步：审题时注意题目的隐含条件.

有些题目中给出的条件并不明显，需要对这些条件进行再加工，也有些条件虽然题目已经给出了，而解题者却没有把它作为条件来使用，从而使解题遇阻，需要对这些条件进行再认识.

第三步：弄清已知条件之间的相互联系以及已知条件与所求目标之间的相互联系. 当分清有几个已知条件之后，要分析这些已知条件之间有些什么联系，哪些条件结合可以得出新的结论；根据已知条件和解题目标，要思考"是否有一个可能用得上的定理".

BD 是 AC 边上的中线可考虑将中线延长加倍；

要证明 $AB=2BC$ 可联想到"含 30°角的直角三角形".

第四步：整体观察题目，想一想，是否有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题，是否做过具有相同的未知数或相似未知数的问题，如何把生题转化为熟题. 当解题遇阻时，要进行再审题，想一想你是否利用了所有已知数据？你是否利用了所有的条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要概念？

延长 BD 到点 E，使得 $DE=BD$，连接 AE. 如图 1－1－3，然后证明$\triangle ABE$ 是含 30°角的直角三角形.

无论综合题多么复杂，它都一定会在已知条件或已知图形中透露出必要的解题信息和方向，所以只要我们认真审题，明确已知条件和所求结论之间的因果关系，就能找到解决综合题的途径.

下面我们通过解答一道以二次函数为主线的综合题，谈谈在解答综合题时如何审题.

例 3　如图 1－1－4，在直角坐标系中，O 为原点. 点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 在 y 轴的正半轴上，$\tan\angle OAB=2$. 二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图像经过点 A、B，顶点为 D.

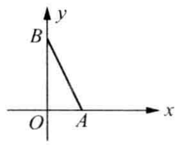


图 1－1－4

(1)求这个二次函数的解析式；

(2)将$\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 90°后，点 B 落到点 C 的位置. 将上述二次函数图像沿 y 轴向上或向下平移后经过点 C. 请直接写出点 C 的坐标和平移后所得图像的函数解析式；

(3)设(2)中平移后所得二次函数图像与 y 轴的交点为 B_1，顶点为 D_1，点 P 在平移后的二次函数图像上，且满足$\triangle PBB_1$ 的面积是$\triangle PDD_1$ 面积的 2 倍，求点 P 的坐标.

解析： 拿到以二次函数为主线的综合题，我们可以从哪些角度去思考？

我们可以尝试通过如下问题进行思考：

①二次函数涉及的主要知识点有哪些？

②二次函数图像左右平移或上下平移的规律是什么？

③如何借助函数图像直观性,结合相关几何知识灵活解题?

④解这类题涉及的主要数学思想和数学方法有哪些?

(1)利用待定系数法,可以求出 m 的值,从而获得函数表达式.

由题意,点 B 的坐标为(0,2),于是 $OB=2$,而 $\tan\angle OAB=2$,即$\dfrac{OB}{OA}=2$.

则 $OA=1$,点 A 的坐标为(1,0),又二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图像过点 A,故 $0=1^2+m+2$. 解得 $m=-3$.

从而所求二次函数的解析式为 $y=x^2-3x+2$.

(2)我们不难注意到解决第二个小问题的关键是要确定点 C 的坐标,所以首先必须根据题意画出正确的图形,然后根据旋转的图形特征:形状大小不变,我们应该容易确定点 C 的坐标,从而此问题得以解决.

先根据题意,画出旋转后的图形(图 1-1-5),准确求出点 C 的坐标.

因为$\triangle AOB\cong\triangle ADC$,所以 $AD=AO=1$,$DC=OB=2$.

可得点 C 的坐标为(3,1).

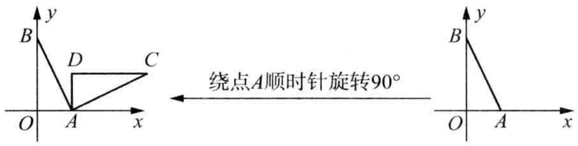


图 1-1-5

由于题目的问题是将二次函数 $y=x^2-3x+2$ 这个图像向上或向下平移,所以根据二次函数图像沿 y 轴向上或向下平移的特征:图形形状不变,与 y 轴交点的纵坐标变化. 因此我们设所求二次函数解析式为 $y=x^2-3x+k$. 因为此图像经过点 C,则有 $1=9-3\times3+k$,即 $k=1$.

故所求二次函数的解析式为 $y=x^2-3x+1$.

