高中数学
同步专题分析

（高中一年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组
北京数学会海淀分会
编

航空工业出版社

高中数学同步专题分析

（高中一年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组
北 京 数 学 会 海 淀 分 会 编

航空工业出版社

（京）新登字161号

内容提要

本书是为高一年级和高二年级学生准备的与课堂教学同步的专题分析，每讲内容与中学课本的单元相对应，进度相一致，这样可以深化对基础知识的理解，熟练基本技能，掌握基本方法，如此循序渐进，分析问题、解决问题的能力将有较大的提高，从而为高三数学总复习打下坚实的基础。

本书可作为高一、高二年级学生及高中数学教师的参考书。

高中数学同步专题分析

（高中一年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组

北京数学会海淀分会　编

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里14号）

—邮政编码：100029—

全国各地新华书店经售

煤炭工业出版社印刷厂印刷

1993年10月第1版　1993年10月第1次印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7

印数：1—2000　字数：164千字

ISBN 7-80046-582-9/O·014

定价：5.50元

前　言

升入高中的学生，都有一个心愿：就是三年后考上大学，特别是升入一个理想的大学．所以高中学生除了课本之外，都愿意再读一些参考书，再做一些参考题，为高考奠定一个良好的基础．目前社会上参考书、复习资料可谓不少，但基本上都是为高三学生准备的，为高一、高二学生准备的参考书并不多见．我们这两册书就是为高中一年级和高中二年级学生准备的，取名《高中数学同步专题分析》，意在与高一、高二的教与学同步进行，读者从每册书的目录中不难发现，每讲内容与中学课本的单元相对应，与教学进度相一致．我们希望读者在学习课本内容的基础上，再学习相应的同步专题，这样可以深化对基础知识的理解，熟练基本技能，较牢固地掌握基本方法．如此循序渐进，分析问题、解决问题的能力将有较大的提高，从而为高三数学总复习打下坚实的基础．

参加本书编写工作的是我区有丰富教学经验的教师，并且都是区中心备课组的成员．书中倾注了他们多年教学的心得、体会．每册书的每一个专题除例题选析之外，还配有适当练习并给出答案．

本书不仅可以作为高一、高二学生的良师益友，也可作为教师备课时的参考书．

本册书的编者

北京十九中	李宪曾
北京理工附中	陈　路
北京理工附中	韩明武
北京石油附中	尹秀芬
北京京工附中	黄惠平
北京清华附中	冯　勃

目　　录

第1讲　求二次函数的解析表达式

二次函数有三种常用的解析表达式：

1．一般式：$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）。

2．顶点式：$y=a(x+m)^2+n$。顶点坐标为（$-m,n$）。

3．因式分解 式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)x_1$，x_2为二次函数的二个根）。

这三种表达式中，字母系数所代表的几何意义及这三种形式之间的关系，是必须掌握的基本知识．再能运用数学方法，进行分析，解题就不是困难的了．

最基本、最常用的数学方法，是综合法或分析法．如何运用这些方法呢？这就如同人们走路一样：首先要看准欲达到的解题目标；由已知条件出发，进行步步推理，推理的过程，始终要看准目标，分析条件与目标之间的联系或变化规律．其实，就是信息处理，控制方向的问题．

求二次函数解析表达式，一般地是选择上面三种形式中的一种作为解题目标，利用待定系数法，列出三个方程，确定出三个系数的值．如

例1-1　已知二次函数图象上三个点的坐标$A(-1,-15)$，$B(0,5)$，$C(1,9)$求这个二次函数的解析式．

将三个点的坐标，无论代入哪个二次函数表达式，比如**代入一般式得：**

$$\begin{cases} -15 = a - b + c \\ 5 = c \\ 9 = a + b + c \end{cases}$$ 解得：$$\begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \\ c = 5 \end{cases}$$

∴二次函数为$y = -8x^2 + 12x + 5$。

若将例1-1的条件中三个点的坐标改为例1-2。

例1-2 已知对称轴平行于y轴的抛物线，过点$A(2,0)$，$B(-4, 0)$，$C(0, 8)$。求这个抛物线的解析式。

分析1：如图1-1所示，$A(2, 0)$ $B(-4, 0)$ 是抛物线与x轴相交的两个点，其横坐标是该函数的二个根：$x_1 = -4$，$x_2 = 2$。若选择因式分解式为解题目标，只须再确定a的值。

