

《阜阳数学通讯》增刊

初中数学复习题解

安徽省阜阳地区数学学会

习 题 解

1. 已知 x, y 是 $\sqrt{2} + 1$ 的整数部分和小数部分, (1)求 $\frac{x-1}{y}$ 的精确值。(2)求 $\frac{2}{y+1}$ 的近似值。(精确到0.1)。

解 $\sqrt{2}$ 的整数部分是1, 故 $x = 1 + 1 = 2$ 。

$$y = (\sqrt{2} + 1) - 2 = \sqrt{2} - 1. \quad (1) \quad \frac{x-1}{y} = \frac{2-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1).$$

$$(2) \quad \frac{2}{y+1} = \frac{2}{(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4.$$

2. 已知“ x 与1的差的平方”加上“ y 与2的和的平方”的和等于零, 求 $[x - (x+1) \cdot \frac{2}{y}]^2 \div xy \div y$ 的值。(x, y 是实数)

解: 依题意有 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$,

x, y 是实数, 故 $(x-1)^2 \geq 0, \quad (y+2)^2 \geq 0$

因而 $(x-1)^2 = 0, \quad (y+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad y = -2$ 。

将 x, y 值代入 $[x - (x+1) \cdot \frac{2}{y}]^2 \div (xy) \div y$ 得

$$[1 + 2 \cdot \frac{2}{-2}]^2 \div (-2) \div (-2)$$

$$=[1+2]^2 \div (-2) \div (-2) = 9 \div (-2) \div (-2)$$

$$=-\frac{9}{2} \div (-2) = \frac{9}{4}.$$

3. 比较下列各组实数的大小:

(1) $-3a$ 与 $5a$;

(2) $\sqrt{0.75}$ 与 0.75 .

解: (1) $5a - (-3a) = 8a$, 当 $a > 0$ 时 $5a > (-3a)$;

当 $a = 0$ 时, $5a = -3a$. 当 $a < 0$ 时 $5a < (-3a)$.

(2) $\sqrt{0.75} = 0.8\cdots$, 故 $\sqrt{0.75} > 0.75$.

4. 已知 $a=6.4$, $b=3.6$, 求 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ 的值.

解: (1) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b} =$

$$\frac{6.4 + 3.6 + 2\sqrt{6.4 \times 3.6}}{6.4 - 3.6} = \frac{10 + \frac{48}{5}}{2.8} = \frac{19.6}{2.8} = 7.$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\sqrt{6.4} + \sqrt{3.6}}{\sqrt{6.4} - \sqrt{3.6}} &= \frac{(\sqrt{6.4} + \sqrt{3.6})\sqrt{10}}{(\sqrt{6.4} - \sqrt{3.6})\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{64} + \sqrt{36}}{\sqrt{64} - \sqrt{36}} \\ &= \frac{8 + 6}{8 - 6} = 7. \end{aligned}$$

5. 已知 $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{30} = 5.477$, 试求 $\sqrt{24.3} + \sqrt{0.03}$ 近似值.

解: $\sqrt{24.3} = \sqrt{2.7 \times 9} = 3\sqrt{2.7} = \frac{9}{10} \sqrt{30}$

$$\sqrt{0.03} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3}$$

$$\text{故 } \sqrt{24.3} + \sqrt{0.03} = \frac{9}{10}\sqrt{30} + \frac{1}{10}\sqrt{3} = \frac{9}{10} \times 5.477$$

$$+ \frac{1}{10} \times 1.732 = 4.9293 + 0.1732 = 5.1025.$$

6. 已知40和自然数n的最大公约数和最小公倍数分别为2, 39640, 求n的值。

解: 两自然数的积应等于于它们最小公倍数和最大公约数的积, 故

$$40n = 2 \times 39640$$

$$\text{那么 } n = 1982.$$

$$7. \text{ 计算 } (1)(-3)^2 - (-1.5)^2 \times \frac{2}{9} \div 6 \div \left[-\frac{2}{3}\right]$$

$$\div \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times (-1)^{26};$$

$$(2) \frac{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\frac{1}{2} - 4 \times \left(-1\frac{1}{2}\right)^2}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

$$\text{解: } (1) \text{ 原式} = 9 - (-3.375) \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \times 16 \times 1$$

$$= 9 + \frac{3375}{1000} \times \frac{8}{9} = 9 + 3 = 12.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{3 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} - 4 \times \frac{9}{4}}{2 \times \left(-\frac{8}{27}\right) \times \frac{9}{4} - 1}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + 2 - 9}{-\frac{4}{3} - 1} = \frac{-\frac{17}{3}}{-\frac{7}{3}} = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}。$$