(3)回到第三小题,要求点 P 的坐标. 由于点 P 在平移后的二次函数图像上,它的横、纵坐标之间就有了明确的关系,所以只要求出其中的一个即可,不妨尝试求 x. 那么接下来我们重点要思考的是如何求 x? 通常思路应该要建立 x 的方程. 我们来审视题意,哪个条件引起你更多的关注? 应该是"$\triangle PBB_1$的面积是$\triangle PDD_1$面积的 2 倍". 根据这个条件,你通常会有哪些想法? 也许有的同学会想到:相似三角形的面积比等于相似比的平方;等底(高)的两个三角形面积比等于它们的高(底)之比;面积割补法;直接利用面积公式等. 对于本题我们不难发现这两个三角形是等底的,因而我们得到点 P 到 BB_1 的距离是点 P 到 DD_1 的距离的两倍. 你能否用关于 x 的代数式分别表示这两个距离? 在表示的过程中,同学们将点 P 到 DD_1 的距离表示成的答案既有 $x-\dfrac{3}{2}$,也有$\dfrac{3}{2}-x$,那么到底谁对谁错? 为什么会有这种情况产生? 回到我们的题目:点 P 在平移后的二次函数图像上,再来仔细观察整个图形,发现这条抛物线被点 B_1 和点 D_1 分成三部分,所以点 P 的可能位置有三种.

由(2)可知,经过平移后所得图像是原二次函数图像向下平移 1 个单位后所得的图像,那么对称轴直线 $x=\dfrac{3}{2}$不变,且 $BB_1=DD_1=1$. ——这是解决本题的两个关键条件.

因为点 P 在平移后所得二次函数图像上,设点 P 的坐标为(x,x^2-3x+1).

在$\triangle PBB_1$和$\triangle PDD_1$中,由于 $S_{\triangle PBB_1}=2S_{\triangle PDD_1}$,利用三角形面积比等于同底的高之比转

化为线段之间的关系，得到边 BB_1 上的高是边 DD_1 上的高的 2 倍. ——这是解决本题的突破口.

从而可以建立关于 x 的方程.

①当点 P 在对称轴的右侧时(图 1-1-6)，建立 x 的方程是 $x=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$，得 $x=3$，故点 P 的坐标为(3,1)；

②当点 P 在对称轴的左侧，同时在 y 轴的右侧时，如图 1-1-6 所示，建立 x 的方程是 $x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=1$，故点 P 的坐标为(1,-1)；

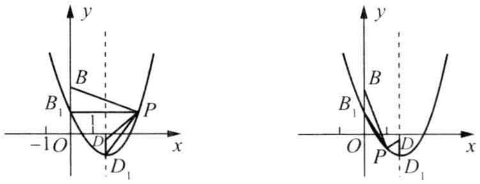


图 1-1-6

③当点 P 在 y 轴的左侧时($x<0$)，建立 x 的方程是 $-x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=3>0$(舍去)，

故所求点 P 的坐标为(3,1)或(1,-1).

再来通过一道动态几何题，谈谈如何审题.

例 4　已知线段 $AB=10$，点 P 在线段 AB 上，且 $AP=6$，以 A 为圆心、AP 为半径作⊙A，点 C 在⊙A 上，以 B 为圆心、BC 为半径作⊙B，射线 BC 与⊙A 交于点 Q(不与点 C 重合).

(1)当⊙B 过点 A 时(图 1-1-7)，求 CQ 的长；

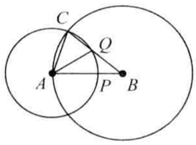


图 1-1-7

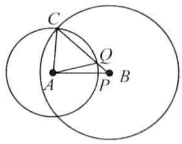


图 1-1-8

(2)当点 Q 在线段 BC 上时(图 1-1-8)，设 $BC=x$，$CQ=y$，试求 y 关于 x 的函数关系式，并写出自变量的取值范围；

(3)当由 A、P、Q、C 四点构成的四边形是梯形时，求 BC 的长.

解析：许多同学读了一遍题之后，短时间内不能理顺关系，不知所云.

如何审题？审题到底审什么？根据这类问题的特点，我们可以进行结构化的审题.

审背景图形：根据背景图形的特点，联想与之相关的常规基本方法. 如本题是以圆为背景的问题. 联想到常规思路是通过构造弦心距，转化成直角三角形的问题来解决，同时常常用到“圆中半径相等”这一个隐含条件.

审运动规则：图形中的点是根据什么规则运动的？把握好运动的规律，才能建立正确函数关系. 本题中⊙B 的圆心确定，而半径 BC 的大小随着点 C 在圆 A 上的位置不同而产生变化，因此射线 BC 与⊙A 的交点 Q 的位置也在相应地发生变化.