设二次函数为$y = a(x+4)(x-2)$。——（1）式

又∵$C(0, 8)$ 在图象上。代入（1）式得：

$8 = a \times 4 \times (-2)$。则$a = -1$。

∴$y = -(x+4)(x-2)$。即$y = -x^2 - 2x + 8$为所求。

若将例1-2中的A、B点的坐标再改为$A(1, 5)$，$B(-3, 5)$，其他条件不变，求二次函数的表达式。

分析2：现在的A、B点不是抛物线与x轴的交点，可看作抛物线与直线$y = 5$的交点。如图1-2所示。A、B点坐标满足$y - 5 = a(x - x_1)(x - x_2)$。这就是条件与目标的关系，即应设二次函数为：$y = a(x-1)(x+3) + 5$。再将点$C(0, 8)$ 代入，得$a = -1$，则所求二次函数为$y = -x^2 - 2x + 8$。

例1-3 二次函数图象过$A(4, 6)$ 点，顶点坐标是$B(2, -2)$，求这个二次函数的表达式。

分析：∵已知顶点$B(2, -2)$ ∴应以顶点式为目标，即设二次函数为 $y = a(x-2)^2 - 2$，再将点$A(4, 6)$ 坐标代入得 $6 = a(4-2)^2 - 2$ ∴$a = 2$，∴$y = 2(x-2)^2 - 2$，为所求。

此题能否以因式分解式作为解题的目标呢？

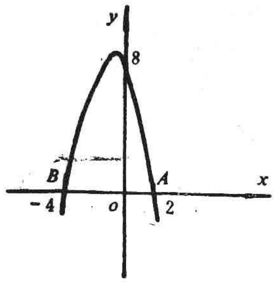

图 1-1

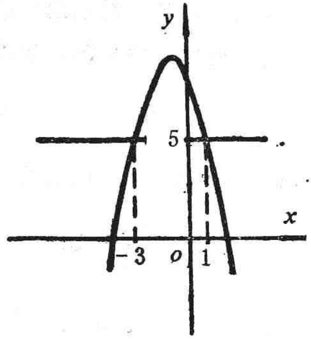

图 1-2

由图1-3知道，已知抛物线顶点$B(2,\ -2)$就知道了抛物线的对称轴$x=2$，又知抛物线过点$A(4,\ 6)$，由抛物线对称性可知点$C(0,\ 6)$也在抛物线上。A，C两点的纵坐标相等，则可设二次函数为$y=a(x-4)(x-0)+6$，再将$B(2,\ -2)$代入得$a=2$。即得$y=2(x-2)^2-2$。

说明：“已知二次函数顶点坐标”与“已知抛物线的对称轴方程和y的最值”，这两种说法是等价的。还可改为其他说法，如将例1-3改为：已知二次函数图象的顶点是$A(2,\ -2)$在直线$y=6$上截取线段长为4，求二次函数的解析式。结果是一样的。

例1-4 已知抛物线的对称轴平行于y轴，顶点是$A(1,3)$与直线$y=1$的交点横坐标之积为-1，求此抛物线的表达式。

分析1：

$\because A(1,\ 3)$为抛物线顶点

$\therefore$设抛物线为$y=a(x-1)^2+3$

又$\because$有条件：抛物线与$y=1$的交点横坐标之积为-1。

$\therefore$将$y=a(x-1)^2+3$化为$y=ax^2-2ax+a+3$。如图1-4

第二步把不同名的反三角函数值化为同名的反三角函数值，利用反三角函数的单调性来比大小。

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$y=\arcsin x$在$[-1,\ 1]$上是增函数，

$\because\quad -1<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{6}}{3}<1,$

$\therefore\quad \arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$

即　$\arcsin\frac{1}{3}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}.$

综上所述，有

$$\arcsin\frac{1}{3}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}<\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

（2）$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$是用反三角函数形式表示的角，可以用先求出其某一三角函数值，再讨论角的范围的方法比较大小。

设　$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\alpha,\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\beta,$

则　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3},$ 且$\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right).$