8. 化简 $|\sin \alpha + \cos \alpha| - |\sin \alpha - \cos \alpha|$ 。
($0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$)

解 若 $0^\circ \leq \alpha < 45^\circ$ 时, 原式 $= \sin \alpha + \cos \alpha - (\cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \sin \alpha。$

若 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 原式 $= \sin \alpha + \cos \alpha - (\sin \alpha - \cos \alpha) = 2 \cos \alpha。$

9. 计算: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} + (1\frac{1}{2})(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{2} \div 5 + \frac{3}{7} \div (-2)$
 $+ (\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - (\frac{-2}{5})(\frac{-5}{7}) + (-\frac{1}{2})^3。$

解: 原式 $= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{3}{14} + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - \frac{1}{8}$
 $= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + (\frac{3}{5} - \frac{1}{10}) - (\frac{3}{14} + \frac{2}{7})$
 $= \frac{-4 + 2 - 1}{8} + \frac{6 - 1}{10} - \frac{3 + 4}{14}$
 $= -\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}。$

10. 已知某数的10%是8.5的40%，求这个数。

解: 设这个数为 x , 则

$$x10\% = 8.5 \times 40\% \quad x = 34。$$

11. 某工厂第三年生产总值比第一年生产总值增长21%，求每年平均增长率，又第一年的生产总值是第二年的百分之几？

解：设每年平均增长率为 x ，那么

$$a_3 = a_1 (1+x)^2, \text{ 又 } a_3 = a_1 (1+21\%) = 121\%$$

$$\therefore a_1 (1+x)^2 = a_1 \times 121\%, \quad (1+x)^2 = 121\%,$$

$$x = 0.1 \quad \text{答每年平均增长率为} 10\%,$$

$$\text{又与一年生产总值与第三年的比 } \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1}{a_1 \times 121\%} = \frac{100}{121} \\ \approx 82.6\%$$

12. 因式分解 (1) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$;

(2) 在实数范围内，有理数范围内

分解因式： $x^4 + x^2 - 6$ 。

$$\text{解：(1) } x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x^3 - 2x^2) - 2x^2 + 5x - 2 \\ = x^2(x-2) - (2x-1)(x-2) = (x-2)(x^2 - 2x + 1) = (x-2)(x-1)^2$$

$$\text{或者：原式} = (x^3 - 1) - 4x^2 + 5x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - (4x^2 - 1)(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1 + 1 - 4x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-2)(x-1)^2$$

$$\text{或者：原式} = (x^3 - 2x^2) - (2x^2 - 4x) + (x-2) \\ = (x-2)(x^2 - 2x + 1) = (x-2)(x-1)^2.$$

$$(2) \quad x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x^2 - 2); \cdots (\text{在有理数范围内}) \\ = (x^2 + 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) (\text{在实数范围内。})$$

13. 因式分解

$$(1) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12;$$

$$(2) \quad x^{n+1}z - 2x^{n+5}y^6 + x^5y^{12};$$

$$(3) \quad x^{n+5}y^m + x^{n+1}y^m + x^5y^m.$$

解:

$$(1) \text{原式} = (x^2+x)^2 + 3(x^2+x) - 10 = (x^2+x+5)(x^2+x-2) = (x^2+x+5)(x+2)(x-1).$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= x^n(x^{12} - 2x^6y^6 + y^{12}) = x^n(x^6 - y^6)^2 \\ &= x^n(x^3 + y^3)^2(x^3 - y^3)^2 \\ &= x^n(x+y)^2(x^2 - xy + y^2)^2(x-y)^2(x^2 + xy + y^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= x^5y^m(x^5+x+1) = x^5y^m[x^5-x^2+x^2+x+1] \\ &= x^5y^m[x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)] \\ &= x^5y^m(x^2+x+1)(x^3-x^2+1). \end{aligned}$$