审运动范围:运动过程中哪个是主动点,哪个是被动点,它们被限制在什么范围?临界位置在何处?我们在读题时应仔细阅读,并加以标注,因为它往往涉及函数的自变量取值范围.

由于本题的背景图形和运动规则不明显,需要重新画图以便进一步理顺关系,过程性地展示复杂图形的形成过程,从运动变化的观点理解问题.

(1)关注到图形中的隐含条件 $AC=AQ$,$BA=BC$,可以通过三角形相似解决.

由于 C、Q 在⊙A 上,则 $AC=AQ$,于是 $\angle C=\angle AQC$,

由于⊙B 过 A、C,则 $BA=BC$,于是 $\angle C=\angle CAB$,故 $\angle AQC=\angle CAB$,

又 $\angle C=\angle C$,故 $\triangle CAQ\backsim\triangle CBA$,

于是 $AC^2=CQ\cdot CB$,

即 $6^2=10\cdot CQ$,因此 $CQ=3.6$.

(2)y 和 x 分别是小圆的弦和大圆的半径,因而联想弦心距构造直角三角形运用勾股定理建立方程.

作 $AH\perp CQ$,垂足为 H,则 $QH=CH=\frac{y}{2}$(图 1-1-9).

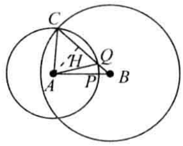


图 1-1-9

且 $AQ^2-QH^2=AB^2-BH^2$,

而 $BH=x-\frac{y}{2}$,且 $AQ=6$,故 $36-\frac{y^2}{4}=100-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2$,

解之得:$y=\frac{x^2-64}{x}$.

①如何求解自变量的取值范围?

关注的视角:关注到主动点 C 在⊙A 上,BC 为半径,而当 C 和点 P' 重合、C 和点 P 重合时(图 1-1-10),BC 取得最大值 16 和最小值 4;

同时关注到被动点 Q 在线段 BC 上,那么何时 Q 在线段 BC 上呢?这对同学们空间想象能力提出了较高的要求,因此,我们再次画图,可以发现有时 Q 在 BC 的延长线上,有时在线段 BC 上,而它们的临界位置就是 Q、C 两点重合.

②如何求解?

1°结合图形进行推理:

当 Q、C 重合时,直线 BC 和圆 A 相切(图 1-1-10),由勾股定理知 $x=BC=8$.

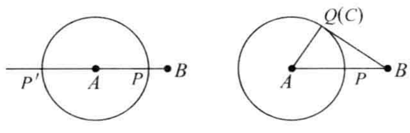


图 1-1-10

2°运用函数的观点,此时 y 的值恰好为 0,代入到前面所求的解析式中容易得到 $x=BC=8$.

所以 $8<x\leqslant16$.

在审题时既要关注主动点的运动范围,又要关注被动点的运动范围;有时需要找到特殊的临界位置,画出示意图转化成新的几何计算问题求解,或运用函数进行求解.

(3)四个点构成梯形,显然对梯形的底边需要进行分类讨论,由题意显然有 $AP\parallel CQ$ 不成立,于是有:

情况一 如图 1-1-11,A、P、Q、C 四点构成的四边形是梯形,

且 $AC/\!/PQ$，则 $\frac{BA}{AP}=\frac{BC}{CQ}$，即 $\frac{10}{6}=\frac{x}{y}$.

又 $CQ=y=\frac{x^2-64}{x}$，

故 $\frac{10}{6}=\frac{x}{\frac{x^2-64}{x}}$，由于 $x>0$，因此解得：$x=4\sqrt{10}$.

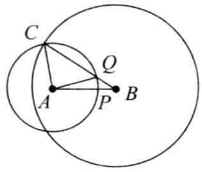


图 1-1-11

往往许多同学做到这里就结束了，我们关注到(2)中条件“当点 Q 在线段 BC 上时”，显然不能被题目中所给图形所蒙蔽，而应继续考虑“当点 Q 在线段 BC 的延长线上时”，所以：

情况二　如图 1-1-12，A、P、Q、C 四点构成的四边形是梯形，

且 $AQ/\!/PC$，则 $\frac{BP}{AP}=\frac{BC}{QC}$，即 $\frac{4}{6}=\frac{x}{y}$.

而此时(2)中的 $CQ=y=\frac{x^2-64}{x}$ 是不成立的. 所以作 $AH\perp QC$，垂足为 H，则 $QH=CH$，且 $AQ^2-QH^2=AB^2-BH^2$，

即 $36-QH^2=100-(x+QH)^2$，即 $QH=\frac{64-x^2}{2x}$，则 $QC=\frac{64-x^2}{x}$，

于是 $\frac{4}{6}=\frac{x}{\frac{64-x^2}{x}}$，又 $x>0$，因此解得：$x=\frac{8}{5}\sqrt{10}$.

