九年制义务教育初中数学读物

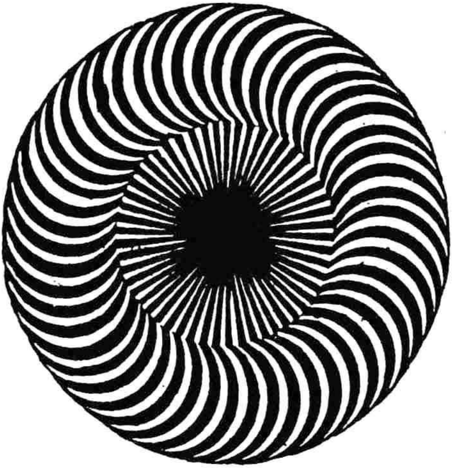
主编 罗四维 杨泰良

函数

杜永中

四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

函数

杜永中

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑:何伍鸣

封面设计:何一兵

九年制义务教育初中数学读物

函数　　杜永中

四川教育出版社出版发行　　(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销　　乐山市印刷厂激光照排印刷

开本787×960毫米　1/32印张3.5　插页　1　字数60千

1992年8月第一版　　1992年8月第一次印刷

印数:1—4860册

ISBN7—5408—1735—6/G·1657　　定价:1.30元

前　言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重

取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目　录

一　函数概念

函数概念是数学中，自然也是中学数学中最重要的概念之一."函数观点"是重要的数学思想.本书将通过对一些具体实例的分析，帮助读者正确理解函数这一重要概念；掌握一次函数，二次函数的性质和图象特征以及它们的应用.

§1　常量和变量

量是事物的一种特征，它总是具体的.比如，我们说一个物体的体积是 5 立方米；今天气温是 25℃；小王身高 1.57 米、体重 60 公斤.这里体积、温度、身高和体重就是表明了事物某种特征的量.量是我们经常要碰到的一个概念，它广泛地存在于生产实践、科学实验、日常生活中.时间、距离、产量、长度、面积、体积、温度等等都是量.数学把量、量的运动和变化、量与量之间的关系作为它的重要研究内容.

不同的量表明了事物不同的特征，一般说来是不能进行比较的.同类的量，当取定了度量单位以

后，可以度量它们的大小. 例如，对温度来说可以用标准摄氏温度计上的“度”做度量单位，测得一个人的温度是 37℃，或 37.5℃；对于时间，可以用“小时”、“分”、“秒”做单位去度量；对于长度可以用“米”、“厘米”做单位去度量，等等. 度量的结果，就得到一个抽象的数. 这个数我们称为量的数值，简称量的值. 一个量的大小，在取定度量单位后，就是由它的数值来决定的.

许多量在一定条件下都是变化着的，在变化的过程中它们可以取不同的值. 天气预报明天最高气温 25℃，最低气温 15℃，是说明天的气温在这天内随着不同的时刻在 15℃—25℃之间变化着. 图 1—1 是气温自动记录仪记下的冬季某一天里气温的变化.

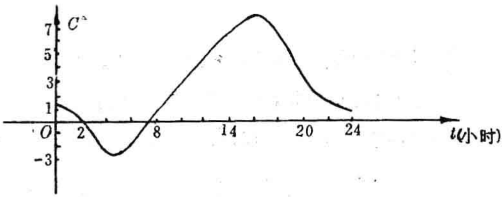


图 1—1

从图上可以看到这天气温在－3℃—8℃之间变化，下午四点左右气温最高.

小张从旅游城市乐山骑自行车以每小时 15 公里的速度向成都进发. 他行过的路程 s（公里）和时间 t（小时）之间有关系 $s=15t$. 这里，时间、路程这两

个量都在变化，可以取不同的值，而速度每小时 15 公里保持不变.

这种在某一过程中可以取不同数值的量，叫做变量. 而在过程中始终保持同一数值没有变化的量叫做常量或常数.

在第一个例子中，气温和时间都是变量；在第二个例子中路程和时间是变量，而速度是常量.

