高等数学

经管类

（上册）

西南财经大学高等数学教研室 编

科学出版社

高等数学

（经管类）上册

西南财经大学高等数学教研室　编

科学出版社

内 容 简 介

本书是依据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济类本科微积分课程教学基本要求，参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试中的数学考试大纲，根据编者长期在财经类高校担任“经济数学”课程教学和科研工作的经验编写而成的。全书分为上、下两册，本书为上册，共6章，分别是函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，书末还有数学实验(上)和6个附录.

本书可作为高等院校经济管理类专业微积分课程的教材，也可作为其他非数学类专业学生的微积分教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类. 上册/西南财经大学高等数学教研室编 . —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-037858-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①西… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 130396 号

责任编辑：胡云志 任俊红 李香叶 / 责任校对：朱光兰

责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2013 年 6 月第一次印刷 印张：18

字数：456 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等数学是财经管理类院校大学本科生的基础课程，有着举足轻重的地位，对后续专业课程的学习也有着重要的影响.本书依据教育部颁布的高等学校财经类专业课程微积分教学大纲编写而成。全书分为上、下两册，其中上册 6 章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用，下册 5 章，内容包括多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程及差分方程.

本书在内容取舍上比较注重数学与经济、金融、管理等学科的有机结合，在保持传统教材优点的基础上，适当地加入高等数学在经济、金融及管理等其他领域的实际应用，以期读者在掌握高等数学的基本概念、原理和方法的基础上，对其实际的应用有所了解，为后继课程的学习打下良好的基础.

全书正文部分的章节安排与传统的高等数学教程没有太大的区别，但本书具有如下两个特色：(1)教材内容、例题、习题的选取是在传统高等数学教学内容的基础上，刻意帮助读者提高数学修养、培养创新意识、掌握运用数学工具去解决微积分在经济、金融等领域的应用；(2)将高等数学与数学软件 MATLAB 相结合，读者可在学习相关理论的基础上，应用软件完成计算和分析，实现理论与实际的结合.前者体现在每章末都加入了相应章节的内容在经济中的应用，以使读者掌握一些常用的数学方法及基本的经济分析方法；后者体现在上、下册的书末加入了数学实验的内容，培养学生使用 MATLAB 软件编程处理和解决各种问题的能力.

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面.旨在培养读者的理解能力和应用能力.为此，在每节后面，配有一定数量的习题，在每章后面还配有相应章节的总习题，并在书末也给出了习题答案以供参考.另外，本书还配有专门的学习辅导和习题详解，以供教师和学生参考.

本书适合财经类高等学校本科一年级学生使用，讲完全书(包含带 * 号的内容，但不含数学实验部分的内容.)大致需要 150～180 学时，授课教师可根据不同专业的具体要求在教学内容上进行适当的调整.

本书由朱文莉、孙疆明主编，向开理、谢果、代宏霞、梁之磊、梁浩等老师参与编写，其中第 1 章、第 4 章和第 9 章由代宏霞老师编写，第 2 章、第 10 章、第 11 章由向开理老师编写，第 3 章、第 7 章和第 8 章由朱文莉老师编写，第 5 章和第 6 章由谢果老师编写，数学实验部分由孙疆明与梁之磊两位老师编写，附录由梁浩编写.梁浩与多位研究生对初稿进行了仔细地阅读及校对，并提出了宝贵的建议.

最后向关心、支持本书出版的西南财经大学经济数学学院全体老师、领导及科学出版社表示衷心的感谢！由于编者水平有限，书中难免有疏漏及不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2013 年 1 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　函　　数

函数反映的是变量的变化规律及变量之间的依赖关系，函数是高等数学的主要研究对象．高等数学上册研究的是一元函数，下册研究的是多元函数．鉴于中学大家已经学习过（一元）函数的概念及其性质，本章在此基础上予以巩固和加深，主要介绍函数、函数特性、初等函数等概念，最后通过分析一些实际的经济问题，抽象出函数关系，从而建立经济学中常见的函数．

通过本章学习，需要理解函数、反函数、复合函数、初等函数、分段函数等概念，了解函数的性质及其几何特性，掌握求反函数以及将一个复合函数分解为较简单函数的方法，会建立简单经济问题的函数关系．

1.1　函数的概念与性质

在高等数学中用到的集合一般都是实数集 **R** 及其子集，区间是一类常见的数集．

1.1.1　区间与邻域

区间是指介于两个实数之间的全体实数构成的集合，这两个实数称为区间的端点．由于区间的端点为实数，需要考虑区间内是否包含端点，因此，区间包括开区间和闭区间．设 a 和 b 是实数，且 $a<b$，开区间、闭区间具体定义和记号如下．

