XINSHIJI JINGDIAN 新世纪 经典系列

高等院校经典教材全程同步辅导用书

配套《高等代数》第三版 北京大学数学系 编

高等代数

（北大第三版）

课后习题同步精解

孙志荣 编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等院校经典教材全程同步辅导用书

高等代数

（北大第三版）

课后习题同步精解

孙志荣　编

北京航空航天大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数(北大第三版)课后习题同步精解 / 孙志荣编. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5124-0897-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①高等代数—高等学校—题解 Ⅳ. ①O15—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 173767 号

高等代数

(北大第三版)

课后习题同步精解

孙志荣 编

责任编辑：葛瑞英

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

三河市华润印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:710×1 000 1/16 印张:17.5 字数:494 千字

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷 印数:4500 册

ISBN 978-7-5124-0897-5 定价:28.00 元

前　言

高等代数是大学数学专业的一门主干性基础课程，是数学类考研专业课的必考课程。由高等教育出版社出版，北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》(第三版)是该专业课的经典教材，被很多高等院校所采用。

本书是与北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》(第三版)配套的课后习题答案精解，按照该教材各章习题的编排，每个题目均包含分析和解答：分析部分包括解题思路，所用的原理和方法，以及与教材对应的知识点；解题部分对相应的课后习题做出了详细解答。

本辅导书旨在帮助读者提高自身的习题分析能力和解题能力，学会基本的解题方法和技巧，深化对高等代数相关基本知识的理解和巩固，从而帮助读者更好地学习该课程，提高应试能力。

本书可以作为大学数学类专业的学生学习"高等代数"课程的参考书、数学专业研究生考试的复习用书以及本课程的教师备课和批改作业时的参考用书。

由于作者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

孙志荣

2012 年 6 月

目　　录

第一章　多项式

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$,求商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$;

2) $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$.

【分析】本题考查带余除法:设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在唯一的多项式

$$q(x),r(x)\in P[x]$$

使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或者$\partial(r(x))<\partial(g(x))$.则称 $q(x)$是 $g(x)$ 除 $f(x)$的商,$r(x)$为余式.

解:1)

$$\begin{array}{r|r|l}
g(x)=3x^2-2x+1 & f(x)=x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9}=q(x) \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & r(x)=\qquad -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

可得

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\right)g(x)+\left(-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}\right)$$

因此

$$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$$

2)

$$\begin{array}{r|r|l}
g(x)=x^2-x+2 & f(x)=x^4\qquad -2x+5 & x^2+x-1=q(x) \\
 & x^4-x^3+2x^2 & \\
\cline{2-2}
 & x^3-2x^2-2x+5 & \\
 & x^3-x^2+2x & \\
\cline{2-2}
 & -x^2-4x+5 & \\
 & -x^2+x-2 & \\
\cline{2-2}
 & r(x)=\qquad 5x+7 &
\end{array}$$

因此可得

$$f(x)=(x^2+x-1)g(x)+(-5x+7)$$

$$q(x)=x^2+x-1, r(x)=-5x+7$$

2. m,p,q 适合什么条件时,有

1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$;

2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$.

【分析】 能被整除则说明余式等于零,利用带余除法或者普通除法求出余式 $r(x)$,令其等于零,列方程组解未知数.

解: 1)

$$
\begin{array}{r|l|l}
g(x)=x^2+mx-1 & f(x)=x^3 \qquad\qquad +px+q & x^2+x-1=q(x) \\
 & \quad x^3+mx^2 \qquad\quad -x & \\
\hline
 & \quad -mx^2+(p+1)x+q & \\
 & \quad -mx^2-m^2x+m & \\
\hline
 & \qquad (p-1+m^2)x+(q-m) &
\end{array}
$$

所得余式为 $r(x)=(p-1+m^2)x+(q-m)$,令余式为零. 即

$$(p+1+m^2)x+(q-m)=0$$

可得方程组

$$\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

因此可得,当满足

$$\begin{cases} p=-1-m^2 \\ q=m \end{cases}$$

有

$$x^2+mx-1\mid x^3+px+q$$

2) 用普通除法计算余式,如下

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-mx+p-1+m^2 \\
x^2+mx+1 & x^4+\qquad px^2\qquad +q \\
 & x^4+mx^3+x^2 \\
\hline
 & -mx^3+(p-1)x^2+q \\
 & -mx^3-m^2x^2-mx \\
\hline
 & (p-1+m^2)x^2+mx+q \\
 & (p-1+m^2)x^2+m(p-1+m^2)x+q-1+m^2 \\
\hline
 & m(2-p-m^2)x+1+q-p-m^2
\end{array}
$$

所得余式为

$$r(x)=m(2-p-m^2)x+1+q-p-m^2$$

令余式为零,即得方程组

$$\begin{cases} m(2-p-m^2)=0 & (1) \\ q+1-p-m^2=0 & (2) \end{cases}$$

当 $m=0$ 时,代入(2)可得 $p=q+1$;当 $2-p-m^2=0$ 时,代入(2)可得 $q=1$.