对于变量和常量这两个概念，以下几点值得注意.

常量和变量是对某一过程来说的，是相对的，它们的区分需要根据我们所考察的过程来决定. 同一个量在某些过程中，在一定的条件下可以看作是常量，但在另外的情况下也可以看做是变量. 例如，重力加速度 g 在地球的同一地点被看做是常量；但从不同的地点来考察却是个变量. 重力加速度在赤道是 978 厘米/秒^2，在北极是 983 厘米/秒^2，在北京是 980.12 厘米/秒^2，它可以取不同的值. 又如，仅仅从匀速运动的公式 $s=vt$(s 表示路程，t 表示时间，v 表示速度)，还不能完全确定哪些量是变量，哪些量是常量. 当我们研究同一匀速运动中所经历的时间与路程间的关系时，v 是常量，t 和 s 都是变量；但如果是研究同一距离内，速度和时间的关系时，则路程 s 是常量，而速度 v 和时间 t 则是变量了.

这种变与不变的相对性观点，在我们的数学学习与研究中是要经常用到的.

作为练习，请读者考察下面例子中的变量和常

量.

如图 1—2，点 M 在平面上运动，r 表示 M 与定点 O 的距离，α 表示射线 OM 与定轴 OA 之间所成的角. 如果 M 沿定直线 OD 运动，哪些量是变量，哪些量是常量？如果 M 沿圆心在 O 点、半径为 r 的圆周运动，哪个量是常量，哪个量是变量？

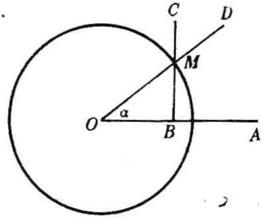


图 1—2

变量的变化常常是有一定范围的. 由于变量的大小是由它的值来决定的，因此变量的变化范围就是这个变量所取值的范围.

变量的所取值范围，本质上是由问题的实际条件所决定的.

设一个工人一天可以生产 50 个零件，以同样的效率 n 个工人一天可生产 y 个零件，则有 $y=50n$. 这里 n 和 y 都是变量，而且 n 和 y 都只能在自然数中取值. 因为工人的个数和零件的个数都必须是一个正整数.

设平面凸多边形的边数为 n，其内角和为 s，我们知道 $s=180°(n-2)$，这里的变量 n 只能取大于或等于 3 的自然数.

自由落体公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$，这里 g 是该物体下落处的重力加速度，是一个常量；t 是下落时间；s 是下

落距离.这里的变量 t 亦不能任意取值.设 t_0 是落到地面所需时间,则 t 只能取 0 到 t_0 间的实数值.因为当物体已落到地面后,就已不再是自由落体了.

对于抽象的代数式里的字母所表示的变量的取值范围,我们规定,就是使这个代数式有意义的变量所取实数值的范围.

在代数式 x^2-1 中,不论 x 取任何实数,它都有意义,因此变量 x 的取值范围是一切实数.

在代数式 $\frac{1}{x^2-1}$ 中,当 $x=\pm1$ 时无意义,而当 $x\neq\pm1$ 时都有意义,因此变量 x 的取值范围是 $x\neq\pm1$ 的一切实数.

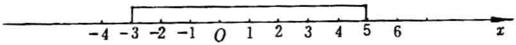
对于代数式 $\sqrt{1-x}$,只有当 $1-x\geqslant0$,即 $x\leqslant1$ 时才有意义,因此变量 x 的取值范围是 $x\leqslant1$ 的一切实数.

变量的取值范围,在简单情况下可用不等式表示.为了方便,也为了更形象地表示变量的取值范围,这里我们引进区间这个概念.