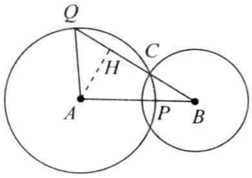


图 1-1-12

综合，当 A、P、Q、C 四点构成的四边形是梯形时，BC 的长为 $4\sqrt{10}$ 或 $\frac{8}{5}\sqrt{10}$.

许多同学会把第二种情况忽略掉，显然还是审题的问题，我们应该注意审清楚三小题之间的结构问题，(1)是特殊情况；(2)中有前提条件“当点 Q 在线段 BC 上时”，而(3)中没有任何前提，所以应该是考虑运动的全过程，不能受到题目中所给图形的影响.

二　数学解题中的“模式识别”

数学解题中的模式识别来源于解题的一个基本经验：拿到一道题目，我们总是首先辨别它是否属于已经掌握的类型，如果属于，那就提取出解决该类型的方法来解答；如果不是直接属于，那我们会设法进行一些变化；如果无论如何变化都不属于时(题目比较陌生或比较复杂)，我们再考虑其他的途径. 这就是模式识别的解题策略.

模式识别这一解题策略体现了化归思想，有时遵循化陌生为熟悉的“熟悉化原则”，有时遵循将问题分解为若干个基本问题的“简单化原则”. 在解中考数学综合题时，“基本问题”的思想是这一策略的重要体现，积累“基本问题”也就成为提高这一策略效率的捷径.

下面我们来看“基本问题”在解几何综合题中的体现.

在几何图形中，与线段中点有关的问题很多，中点问题是每年中考的必考题型，一般来说，遇到中点问题，我们主要从以下几方面进行解读.

1. 还原中心对称图形(倍长中线、“8”字形全等)

由于线段本身就是中心对称图形，而中点就是它的对称中心，所以遇到线段中点的问题，依托中点借助辅助线还原中心对称图形，这样就能将分散的条件巧妙地集中起来，这是解决线段中点问题最常采用的方法.

2. 构造中位线

因为三角形中位线在位置关系和数量关系两方面将三角形中的有关线段沟通起来，能将三角形中分散的条件集中起来，或者使图形中隐藏的条件显露出来，所以借助三角形的中位线也是解决中点问题的另一个有力武器. 当图形中有中点时，常考虑三角形的中位线，必要时还可以作辅助线构造三角形的中位线.

3. 与等面积相关的图形变换

线段中点的本意，在研究三角形的面积问题时，往往提供了底边相等的条件.

4. 等腰三角形中的“三线合一”

“三线合一”是初中阶段平面几何中一个非常重要的结论和解题工具，运用得好往往会使我们的思考过程“柳暗花明”.

5. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半及其与圆的结合(图 1-2-1)

我们先从一个简单的问题出发，看看线段中点在平面几何有关问题的解决中如何产生神奇的作用的.

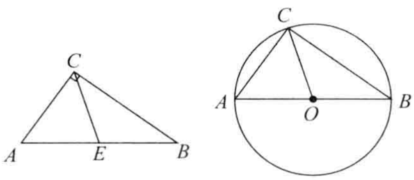


图 1-2-1

例 1 如图 1-2-2 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\angle ABC=90°$. 若 $BD=BC$，F 是 CD 的中点，试问：$\angle BAF$ 与 $\angle BCD$ 的大小关系如何？请写出你的结论并加以证明.

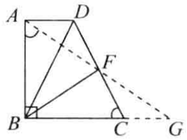


图 1-2-2

解析：(1)首先，因为已知“$BD=BC$，F 是 CD 的中点”，即点 F 是等腰三角形 BCD 底边的中点，所以第一反应就是“三线合一”.

如图 1-2-2 所示，连接 BF，则 $BF \perp CD$.

所以$\angle BCD+\angle CBF=90°$.

这跟题目结论中要探索的$\angle BCD$ 有直接关系.

(2)其次，又因为已知“$\angle ABC=90°$”，我们想到直角三角形.

延长 AF 与 BC 的延长线交于点 G，则得到 $\text{Rt}\triangle ABG$.

考虑到已知“$AD /\!/ BC$，F 是 CD 的中点”，那么我们在得到 $\text{Rt}\triangle ABG$ 的同时，还神奇地围绕着中点 F 还原了中心对称图形，即

$\triangle FAD \cong \triangle FGC$.

所以 $FA=FG$.

从而点 F 成为 $\text{Rt}\triangle ABG$ 斜边 AG 的中点，所以

$BF=AF=FG$，$\angle BAF=\angle ABF$.