(1) 开区间　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

(2) 闭区间　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开半闭区间

左开右闭区间　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$．

数 $b-a$ 称为上述区间的**长度**．长度为有限数的区间称为**有限区间**，上述区间都为有限区间．高等数学中可以将区间的左端点延伸为 $-\infty$，右端点延伸为 $+\infty$．这类左端点为 $-\infty$ 或右端点为 $+\infty$ 的区间称为无限区间，具体定义和记号如下：

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\};\qquad (a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\};$$

$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\};\qquad (-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

区间可以在数轴上表示出来，由于闭区间的端点包含在该区间内，则端点就用实心点表示；开区间的端点不包含在区间内，则端点就用空心点表示，如图 1.1.1 所示．

邻域是一类特殊的开区间，它是由数轴上某点附近的点构成的集合．

定义 1　设 a 为实数，对预先给定的正数 δ，称满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 构成的集合，即数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ **邻域**(neighbourhood)，记为 $U(a,\delta)$，有时简记为 $U(a)$，则

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

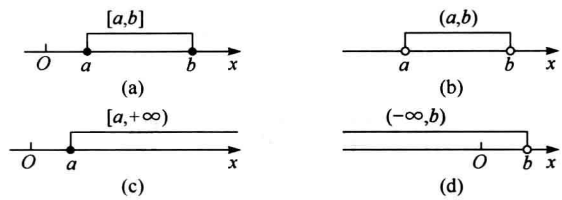

图 1.1.1

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

其中点 a 称为该邻域的**中心**，称 δ 为该邻域的**半径**(radius).

点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 在数轴上的表示如图 1.1.2(a)所示.

从邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 而得的数集，称为点 a 的**去心** δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，有时简记为 $\mathring{U}(\mathrm{a})$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

如图 1.1.2(b)所示，其中数集

$$\{x\,|\,0<x-a<\delta\}=(a,a+\delta)$$

称为点 a 的 δ 右邻域；数集

$$\{x\,|\,-\delta<x-a<0\}=(a-\delta,a)$$

称为点 a 的 δ 左邻域.

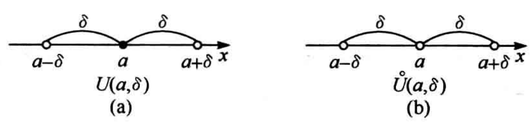

图 1.1.2

1.1.2　函数的定义

变量是指在某一过程中不断变化的量，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此之间存在联系并遵循一定的变化规律. 函数是描述变量间相互关系和变化规律的一种数学模型.

例 1　一个半径为 r 的球的体积 V 与半径 r 有如下关系式：

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

例 2　某商品的销售量为 Q，销售价格为 P，则销售收入 R 与销售量 Q 有如下关系式：

$$R=PQ.$$

定义 2　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，对于 D 中的每个数 x，变量 y 按照某种对应法则 f 有唯一确定的实数值与之对应，则称变量 y 是 x 的**函数**(function)，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

称 x 为**自变量**(independent variable)，称 y 为**因变量**(dependent variable)(或 f 在 x 处的函数值)，称数集 D 为函数的**定义域**(domain)，记为 $D(f)$ 或 D_f. 数学上常用如下形式表示：

$$\forall x\in D_f,\quad \text{通过对应法则 } f,\quad \exists 1 y\in\mathbf{R},\quad \text{使得 } y=f(x),$$

其中记号“$\forall$”表示“对任意给定的”或“对于每一个”，“$\exists$”表示“存在”，$\exists 1$ 表示“唯一存在”.

若函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，且区间 $I\subset D_f$，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D_f 或区间 I 上有

定义.

一般地,函数的定义域是使得该函数有意义的一切实数构成的集合. 但是,对于具有实际背景的函数应根据实际背景中的自变量的具体意义来确定. 例如,某产品的成本 C 是产量 Q 的函数,即 $C=C(Q)$,由实际意义知,$Q\geqslant 0$.

对于 D_f 中的某一个数值 x_0,通过对应法则 f,有唯一确定的因变量的值 y_0 与之对应,则 $y_0=f(x_0)$,称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值. 当自变量 x 取遍 D_f 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**(range),记为 R_f,即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),\quad x\in D_f\}.$$

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义,必须有

$$\begin{cases}3-x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ 5+4x-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x<3,\\ x\neq n\pi,\qquad n\in\mathbf{Z},\\ -1\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=\{x\,|\,-1\leqslant x<3,x\neq 0\}=[-1,0)\cup(0,3)$.