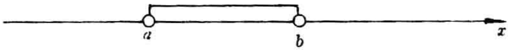
设有两个实数 $a<b$,满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体,叫做从 a 到 b 的闭区间,记为 $[a,b]$,读做"闭区间 a,b".用数轴上的点来表示,它就是介于 a,b 之间,且以 a,b 为端点的一条线段:

闭区间 $[a,b]$

比如闭区间$[-3,5]$，就表示了满足不等式$-3\leqslant x\leqslant 5$的一切实数：

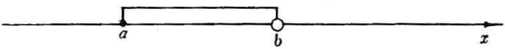


满足条件$a<x<b$的一切实数的全体称为从a到b的开区间，记为(a,b)，读做“开区间a、b”. 开区间在数轴上表示，就是介于a,b之间的不含端点a、b的线段：

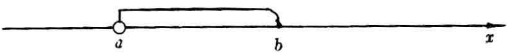


开区间(a,b)

满足条件$a\leqslant x<b$或者$a<x\leqslant b$的一切实数的全体叫做从a到b的半开区间，分别记为$[a,b)$或$(a,b]$. 它们在数轴上表示，亦是介于a,b间的一条线段，但不包含它的一个端点b或a：



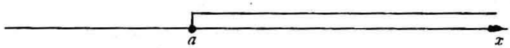
半开区间$[a,b)$



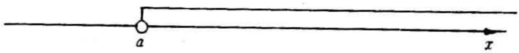
半开区间$(a,b]$

为了记号上的统一，我们把全体实数看做是从 $-\infty$（读做“负无穷”）到 $+\infty$（读做“正无穷”）的开区间，记为 $(-\infty,+\infty)$，它在数轴上表示整个数轴.

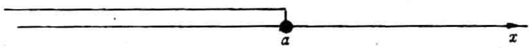
相应地，我们用区间 $(a,+\infty)$ 表示大于 a 的一切实数；用区间 $[a,+\infty)$ 表示适合 $a\leqslant x$ 的一切实数 x；用区间 $(-\infty,a)$ 或区间 $(-\infty,a]$ 分别表示适合 $x<a$ 或 $x\leqslant a$ 的一切实数 x. 它们在数轴上的表示，就是一条包含或不包含端点的射线：



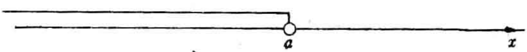
区间 $[a,+\infty)$



区间 $(a,+\infty)$



区间 $(-\infty,a]$



区间 $(-\infty,a)$

§2 函数概念

量的变化是客观世界不断运动、不断变化、不断发展在量的方面的表现. 由于客观世界中各个事物、对象的变化、运动、发展并不是孤立的，而是互相联系、互相依赖、互相制约着的，因此，当我们要认识客观世界，要研究反映客观对象量的特征的时候，也就不仅要从量的变化中去考察，更要从量与量之间的互相联系、互相制约、互相依赖中去考察.

量与量之间的这种互相依存的关系，最基本和最重要的就是函数关系.

我们知道，圆的周长 C 和圆的半径 R 有如下关系：$C=2\pi R$. 这个关系的特点是什么呢？第一，变量 R 可以在区间$(0,+\infty)$上任意取值；第二，当半径 R 的值一经取定，随之由上述公式立即可以确定出该圆周长 C 的值. 亦就是说，对于变量 R 的任一确定的值，都可以由公式 $C=2\pi R$ 使得变量 C 有唯一确定的值与之相应.

当我们去交信时，一封平信该贴多少邮票呢？当然，邮资 s 和信件的重量 g 是紧密相关的. 目前邮局的规定是：一封邮往外埠（市、县以外）的国内平信，每重 20 克收费 2 角，不足 20 克都以 20 克计. 根据这一规定，一封平信的邮资就是由这封信的重量所唯一确定的. 比如，一封信重 30 克，那么按规定应贴

足 4 角的邮票;一封信重 52 克,则应贴 6 角的邮票,等等.在这里对变量 g(信重)的每一个确定的值,变量 s(邮资)都有唯一确定的值与之相对应.虽然我们没有用公式来表示这一对应关系,但这一确定的对应关系无疑是实实在在的.

这种两个变量之间的确定的对应关系,就是函数关系.

定义:设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于变量 x 在某一变化范围内的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值与之对应,那么我们就说 y 是 x 的函数,x 叫做自变量,y 也叫因变量.