又因为$\angle ABF+\angle CBF=\angle ABC=90°$，故这又跟题目结论中要探索的$\angle BAF$ 有直接关系.

(3)由$\angle BCD+\angle CBF=90°$，$\angle ABF+\angle CBF=90°$，可得

$\angle BCD=\angle ABF=\angle BAF$.

在例 3 中，我们利用了点 F 的双重身份，既是等腰三角形底边中点又是直角三角形斜边

中点，在直角梯形搭建的舞台上探索了$\angle BAF$与$\angle BCD$的大小关系．相信通过这道题的分析，同学们会对线段中点在解题中的运用，在原有认识的基础上又有新的提高．

例 2　我们给出如下定义，有一组相邻内角相等的四边形叫做等邻角四边形．请解答下列问题．

(1)写出一个你所学过的特殊四边形中是等邻角四边形的图形的名称；

(2)如图 1－2－3 所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在BC上，且$CD=CA$，点E、F分别为BC，AD的中点，连接EF并延长交AB于点G．求证：四边形$AGEC$是等邻角四边形．

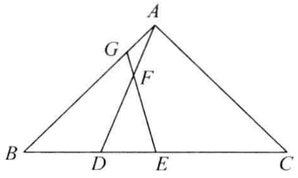


图 1－2－3

解析：这道题目比较新颖，属于所谓的创新题型，题目中先给出等邻角四边形的定义，然后根据这个定义在图 1－2－3 中完成证明．图形本身不是很复杂，是等腰三角形的组合，但是难点仍然有两处，需要各个击破，否则题目难以完成．

第一个难点就在于已知给出的两个中点，即"点E，F分别为BC，AD的中点"，因为E，F共线且不在同一个三角形中，所以发挥不了这两个中点的作用．

第二个难点在于不能确定待证的等邻角四边形中哪两个相邻内角相等，尤其是当中点的条件没有想好时．

所以下面我们就重点围绕这两个中点做文章．考虑到上面我们提到点E，F共线且不在同一个三角形中，所以得另找中点将这两个中点沟通起来．

如图 1－2－4 所示，我们取AC边的中点K，连接FK，EK．

这样出现了两条中位线，即FK成为$\triangle ADC$的中位线，EK成为$\triangle CAB$的中位线，借助这两条辅助线就把两个中点E和F沟通起来了．

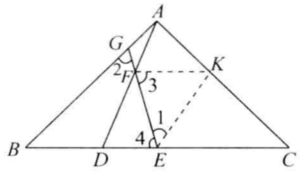


图 1－2－4

根据三角形中位线的性质，有$FK\parallel DC$，$EK\parallel AB$，所以

$\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，

同时还有$FK=\frac{1}{2}CD$，$EK=\frac{1}{2}AB$．

而$AB=AC=CD$，故

$FK=EK$．

所以$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$．

所以$\angle AGE=\angle GEC$．

所以四边形$AGEC$是等邻角四边形．

通过本题的学习研究，我们发现当图形中出现不止一个中点时，应该及时地想到继续构造中点，从而得到中位线，实现等线段、等角的转移，必要时借助适当的辅助线沟通题目中原本不相关的已知条件是解决此类问题的较好途径．

前面谈了线段中点的"基本问题"在解几何综合题中的应用，再来谈谈应用角平分线的"基本问题"，解几何综合题．

角平分线最重要的性质是它的轴对称性，其他的性质都可由此推出．所以，遇到与角平分线有关的问题时，首先应该想到它的轴对称性．

例 3　如图 1－2－5，已知：AD为$\triangle ABC$的角平分线，$\angle C=2\angle B$．

求证：$AB=AC+CD$．

解析： 在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE.

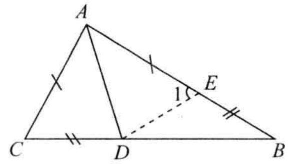


图 1-2-5

因为 AD 平分 $\angle CAB$，所以 $\triangle ADE \cong \triangle ADC$.

所以 $ED=CD$，$\angle 1=\angle C$.

（这就是角平分线轴对称性的具体体现，也是做题时常见的操作方法）

因为 $\angle C=2\angle B$，则 $\angle 1=2\angle B$.

所以 $\angle EDB=\angle B$，从而 $EB=ED=CD$.

所以 $AB=AE+EB=AC+CD$.

一般来说，当三角形中出现二倍角时，可以通过上面的辅助线借助三角形全等把二倍角转化为等角，这是处理这一类问题的比较好的途径.

例 4 如图 1-2-6 所示，已知 $AB=AC$，CD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\angle A=100^\circ$.