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域为闭区间 $[0,1]$,求函数 $f(3x-2)$ 的定义域.

解 因为函数 $f(x)$ 的定义域为闭区间 $[0,1]$,即 $0\leqslant x\leqslant 1$,则函数 $f(3x-2)$ 的定义域满足

$$0\leqslant 3x-2\leqslant 1,$$

由此可得变量 x 的取值范围

$$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

所以函数 $f(3x-2)$ 的定义域为 $D_f=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\right\}=\left[\dfrac{2}{3},1\right]$.

函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同,且对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的或相等的,否则就是两个不同的函数.

例 5 判断下列函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$,　　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$,　　$\varphi(x)=1-x$.

解 (1) 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且它们在同一 x 处所对应的函数值相同,即它们的对应法则也相同,故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是相同的函数.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$,所以当 $x>1$ 时,$f(x)\neq\varphi(x)$,即这两个函数的对应法则不同,故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是不同的函数.

1.1.3 函数的表示法

函数的表示法主要有三种:**表格法**、**图像法**、**解析法**(公式法). 这三种方法各有所长,表格法一目了然,图像法形象直观,解析法便于计算和推导. 视情况不同,可以选择不同的表示法表示函数,也可以将三种方法结合起来使用,便于认识、分析和解决问题.

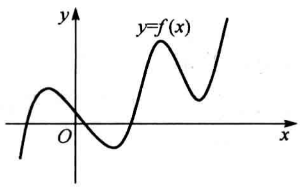

图 1.1.3

在平面直角坐标系下,称点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像. 一般情况下,函数 $y=f(x)$ 的图像为 xOy 坐标面上的一条曲线. 如图 1.1.3 所示.

一般地,用解析式表示一个函数. 有时一个函数的解析式是不唯一的. 例如,函数 $y=\sqrt{x^2}$,它又可以表示为 $y=|x|$,或

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

在高等数学中,经常遇到这样一类函数,它要用几个解析式表示一个函数. 当自变量在不同范围内取值时,对应法则用不同式子表示,这类函数称为**分段函数**(piecewise-defined function),即分段函数在定义域的不同的且不相交的子区间上对应的表达式不同. 分段函数的定义域是所有不相交的子区间的并集. 相邻两个子区间的公共端点称为分段函数的分界点.

下面列举出几个常用分段函数.

例 6 绝对值函数.

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,如图 1.1.4 所示.

例 7 符号函数(sign function).

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,如图 1.1.5 所示.

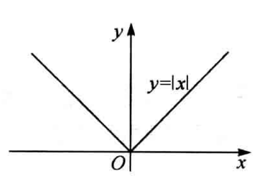

图 1.1.4

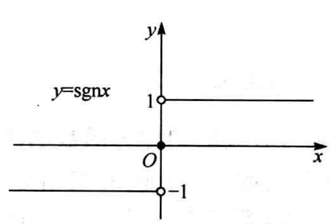

图 1.1.5

例 8 取整函数.

设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数,记为 $[x]$. 例如,

$$[5]=5,\quad \left[\frac{2}{5}\right]=0,\quad [-1.4]=-2,$$

则 $y=[x]$ 是 x 的一个函数,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为整数集.

这个函数可用分段函数表示为

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

如图 1.1.6 所示.

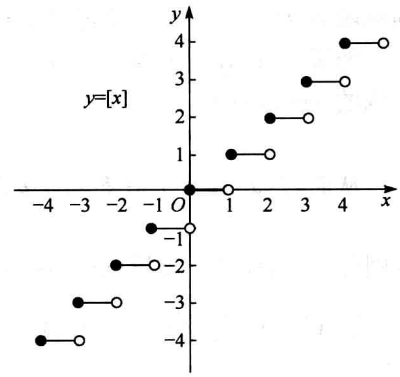

图 1.1.6

例 9 狄利克雷(Dirichlet)函数.

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,1\}$.

例 10 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

(1) 求其定义域并作出函数图形;

(2) 求函数值 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right),f(2),f(1)$.

解 (1) 定义域 $D_f=\{x\mid x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x>1\}=(-\infty,+\infty)$;按函数在定义域各子区间上的相应表达式分段作图,如图 1.1.7 所示.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2},f(2)=2^2=4,f(1)=1-1=0.$

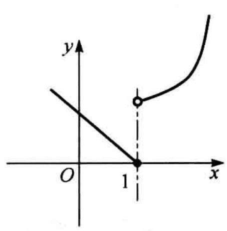

图 1.1.7

注 求分段函数的函数值时,首先应该考虑自变量取值所在的区间,然后代入对应的表达式.