14. 证明三个连续整数的立方的和能被9整除。

证: 设这三个连续整数为 $n+1$, n , $n-1$, 则

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + n^3 + (n-1)^3 &= 2n(n^2+3) + n^3 = 3n^3 + 6n \\ &= 3n(n^2+2) \end{aligned}$$

(1) 如 $n=3k$ 则 $(n+1)^3 + n^3 + (n-1)^3$ 能被9整除。

$$\begin{aligned} (2) \text{如} n=3k+1 \text{ 则 } 3(3k+1)[(3k+1)^2+2] &= 3(3k+1) \\ (9k^2+6k+3) &= 9(3k+1)(3k^2+2k+1), \text{ 命题成立.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{如} n=3k-1 \text{ 则 } 3(3k-1)[(3k-1)^2+2] &= 3(3k-1) \\ (9k^2-6k+3) &= 9(3k-1)(3k^2-2k+1) \text{ 命题成立.} \end{aligned}$$

15. 在实数范围内因式分解:

$$x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7.$$

解: 设 $x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$$\text{则 } x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac)$$

$$+d)x^2 + (ad+bc)x + bd. \quad \text{故有} \begin{cases} bd=7 \\ ad+bc=-44 \\ ac+b+d=-27 \\ a+c=-2 \end{cases}$$

这时, 可能 $b=1$, $d=7$ 故代入解得 $a=-7$, $c=5$,

故原式 $= (x^2 + 5x + 7)(x^2 - 7x + 1)$ 。 $b=-1$ (舍)

16. 比较 $\frac{x}{x - \frac{x^2}{x - \frac{x}{1-x}}} \text{ 与 } \frac{x + \frac{1}{y}}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} - \frac{1}{y(xyz + x + z)}$

的大小。(设 $x = \log_3 \pi$)

解: $\frac{x}{x - \frac{x^2}{x - \frac{x}{1-x}}} = \frac{x}{x - \frac{x^2}{\frac{x-x^2-x}{1-x}}} = \frac{x}{x + (1-x)} = x。$

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{y}}{x \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} - \frac{1}{y(xyz + x + z)} &= \frac{xy + 1}{y} - \frac{1}{y(xyz + x + z)} \\ &= \frac{(xy + 1)(zy + 1)}{y(xyz + x + z)} - \frac{1}{y(xyz + x + z)} \\ &= \frac{y(xyz + x + z)}{y(xyz + x + z)} = 1 \end{aligned}$$

而 $x = \log_3 \pi > \log_3 3 = 1$ 故 $x - \frac{x^2}{x - \frac{x}{1-x}}$ 大。

17. 化简 (1) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$;

(2) $\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{4x^2-20x+25}$

(已知 $4x^2-4x-15 < 0$)。

解: (1) 原式 $= \sqrt{a-1+1+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1+1-2\sqrt{a-1}}$
 $= \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}$

$\because a-1 \geq 0 \therefore a \geq 1$, 故 $\sqrt{a-1}-1 \geq 0$ 时即 $a \geq 2$ 时

原式 $= \sqrt{a-1} + 1 + \sqrt{a-1} - 1 = 2\sqrt{a-1}$; 当 $1 \leq a < 2$

时, 原式 $= \sqrt{a-1} + 1 + 1 - \sqrt{a-1} = 2$

(2) $4x^2-4x-15 < 0 \Rightarrow (2x-5)(2x+3) < 0$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

原式 $= \sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(2x-5)^2}$

$$= 2x+3+5-2x=8。$$

18. 化简 (1) $(5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}) \div (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$;