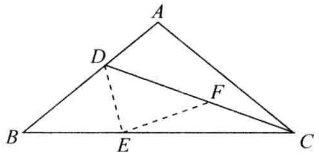


图 1-2-6

求证：$BC=AD+CD$.

解析： 此题图形简洁，内涵丰富，要仔细挖掘隐含其中的性质.

CD 作为角平分线，它的轴对称性必然要在图形中体现出来. 所以我们还是以 CD 为轴在图上构造三角形全等（具体作法同上，在 CB 上截取 $CE=CA$），这时候我们就会发现已知“$AB=AC$，$\angle A=100^\circ$”的巧妙之处.

因为 $\angle ADC=\angle EDC=\angle BDE=60^\circ$，$\angle DBC=2\angle DCB$.

即在 $\triangle DBC$ 中，DE 是 $\triangle DBC$ 的角平分线，$\angle DBC=2\angle DCB$，这跟上面的例题完全相同了.

所以不难得出 $CD=BD+BE$. 下面来看具体解答过程.

在 CB 上截取 $CE=CA$，连接 DE.

因为 CD 平分 $\angle ACB$，故

$\triangle ADC \cong \triangle EDC$.

所以 $\angle ADC=\angle EDC$.

又因为 $AB=AC$，$\angle A=100^\circ$，所以

$\angle ADC=\angle EDC=\angle BDE=60^\circ$，$\angle DBC=40^\circ$，$\angle DCB=20^\circ$.

所以 DE 平分 $\angle BDC$，$\angle DBC=2\angle DCB$.

易证 $CD=BD+BE$.

所以 $BC=CE+BE=AC+BE=AB+BE=AD+BD+BE=AD+CD$，

即 $BC=AD+CD$.

这是一道几何综合题，形式简洁，具有一定的思维难度，是一道开阔思维、锻炼解题能力的好题. 表面上看，这道题和上面的例题类似，已知和求证部分都很接近，但是真正动手做起来，就会发现难度不小. 因为在本题中，CD 和 BC、AD 这样的三条线段无论在位置关系还是在数量关系上都很难直接建立联系.

而从问题的解决过程来看，平时“基本问题”的积累是多么重要！

我们再来观察、比较几道几何综合题，这几道题目是我们从全国各地的中考试题中挑选出来的，同学们看看有什么发现.

例 5 如图 1-2-7，一个含 45° 角的三角板 HBE 的两条直角边与正方形 $ABCD$ 的两邻边重合，过点 E 作 $EF \perp AE$ 交 $\angle DCE$ 的角平分线于 F 点，试探究线段 AE 与 EF 的数量关

系,并说明理由.

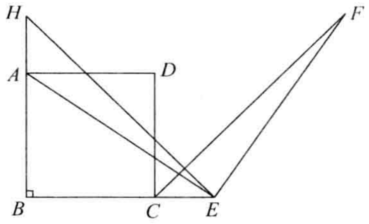


图 1-2-7

证明:由已知可得,$\angle H=\angle FCE$,$HA=CE$,$\angle HAE=\angle CEF$,所以$\triangle HAE\cong\triangle CEF$,这样可以得到 $AE=EF$.

例 6　(1)如图 1-2-8 所示,在正方形 $ABCD$ 中,M 是 BC 边(不含端点 B,C)上任意一点,点 P 是 BC 延长线上一点,N 是$\angle DCP$ 的平分线上一点.若$\angle AMN=90°$,求证:$AM=MN$.

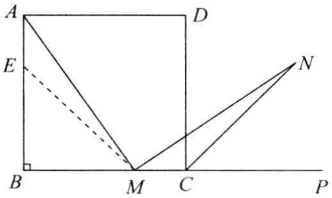


图 1-2-8

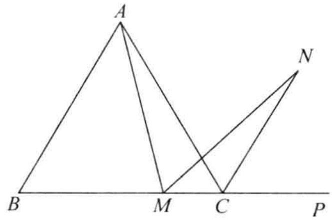


图 1-2-9

(2)若将(1)中的"正方形 $ABCD$"改为"正三角形 ABC"(图 1-2-9),N 是$\angle ACP$ 的平分线上一点,则当$\angle AMN=60°$时,结论 $AM=MN$ 是否还成立? 请说明理由.

(3)若将(1)中的"正方形 $ABCD$"改为"正 n 边形 $ABCD\cdots\cdots$".请你作出猜想:当$\angle AMN=$______时.结论 $AM=MN$ 仍然成立.(直接写出答案,不需要证明)

证明　(1)在边 AB 上截取 $AE=MC$,连接 ME.