在上面的例子中,圆半径 R 是自变量,圆周长 C 是 R 的函数.

信重 g 是自变量,邮资 s 是信重 g 的函数.

一个只含有一个字母的代数式,它的值是由这个字母所取值确定的.对于字母的使得代数式有意义的每一个值,这个代数式都有唯一确定的值与之对应.因此,可以认为,每一个含有一个字母的代数式都是这个字母的函数.例如:x^2+5 是 x 的函数,$\frac{3}{t^2+2}$是 t 的函数,$\frac{1}{\sqrt{2-u}}$是 u 的函数,等等.若设 $y=x^2+5$,则变量 y 是 x 的函数,x 是自变量,它的取值范围是$(-\infty,+\infty)$.同样,若设 $y=\frac{1}{\sqrt{2-u}}$,则 y 是 u 的函数,自变量是 u,它的取值范围是$(-\infty,2)$.

在函数的定义中，有两点是关键的．其一是，自变量的取值范围；其二是这两个变量间的对应关系（也就是怎样由自变量 x 的值去确定函数 y 的值，这个规律是怎样的？）当这两点确定以后，这个函数就确定了．两个函数要称为是相同的，也就是要 i）自变量的取值范围相同（但与选用什么字母表示自变量无关）；ii）两变量的对应关系（不一定是具体的解析式）相同．二者缺一不可．

函数的值：

由函数的定义，当自变量 x 在某一变化范围内取一个确定的值，例如 $x=a$ 时，函数有一个唯一确定的对应值．这个对应值，我们就称为是当 $x=a$ 时的函数值，简称为函数值．

函数 $y=\frac{3}{2+t^2}$，当 $t=0$ 时的函数值是 $y=\frac{3}{2+0^2}=\frac{3}{2}$；当 $t=1$ 时的函数值是 $y=\frac{3}{2+1^2}=1$，当 $t=a$ 时的函数值是 $y=\frac{3}{2+a^2}$，等等．当一个函数的表达式是一个代数式时，求函数的值，也就是求该代数式的值．

函数和函数值的记号：

从上面的例子我们已看到，即使是对于一个具体的函数，在表示函数的值时，没有一个恰当的符号是很不方便的．因此，选用一个适当的符号来表示函数关系也就十分必要了．

我们约定，用记号 $y=f(x)$ 表示“变量 y 是自变

量 x 的函数". 这里字母 f 表示了变量 y 与 x 之间的函数关系即对应规律. 对不同的函数关系应该选用不同的字母去表示, 特别是要同时考虑几个不同的函数时, 就更应如此, 以免引起混淆. 例如, 圆的周长 C 和圆的面积 S 都是圆的半径 R 的函数, 这显然是两个不同的函数: $C=2\pi R$, 而 $S=\pi R^2$. 当我们要同时考察这两个函数时, 如果用 $C=f(R)$ 表示 C 是 R 的函数, 那么在表示圆面积 S 与 R 的函数关系时就不能再用 $S=f(R)$ 了. 这时应选用另外的字母, 比如可以用 $S=g(R)$ 表示 S 与 R 的函数关系. 在许多场合, 我们就直接用 $f(x)$ 的形式表示 x 的某个函数.

设有函数 $y=f(x)$. 我们规定用 $f(1)$ 表示当 $x=1$ 时的函数值, $f(2)$ 表示当 $x=2$ 时的函数值, ……一般地用 $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时的函数值. 当然, 这里 $1,2,\cdots,a$ 都要在 $f(x)$ 的定义域内.

例 1　设 $f(x)=2x^2-x+5$, 求当 x 分别为 1、$\frac{1}{2}$、-1、a 时的函数值.

解: $f(1)=2\times1^2-1+5=6$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+5=5;$$

$$f(-1)=2\times(-1)^2-(-1)+5=8;$$

$$f(a)=2a^2-a+5.$$

在求函数 $y=f(x)$ 当 $x=a$ 的值 $f(a)$ 时, 只需在 $f(x)$ 的表达式中用 a 代替 x, 并按通常的计算程