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4},$$

分析3：

设二次函数为$y=ax^2+bx+c$。需找出关于a、b、c的三个方程。

∵（1，3）点在图象上。∴$3=a+b+c$ ①式。

∵x_1, x_2是方程$1=ax^2+bx+c$的二个根，且$x_1 \cdot x_2=-1$。

∴$\dfrac{c-1}{a}=-1$ ②式。

∵二次函数的顶点横坐标＝1。∴$-\dfrac{b}{2a}=1$ ③式

解方程组 $\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases}$ 得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$

∴$y=-x^2+2x+2$为所求。

或由题意得方程组：$\begin{cases} \dfrac{4ac-b^2}{4a}=3 \\ \dfrac{c-1}{a}=-1 \\ 3=a+b+c \end{cases}$

或由题意得方程组：$\begin{cases} \dfrac{4ac-b^2}{4a}=3 \\ \dfrac{c-1}{a}=-1 \\ -\dfrac{b}{2a}=-1 \end{cases}$

所得结果均相同。

但是，仅由一个顶点得三个方程的解法是错误的：

$$\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 1 = -\dfrac{b}{2a} \\ 3 = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$ 则a、b、c无定解。

例1-5 二次函数的图象过（1，4），（2，6）点，在x轴上截取长为5的线段．求其解析式。

分析：

∵已知的二个点（1，4），（2，6）没有显著特点，不仿设二次函数为一般式，将二个点的坐标代入，得2个关于a、b、c的方程．然后再用a、b、c表示出在x轴上截取的线段长等于5，则得三个方程：

$$\begin{cases} 4 = a + b + c \\ 6 = 4a + 2b + c \\ 5 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \end{cases} \quad 得 \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

∴二次函数为$y = -x^2 + 5x$或$y = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{3}$.

如果着眼于条件：在x轴上截取长为5的线段．则设二次函数为$y = a(x - x_1)(x - x_2)$．x_1，x_2为方程的二个根，不仿设$x_2 > x_1$、则x_1，x_2，a为解题目标．也可得方程组：

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 5 \\ 4 = a(1-x_1)(1-x_2) \\ 6 = a(2-x_1)(2-x_2) \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \\ a = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = -2 \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

所得二次函数为 $y = -x(x-5)$ 或 $y = \dfrac{1}{6}(x+2)(x+7)$。

例1-6 将 $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ 的图象左移 2 个单位，再下移 1 个单位，求最后图象的解析式。

分析：

∵二次函数的图象在平移（上下或左右）过程中，表达式的二次项系数 a 的值不变。以顶点式为解题目标，只须确定顶点坐标。原来的顶点坐标是（1，2），左移 2 个单位后顶点变为（-1，2），再下移 1 个单位，顶点为（-1,1）

∴ $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 1$ 为所求。

反之，一个抛物线，经过上述的平移，所得新抛物线的解析式是 $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2$，那么原来的解析式是什么？

（解略）。

例1-7 已知：抛物线 C：$y = -(x+m)^2 + 1$，直线 l：$y = x$

（1）$m = ?$ C 与 l 截出的线段长为4？

（2）$m=$？C与l只有一个公共点？

分析：

（1）解题目标是求m的值．m的值需满足条件：C与 l 截出线段长为 4 并用m表示出这个线段．由此得出关于m的方程．m的意义，如图1-5所示．

由 $\begin{cases} y=-(x+m)^2+1 & ①式 \\ y=x & ②式 \end{cases}$

得：$x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$ ③式．

设交点为（x_1，y_1），（x_2，y_2）．由 ② 式得$x_1=y_1$，$x_2=y_2$．由③式得$(x_1-x_2)^2=4m+5$．则$(y_1-y_2)^2=4m+5$．