因此可知,当

$$\begin{cases} m=0 \\ p=q+1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} q=1 \\ p+m^2=2 \end{cases}$$

有

$$x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$$

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$, $g(x)=x+3$;

2) $f(x)=x^3-x^2-x$, $g(x)=x-1+2\mathrm{i}$.

【分析】 用综合除法求商和余式,注意 $f(x)$ 按照降幂排列,缺少的项系数补 0.

解：1)

-3	2	0	-5	0	-8	0
		-0	18	-39	117	-327
	2	-6	13	-39	109	$1-327$

因此可得

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$$
$$r(x)=-327$$

2)

$1-2\mathrm{i}$	1	-1	-1	0
		$1-2\mathrm{i}$	$-4-2\mathrm{i}$	$-9+8\mathrm{i}$
	1	$-2\mathrm{i}$	$-5\mathrm{i}-2\mathrm{i}$	$1-9+8\mathrm{i}$

由此可得

$$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-(5+2\mathrm{i})$$
$$r(x)=-9+8\mathrm{i}$$

4. 把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式：

1) $f(x)=x^5, x_0=1$；

2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$；

3) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+7+\mathrm{i}, x_0=-\mathrm{i}$.

【分析】本题用综合除法求解，重点考查的是综合除法在转化多项式过程中的应用，对原系数连续多次应用综合除法，直到最高位

解：1) 由综合除法，

1	1	0	0	0	0	0
		1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0
		1	2	3	4	
1	1	2	3	4	5	
		1	3	6		
1	1	4	10	4	5	
		1				
	1	5				

因此　　$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$

2) 由综合除法，

$-\mathrm{i}$	1	$2\mathrm{i}$	$-(1+\mathrm{i})$	-3	$7+\mathrm{i}$
		$-\mathrm{i}$	1	-1	$4\mathrm{i}$
$-\mathrm{i}$	1	i	$-\mathrm{i}$	-4	$7+5\mathrm{i}$
		$-\mathrm{i}$	0	-1	
$-\mathrm{i}$	1	0	$-\mathrm{i}$	-5	
		$-\mathrm{i}$	-1		
$-\mathrm{i}$	1	$-\mathrm{i}$	$1-\mathrm{i}$		
		$-\mathrm{i}$			
	1	$-2\mathrm{i}$			

因此　　$x^4-2x^2+3=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$

3) 由综合除法，

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\
 & & -2 & 4 & -4 & 8 \\
\hline
-2 & 1 & -2 & 2 & -4 & 11 \\
 & & -2 & 8 & -20 & \\
\hline
-2 & -4 & 10 & -24 & & \\
 & & -2 & 12 & & \\
\hline
-2 & 1 & -6 & 22 & & \\
 & & -2 & & & \\
\hline
 & 1 & -8 & & &
\end{array}
$$

因此
$$
\begin{aligned}
&x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+(7+\mathrm{i})\\
=&(7+5\mathrm{i})-5(x+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3+(x+\mathrm{i})^4
\end{aligned}
$$

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，$g(x)=x^3+x^2-x-1$；

2) $f(x)=x^4-4x^3+1$，$g(x)=x^3-3x^2+1$；

3) $f(x)=x^4-10x^2+1$，$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

【分析】本题考查辗转相除法求最大公因式，对于多项式域的任意两个多项式，$f(x)$ 和 $g(x)$，在可以相差一个非零常数的意义下，存在一个最大公因式，可以利用辗转相除法求得.

解： 1)

$q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	$g(x)=x^3+x^2-x-1$ $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ $x^4+x^3-x^2-x$	$x=q_1(x)$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$ $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$r_1(x)=-2x^2-3x-1$ $-2x^2-2x$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_3(x)$
	$r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$ $-x-1$	
		0	

因此最大公因式为 $(f(x),g(x))=x+1$；

2)

$q_2(x)=$ $-\frac{1}{3}x+\frac{10}{9}$	$g(x)=x^3-3x^2+1$ $x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x$	$f(x)=x^4-4x^3+1$ x^4-3x^3+x	$x-1=q_1(x)$
	$-\frac{10}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$ $-\frac{10}{3}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{20}{9}$	$-x^3-x+1$ $-x^3+3x^2-1$	
	$r_2(x)=\frac{16}{9}x-\frac{11}{9}$	$r_1(x)=-3x^2-x+2$ $-3x^2+\frac{33}{16}x$	$-\frac{27}{16}x-\frac{441}{256}$ $=q_3(x)$
		$-\frac{49}{16}x+2$ $-\frac{49}{16}x+\frac{539}{256}$	
		$r_3(x)=-\frac{27}{256}$	

因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式为 $(f(x),g(x))=1$；

3)

$q_2(x)=$ $\frac{1}{4\sqrt{2}}x-\frac{1}{2}$	$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$ $x^4-2\sqrt{2}x^3-x^2$	$f(x)=x^4-10x^2+1$ $x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$	$1=q_1(x)$
	$-2\sqrt{2}x^3+7x^2+4\sqrt{2}x+1$ $-2\sqrt{2}x^3+8x^2+2\sqrt{2}x$	$r_1(x)=4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x$ $4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x$	$-4\sqrt{2}x+1$ $=q_3(x)$
	$r_2(x)=\quad -x^2+2\sqrt{2}x+1$	0	

因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式为 $(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

6. 求 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$；

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$；

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$.