(2) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)^2$ 。

解: (1) 原式 $= \frac{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$= \frac{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})。$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) (\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) \\ &= 2 (\sqrt{6} + \sqrt{3}) (2\sqrt{2} - 2) = 4 (\sqrt{6} + \sqrt{3}) (\sqrt{2} - 1) \\ &= 4 (2\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}。 \end{aligned}$$

$$19. \text{化简: } (1) \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}};$$

$$(2) \sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}}。$$

$$\text{解: } (1) \text{原式} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \text{原式} = \sqrt{(a^2 - b^2) + a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$- \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{(\sqrt{a^2 - b^2} + a)^2}$$

$$- \sqrt{(\sqrt{a^2 - b^2} - b)^2}$$

$$= \begin{cases} a + b & a > \sqrt{2}b > 0 \\ 2\sqrt{a^2 - b^2} + a - b & 0 < b < a < \sqrt{2}b \end{cases}$$

$$20. (1) \text{已知 } |n| < 1, x = \sqrt{\frac{1 - n^2}{1 + n}}, \text{ 求}$$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \text{ 的值。}$$

$$(2) \text{已知 } \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

求 $n=1, 2, 3$ 时值, 并证 $n=k, k+1$ 时值的和等于 $n=k+2$ 时值。

解: (1) 原式 $=\frac{2x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$, 又 $\because |n|<1$, 则

$$x=\sqrt{\frac{1-n^2}{1+n}}=\sqrt{1-n}, \text{ 将 } x \text{ 值代入得:}$$

$$\text{原式}=\frac{2(1-n)(2-n)}{n^2}.$$

(2) (1) $n=1$ 时, $2, 3$ 时

代数式为 $1, 1, 2$ 。

(2) $n=k, k+1$ 时代数值的和是:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \\ & = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{而 } 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$\text{故上式} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]$$

这时 $n=k+2$ 时有 $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]$ 命题成立。

21. 计算 $10(2+\sqrt{5})^{-1} - \left(\frac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}} + 30$

$$\left(\frac{125}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

解： 原式 $= 10[-2\sqrt{5}] - 10\sqrt{5} + 30, 5\frac{3}{4}, 3 - \frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{2}$
 $= -20 + 10\sqrt{5} - 10\sqrt{5} + 30, 5, 3^{-1}$
 $= -20 + 50 = 30$

22. 已知 $\lg 2 = 0.30$, $\sqrt{10} = 3.16$, 求 2^{64} 的值

解： $\because \lg 2 = 0.30 \therefore 10^{0.30} = 2$ 。

$$\lg 2^{64} = 64 \lg 2 = 64 \times 0.30 = 19.2$$

$$\begin{aligned} \text{故 } 2^{64} &= 10^{19.2} = 10^{19} \times 10^{0.2} = 10^{19} \\ &\times 10^{0.5-0.3} = 10^{19} \times [10^{0.5} \div 10^{0.3}] \\ &= 10^{19} \times [3.16 \div 2] = 10^{19} \times 1.58 \\ &= 1.58 \times 10^{19}。 \end{aligned}$$

23. 不查表计算 (1) $\frac{\lg \sqrt{27} + \lg 8 - 3 \lg \sqrt{10}}{\lg 1.2}$;

(2) $\lg^3 2 + \lg^3 5 + 3 \lg 2 \lg 5$;

$$(3) \lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}});$$

$$(4) 10 \times 100^{\frac{1}{2} \lg^9 - \lg^2}.$$

解: (1) 原式 = $\frac{\frac{3}{2} \lg 3 + 3 \lg 2 - \frac{3}{2}}{\lg 1.2}$

$$= \frac{\frac{3}{2} [\lg 3 + \lg 4 - 1]}{\lg 1.2} = \frac{3}{2} \frac{\lg 1.2}{\lg 1.2}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$(2) \text{原式} = (\lg 2 + \lg 5)(\lg^2 2 - \lg 2 \lg 5 + \lg^2 5) + 3 \lg^2 \lg 5 = \lg^2 2 - \lg 2 \lg 5 + \lg^2 5 + 3 \lg 2 \lg 5 = (\lg 2 + \lg 5)^2 = 1$$