∵ $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4^2$．

∴$2(4m+5)=4^2$．解得$m=\dfrac{3}{4}$

由③式，x有解需$\Delta=(2m+1)^2-4(m^2-1)\geqslant 0$．

解得$m\geqslant -\dfrac{5}{4}$．∴$m=\dfrac{3}{4}$满足$\Delta>0$

∴$m=\dfrac{3}{4}$时，C在 l 上截出线段长为 4．

（2）∵C与l只有一个交点，即截出的线段长为0．（也即是$\Delta=0$）

∴当$m=-\dfrac{5}{4}$时，C与l只有一个交点．

例1-8 已知：抛物线$f(x)=ax^2+bx+c$如图1-6 所示．试判断a，b，c，$a+b+c$，$a-b+c$，b^2-4ac的符号．

解：

∵抛物线开口向下，∴$a<0$．

∵抛物线与y轴交于x轴下方．

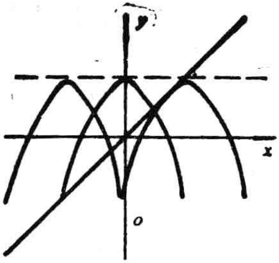

图 1-5

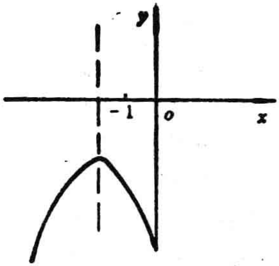

图 1-6

$\therefore c<0$。

$\because$抛物线的对称轴在 y 轴左侧. $\therefore -\dfrac{b}{2a}<0$ 即 $b<0$。

$\because$抛物线在x轴下方　$\therefore f(1)=a+b+c<0$

同理$f(-1)=a-b+c<0$

$\because f(x)=0$无实根. $\therefore \Delta=b^2-4ac<0$。

习　题　一

1. 二次函数图象过$A(2,0)$，$B(-4,0)$，$C(1,-5)$点，求其解析表达式.

2. 求图象过$A(0,-1)$，$B(1,-1)$，$C(2,-4)$点的二次函数的解析表达式.

3. 求顶点是$(-1,1)$过$(0,3)$点的二次函数.

4. 求过$(1,9)$，$(-3,9)$点且与直线$y=1$相切的二次函数.

5. $y=ax^2+bx+c$的对称轴是$x=-3$，y的最大值是-1，在y轴上截距为-4. 求其解析式.

6. 函数$y=ax^2+bx+c$的图象过$(-1,1)$和$(0,-1)$点，当$x<-1$时y随x增大而增大，$x>-1$时，y随x增大而减小，求函数表

达式。

7. 已知$y=ax^2+bx+c$的图象顶点（1，－4）与x轴截出线段长为6，求这个函数的表达式。

8. 已知函数$y=ax^2+bx+c$的顶点是（1，3），二根之积为0，求函数的解析式。

9. 已知函数$f(x)=ax^2+bx+c$，$f(1)=0$，并在直线$y=1$上截出线段长为$\sqrt{2}$，求$f(x)=?$

10. $f(x)=ax^2+bx+c$的图象顶点是（1，3），两根的立方和为26，求$f(x)=?$

11. $f(x)=ax^2+bx+c$的图象顶点是（2，3）与直线$y=3x+9$的交点横坐标是1，求$f(x)=?$

12. 将$y=2(x+1)^2+3$的图象向右平移3个单位，再下移4个单位，求最后图象的解析式。

13. $y=2(x+1)^2+3$的图象是经过向右平移3个单位再下移4个单位后得到的，求原来图象的解析式。

14. 已知抛物线$C: y=(x-m)^2+2m$，直线$l: y=-x-1$

（1）$m=?$ C与l截出的线段长为4。

（2）$m=?$ C与l只有一个公共点。

15. 抛物线$C_1: y=2x^2-2mx+2m-3$与抛物线$C_2: y=x^2+(n-2)x-n$，当C_1与C_2有相同的顶点时，求$m=?$，$n=?$

16. 若$y=ax^2+bx+c$的图象如图1-7所示，试判断a、b、c、$a+b+c$、b^2-4ac的符号。

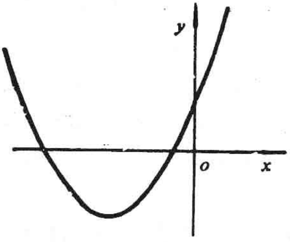

图 1-7

答案

1. $y=x^2+2x-8$. 2. $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1$. 3. $y=2(x+1)^2+1$. 4. 同3题. 5. $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2-1$. 6. $y=-2(x+1)^2+1$. 7. $y=\frac{4}{9}(x-1)^2-4$. 8. $y=-3(x-1)^2+3$. 9. $y=4x^2-4x$. 10. $y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3$. 11. $y=9(x-2)^2+3$.
12. $y=2(x-2)^2-1$. 13. $y=2(x+4)^2+7$. 14. (1) $m=-\frac{11}{12}$. (2) $m=-\frac{1}{4}$. 15. $m=2, n=0$. 16. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a+b+c>0$, $b^2-4ac>0$.