在正方形 $ABCD$ 中,$\angle B=\angle BCD=90°$,$AB=BC$,故 $BE=BM$,则$\angle BEM=45°$,即$\angle AEM=135°$,$\angle MCN=90°+45°=135°$,所以

$\angle NMC=180°-\angle AMN-\angle AMB=180°-\angle B-\angle AMB=\angle MAB$.

又因为$\angle AEM=\angle MCN$,故$\triangle AEM\cong\triangle MCN$,所以 $AM=MN$.

(2)$AM=MN$ 仍成立,证法与(1)类似,在 AB 边上取 $AE=MC$.然后证明

$\triangle AEM\cong\triangle MCN$.

(3)$\dfrac{(n-2)180°}{n}$.

例 7　如图 1-2-10,已知在正方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,P 是边 BC 上的任意一点,E 是边 BC 延长线上一点,连接 AP.过点 P 作 $PF\perp AP$,与$\angle DCE$ 的平分线 CF 相交于点 F.连接 AF,与边 CD 相交于点 G,连接 PG.

(1)求证:$AP=FP$;

(2)$\odot P$,$\odot G$ 的半径分别是 PB 和 GD,试判断$\odot P$ 与$\odot G$ 的位置关系,并说明理由;

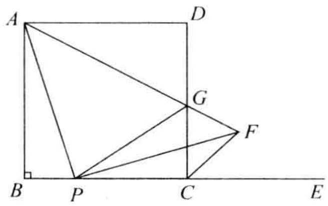


图 1-2-10

(3)当 BP 取何值时,$PG/\!/CF$.

例 8 如图 1-2-11 所示,边长为 5 的正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点处,点 A,C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上,点 E 是 OA 边上的点(不与点 A 重合),$EF\perp CE$,且与正方形外角平分线 AG 交于点 P.

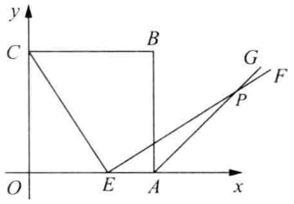


图 1-2-11

(1)当点 E 坐标为(3,0)时,试证明 $CE=EP$.

(2)如果将上述条件"点 E 坐标为(3,0)"改为"点 E 坐标为(t,0)($t>0$)",结论 $CE=EP$ 是否仍然成立,请说明理由.

(3)在 y 轴上是否存在点 M,使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形?若存在,用 t 表示点 M 的坐标;若不存在,说明理由.

解析: 看完以后,我们是不是感觉到这四道题基本上是相同的,那相同在什么地方呢?仔细观察每个题目的图形,就会发现都存在下面如图 1-2-12 所示的基本图形:

在图 1-2-12 中,点 P 是正方形 $ABCD$ 中 BC 边上的一点,CF 是正方形的外角平分线,且 $AP\perp PF$. 如果我们稍微把注意力集中在外角平分线 CF 上,就能想到连接 AC 后得到 $AC\perp CF$(图 1-2-13),所以$\angle APF=\angle ACF=90°$,这样就会联想到辅助圆:点 P,C 在以 AF 为直径的$\odot O$ 上(图 1-2-14). 根据圆周的性质,$\angle AFP=\angle ACP=45°$,因此$\triangle APF$ 是等腰直角三角形,所以 $AP=FP$. 这样就解决了上述几道题共性的地方. 也就是例 7 的第(1)小题,以及例 8 的第(1)小题和第(2)小题.

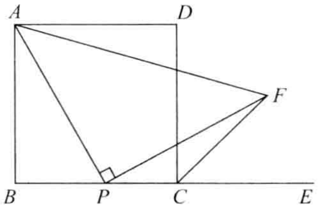


图 1-2-12

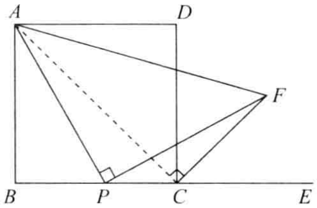


图 1-2-13

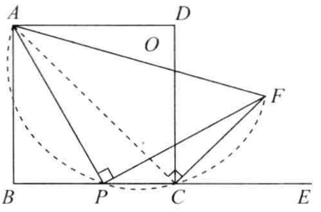


图 1-2-14

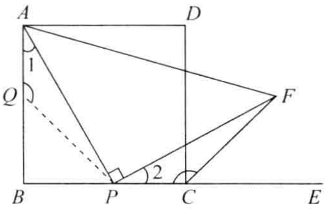


图 1-2-15

当然,我们还可以站在直线型的角度用全等三角形来解决. 如图 1-2-15 所示,在边 AB 上截取 $AQ=PC$,连接 PQ. 这一次我们把注意力集中在外角平分线 CF 带来的$\angle BCF=135°$ 上,因为 $AQ=PC$,则 $BQ=BP$,所以$\angle AQP=135°=\angle PCF$.