$$(3) \text{原式} = \frac{1}{2} \lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{2} \lg(6+4) = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{原式} = 10 \times 100^{\frac{1}{2} \lg^9 - \lg^2}$$

$$= 10 \times 10^{\lg^9 - \lg^4} = 10 \times 10^{\lg \frac{9}{4}}$$

$$= 10 \times \frac{9}{4} = \frac{45}{2} = 22 \frac{1}{2}.$$

24. 已知 $\lg 165 = 2.2174839$, $\lg 697424 = 5.8434969$

求 $\sqrt[5]{0.00000165}$ 的值,

解: 设 $x = \sqrt[5]{0.00000165}$ 则

$$\begin{aligned} \lg x &= \frac{1}{5} \lg 0.00000165 = \frac{1}{5} \times [\lg 165 - 8] \\ &= 2.8434969 \end{aligned}$$

故 $x=0.0697424$

25. (1) 查表求 $-2.8^{-1 \cdot 1}$ 的值;

(2) 已知 $\log_{12} 27 = a$ 求 $\log 6^{16}$;

(3) 已知 $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$,

$$\log_{x-1} x = \frac{a+b}{1-b} \text{ 求 } x$$

解: (1) 略

$$(2) \log_{12} 27 = \log_{12} 3^3 = 3 \log_{12} 3 = a$$

$$\text{故 } \log_{12} 3 = \frac{a}{3}$$

$$\log_{12} 3 = \log_{12} \frac{12}{4} = 1 - \log_{12} 4$$

$$= 1 - 2 \log_{12} 2 = \frac{a}{3} \quad \text{故 } \log_{12} 2 = \frac{3-a}{6}$$

设 $\log_6 16 = x$ 那么 $6^x = 16$

$$\text{有 } x \log_{12} 6 = \log_{12} 16 \quad \therefore x = \log_{12} 16 \div \log_{12} 6$$

$$\text{因而 } \log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{4 \log_{12} 2}{\log_{12} 2 + \log_{12} 3}$$

$$= \frac{4(3-a)}{3+a}$$

$$(3) \log_{x-1} x = \frac{a+b}{1-b} = \frac{\lg 3 + \lg 2}{1 - \lg 2} = \frac{\lg 6}{\lg 5}$$

$$= \log_5 6 \quad \text{设 } \frac{\lg 6}{\lg 5} = y \quad \text{则 } \lg_5 y = \lg 6$$

$$5^y = 6, \therefore y = \log_5 6, \text{ 故 } x = 6$$

$$26. \quad \text{解不等式: } \log_a \left(\frac{3}{2} \right)^{-2x} + \log_a \left(\frac{4}{9} \right)^{2x}$$

$$< \log_a \frac{2}{3}$$

$$\text{解: } \log_a \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \log_a \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} - \log_a \left(\frac{2}{3}\right)^5 < 0$$

$$(x^2 + 4x - 5) \log_a \frac{2}{3} < 0$$

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } \log_a \frac{2}{3} < 0, \text{ 这时 } x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$\text{有 } x > 1 \text{ 或 } x < -5.$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \log_a \frac{2}{3} > 0, \text{ 这时 } x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\text{有 } -5 < x < 1.$$

27. 下表中的对数值有二个是错误的, 请予纠正。

x	0.021	0.27	1.5
$\lg x$	$2a + b + c - 3$	$6a - 2b - 2$	$3a - b + c$
2.8	3	5	6
$1 - 2a + 2b$	$2a - b$	$a + c$	$1 + a - b - c$
7	8	9	14
$2(b + c)$	$3 - 3a - 3c$	$4a - 2b$	$1 - a + 2b$

$$\text{解: 若 } \lg 3 \neq 2a - b \text{ 则 } \lg 9 = 2 \lg 3 \neq 4a - 2b,$$

$$\lg 0.27 = 3 \lg 3 - 2 \neq 6a - 2b - 2$$

从而表上有三个是错误的, 与已知矛盾, 故知

$$\lg 3 = 2a - b$$

$$\text{若 } \lg 5 \neq a + c, \text{ 则 } \lg 2 = 1 - \lg 5 \neq 1 - a - c \text{ 因而}$$

$$\lg 8 = 3 \lg 2 \neq 3 - 3a - 3c,$$

$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 \neq 1 + a - b - c$$

从而表上有三个是错误的, 与已知矛盾, 故知

$$\lg 5 = a + c,$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lg 3, \lg 5 \text{ 的值, 知 } \lg 1.5 &= \lg 3 + \lg 5 - 1 \\ &= 3a - b + c - 1 \end{aligned}$$