1.1.4 函数的性质

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,区间 $I\subseteq D_f$,如果对于区间 I 内的任意两个实数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在 I 上**单调增加**(monotonically increasing);当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在 I 上**单调减少**(monotonically decreasing);当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 I 上单调不减;当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 I 上单调不增.

单调增加(或单调不减)和单调减少(或单调不增)函数统称为**单调函数**(monotonic function).对于一些在整个定义域内不单调的函数 $y=f(x)(x\in D_f)$,若能将定义域 D_f 划分为若干个不相交的子区间,且函数在这些子区间上是单调的,则称这些子区间为**单调区间**(monotone interval).

例如,$y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的,而 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的,但在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的,则称$[0,+\infty)$是函数 $y=x^2$ 的单调增加区间,$(-\infty,0)$是函数 $y=x^2$ 的单调减少区间.

2. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,区间 $I\subseteq D_f$.如果存在数 K_1,对任意的 $x\in I$,总有

$$f(x)\leqslant K_1,$$

则称函数 $f(x)$在 I 上有**上界**(bounded above)K_1.如果存在 K_2,对任意的 $x\in I$,总有

$$f(x)\geqslant K_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有**下界**(bounded below) K_2.

如果 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 I **上有界**(bounded).即存在 K_1, K_2,对任意的 $x\in I$,总有

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1.$$

从而,$f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是存在正数 M,对任意的 $x\in I$,总有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

否则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**(unbounded),即对任意的正数 M,总存在 $x_0\in I$,使得 $|f(x_0)|>M$.

例 11　判断 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 的有界性.

解　设 M 为任意的正数,令 $x_0=\dfrac{1}{1+M}$,则有

$$0<x_0<1 \text{ 且 } f(x_0)=1+M>M,$$

即对任意的正数 M,总存在 $x_0\in X$,使得

$$|f(x_0)|=f(x_0)>M.$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于坐标原点对称,若对于任意的 $x\in D_f$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**(even function).如果对任意的 $x\in D_f$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1.1.8 所示;奇函数的图形关于坐标原点对称,如图 1.1.9所示.若奇函数在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$.

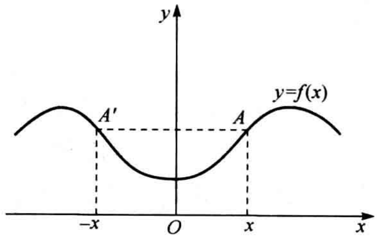

图 1.1.8

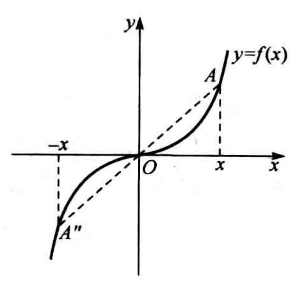

图 1.1.9

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f,如果存在一个常数 $T>0$,使得对任意的 $x\in D_f$,有 $(x\pm T)\in D_f$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function),T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**(period).如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期,则 nT 也是 $f(x)$ 的周期(n 为正整数).

通常,周期函数的周期是指最小正周期.例如,$\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数.函数

$\tan x, \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数不一定有最小正周期.例如,常数函数和狄利克雷函数是周期函数,但没有最小正周期.

习 题 1.1

1. 用区间表示下列点集

(1) $\{x \mid x \neq 0\}$;　　(2) $\{x \mid |x-4| < 5\}$;

(3) $\{x \mid |x+1| > 0\}$;　　(4) $\{x \mid x^2+5x+6 < 0\}$.

2. 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$;

(3) $y=\begin{cases} x, & x>1, \\ 1-x, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 求下列函数的定义域

(1) $f(x+3)$;　　(2) $f(2x)$.

4. 求下列函数的值

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$,求 $f(2), f(2+h), \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,其中 h 为常数且 $h \neq 0, -4$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1, \\ 2x+3, & x>1, \end{cases}$ 求 $f(0), f(1.5), f(1+h)$,其中 h 为常数.

5. 下列各题的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$;　　(2) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$;

(3) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x-1}$;　　(4) $y=1$ 与 $y=\cos^2 x+\sin^2 x$.

6. 判断下列函数的单调性

(1) $y=1-x^2$;　　(2) $y=x+\ln x$.

7. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ 在其定义域内是有界的.

8. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=3x^2-x^3$;　　(2) $y=x(x-1)(x+1)$;

(3) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

9. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=1+\sin\pi x$;

(3) $y=x\sin^2 x$;　　(4) $y=|\cos 3x|$.

10. 当 k 为何值时,函数 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$?

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com