由 $AP\perp PF$ 得$\angle 1=\angle 2$,根据"角边角"可以证明$\triangle AQP\cong\triangle PCF$,于是 $AP=FP$.

直线型里还有一个重要的工具——三角形的相似,能不能用来解决问题呢?不妨过点 F 作 $FR\perp CE$ 于点 R(图 1-2-16),在 Rt$\triangle FCR$ 中,$\angle FCR=45°$,则设 $FR=CR=a$. 由 $AP\perp$

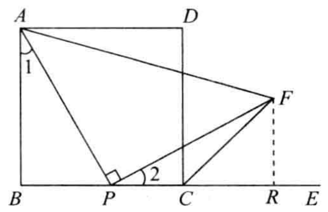


图 1－2－16

PF 易得$\triangle ABP\backsim\triangle PRF$，得$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{PR}{RF}$. 若正方形边长 $AB=y$，$BP=x$，则比例式$\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-x+a}{a}$，整理得 $x^2-(a+y)x+ay=0$，$(x-a)(x-y)=0$，所以 $x=a$，或 $x=y$(一般情况下舍去)，这样 $FR=CR=BP$，所以$\triangle ABP\cong\triangle PRF$，于是 $AP=FP$ 得证.

图 1－2－12 到图 1－2－16 的过程，我们从几何的直线型与圆两方面对图形进行了分析，其中直线型又分成三角形全等和相似两种情况. 在解题方法上，采用了代数中的设元思想、方程思想，从上面的分析过程可以看出，对于几何综合题要善于“分解”为若干个基本问题和基本图形，并综合这些基本图形的性质及图形中元素的内在联系去思考，则能快速找到解题途径. 当然还得要求我们平时做好一部分典型题，这样遇到综合题才能发散思维、迁移联想，将未知问题转化为已知问题，一步一步地取得完整的结论.

下面给出例 7 第(2)小题的判断两圆位置关系的解答：

$\odot P$ 与$\odot G$ 的位置关系是外切. 如图 1－2－17 所示，延长 CB 至点 M，使 $BM=DG$. 连接 AM，则$\triangle ADG\cong\triangle ABM$，于是 $AG=AM$，$\angle GAD=\angle MAB$. 再利用 $AP=FP$，$\angle PAF=45°$，可证$\angle MAP=\angle MAB+\angle BAP=\angle GAD+\angle BAP=45°$，从而$\triangle APM\cong\triangle APG$. 所以 $PM=PG$. 则 $PB+DG=PG$. 因而半径分别是 PB 和 GD 的$\odot P$ 与$\odot G$ 是外切的.

例 8 第(3)小题的解答如下：

由 $PG/\!/CF$，可得$\angle GPC=\angle PGC=45°$，

$\therefore$ $PC=CG$，$BP=DG$.

设 $BP=GD=x$，则 $PC=CG=2-x$，$PG=2x$.

在 Rt$\triangle PCG$ 中，$(2x)^2=(2-x)^2+(2-x)^2$，

解得 $x=2\sqrt{2}-2$

故当 $BP=2\sqrt{2}-2$ 时，$PG/\!/CF$.

至于例 8 的第(3)问：在 y 轴上是否存在点 M，使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形？答案是显然存在的.

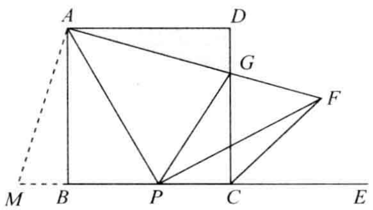


图 1－2－17

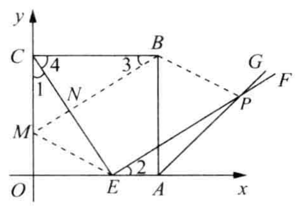


图 1－2－18

如图 1－2－18 所示，设 y 轴上的点 M 满足 $CM=OE$，则四边形 $BMEP$ 必为平行四边形. 此时，易得$\triangle BCM\cong\triangle COE$，所以 $BM=CE=EP$，$\angle 3=\angle 1$，则$\angle CNB=180°-\angle 3-\angle 4=180°-\angle 1-\angle 4=90°$.

于是$\angle CNB=\angle CEP$，所以 $BM/\!/EP$，根据一组对边平行且相等，所以四边形 $BMEP$ 是平行四边形. 此时点 M 的坐标为$(0,5-t)$.