同样知道 $\lg 7 = 2(b + c)$ 是错误的, 否则 $\lg 0.021$, $\lg 2.8$, $\lg 14$ 都是错的, 与已知矛盾? 故 $\lg 7 \neq 2(b + c)$ 应纠正为 $= 2b + c$ 。

28. 已知 $\lg 3 = 0.4771$, 问 3^{100} 是几位数? 它的个位数是多少?

$$\text{解: } \lg 3^{100} = 100 \lg 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

故 3^{100} 是 48 位数。

$$3^{100} = (3^4)^{25} = (81)^{25}, \text{ 末位是 } 1。$$

29. 设1980年底我国人口以10亿计算。

(1) 如果我国人口每年比一年平均增长 2% 那么到2000年底将达到多少?

(2) 要使2000年底我国人口不超过12亿, 那么每年比上年平均逐增率最高是多少?

解: (1) 按题意则1981年底将到

$$10 \times (1 + 0.02)$$

$$1982 \text{ 年底将达到 } 10 \times (1 + 0.02) + 10 \times (1 + 0.02) \times 0.02$$

$$= 10 \times (1 + 0.01)(1 + 0.02) = 10(1 + 0.02)^2$$

2000年底将达到 x 亿则

$$x = 10 \times (1 + 0.02)^{20} = 10 \times (1.02)^{20}$$

$$\lg x = \lg 10 + 20 \lg 1.02 = 1.1720$$

$$\therefore x = 14.859 \text{ (亿)}$$

(2) 设人口每年平均逐增率最高是 $y\%$, 则到2000年底

将达到 $10 \times (1 + \%y)^{20}$, 依题意有

$$10 \times (1 + Y\%)^{20} \leq 12$$

$$\text{而} \quad (1 + Y\%)^{20} \leq 1.2$$

$$\text{有} \quad \lg(1 + Y\%)^{20} \leq \lg 1.2$$

$$\lg(1 + Y\%) \leq 0.00396$$

$$1 + Y\% \leq 1.0092$$

$$Y\% \leq 0.0092$$

答我国人口每年比上年平均逐增率最高是0.92%

30. 按我国1978—1985年国民经济发展规划, 工业总产值平均每年增长10%, 问1985年工业总产值是1977年的多少倍?

$$\text{解: } x = (1 + 10\%)^8 = 1.1^8 \quad \lg x = 8 \lg 1.1 \Rightarrow x = 2.144 (\text{倍})$$

31. 已知 $\lg 2 \lg 5 = 0.2104$, 求具有三位小数的 $\lg 2$ 和 $\lg 5$

$$\text{解: } \begin{cases} \lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1 \\ \lg 2 \lg 5 = 0.2104 \end{cases} \Rightarrow \lg 2 [1 - \lg 2] = 0.2104$$

$$\lg^2 2 - \lg 2 + 0.2104 = 0 \Rightarrow \lg 2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0.8416}}{2} \\ = \frac{1 \pm \sqrt{0.1584}}{2}$$

查平方表根或开平方得: $\lg 2 = 0.301$, 从而 $\lg 5 = 0.699$.

32. 解关于 x 的不等式: $mx - 2 > x - 3m$.

$$\text{解: } mx - 2 > x - 3m$$

$$(m - 1)x > 2 - 3m$$

$$\text{当 } m > 1 \text{ 时, } x > \frac{2 - 3m}{m - 1}$$

$$m < 1 \text{ 时, } x < \frac{2 - 3m}{m - 1}$$