【分析】利用辗转相除法求出最大公因式，将最大公因式用等式表示出来，逐步递推到含有 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的形式.

解： 1) 利用辗转相除法求最大公因式

$q_2(x)=x+1$	$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ $x^4\quad -2x^2$	$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$ $x^4+x^3-x^2\quad -2x-2$	$1=q_1(x)$
	$x^3+x^2\quad -2x-2$ $x^3\quad\quad -2x$	$r_1(x)=\quad x^3\quad -2x$ x^3-2x	$x=q_3(x)$
	$r_2(x)=\quad x^2\quad -2$	0	

根据辗转相除法的结果有

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=g(x)+(x^3-2x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=(x+1)r_1(x)+(x^2-2)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=xr_2(x)$$

逆向递推得到

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))=r_2(x)&=g(x)-q_2(x)r_1(x)\\&=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]\\&=-q_2(x)f(x)+[1+q_2(x)q_1(x)]g(x)\end{aligned}$$

从而可得，令

$$u(x)=-q_2(x)=-x-1$$

$$v(x)=1+q_2(x)q_1(x)=1+(x+1)=x+2$$

使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

2) 先利用辗转相除法求最大公因式

$q_2(x)=$ $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$	$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$ x^3+x^2-3x	$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$ $4x^4-2x^3-10x^2+8x$	$2x=q_1(x)$
	$-2x^2-2x+4$ $-2x^2-x+3$	$r_1(x)=\quad -6x^2-3x+9$ $-6x^2+6x$	$6x+9$ $=q_3(x)$
	$r_2(x)=-x+1$	$-9x+9$ $-9x+9$	
		0	

根据辗转相除法的结果有

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=2xg(x)+(-6x^2-3x+9)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})r_1(x)+(-x+1)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=(6x+9)r_2(x)$$

逆向递推得到

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=-r_2(x)=q_2(x)r_1(x)-g(x)\\&=q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]-g(x)\\&=q_2(x)f(x)+[-1-q_2(x)q_1(x)]g(x)\end{aligned}$$

从而可得，令

$$u(x)=q_2(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$v(x)=-1-q_2(x)q_1(x)=-1-2x(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

使得 $$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

3) 利用辗转相除法求最大公因式

$q_2(x)=x+1$	$g(x)=x^2-x-1$ x^2-2x	$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$ $x^4-x^3-x^2$	$x^2-3=q_1(x)$
	$x-1$ $x-2$	$-3x^2+4x+1$ $-3x^2+3x+3$	
	$r_2(x)=1$	$r_1(x)=\quad x-2$	

根据辗转相除法的结果有

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=(x^2-3)g(x)+(x-2)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=(x+1)r_1(x)+1$$

逆向递推得到

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)\\&=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]\\&=-q_2(x)f(x)+[1+q_2(x)q_1(x)]g(x)\end{aligned}$$

从而可得，令

$$u(x)=-q_2(x)=-x-1$$

$$v(x)=1+q_2(x)q_1(x)=1+(x+1)(x^2-3)=x^3+x^2-3x-2$$

使得
$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

【分析】 根据辗转相除法,当某次的余式是一个二次多项式的时候,下一次的余式为 0,因此求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的的商和余式,结合条件列方程求解.

解: 根据辗转相除法,可求得下列等式
$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=g(x)+[(1+t)x^2+(2-t)x+u]$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left[\frac{1}{1+t}x+\frac{t-2}{(1+t)^2}\right][(1+t)x^2+(2-t)x+u]$$
$$+\left[\frac{(t^2+t-u)(1+t)+(t-2)^2}{(1+t)^2}x+\frac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}\right]$$
且由题设知最大公因式是二次多项式,所以余式 $r_2(x)$ 为 0,即
$$\begin{cases}\dfrac{(t^2+t-u)(1+t)+(t-2)^2}{(1+t)^2}=0\\[2ex]\dfrac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}=0\end{cases}$$
从而可解得 $\begin{cases}u=0\\t=-4\end{cases}$.

8. 证明:如果 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$,且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

【分析】 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式,则存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$,使
$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$
并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的其它任何一个公因式都能整除 $d(x)$.

证明: 由于
$$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$$
因此 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

假设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式,则根据公因式的定义有
$$\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$$
由于已知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,因此存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$,使
$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$
从而由 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$ 可得 $\varphi(x)\mid d(x)$,因此 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

9. 证明:$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$,($h(x)$ 的首系数为 1).

【分析】 利用最大公因式可以表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个线性组合的性质,再结合第 8 题的已知结论证明.

证明: 因为 $(f(x),g(x))$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式,因此存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使
$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$
上述等式两边同时乘以 $h(x)$,可得
$$(f(x),g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$$
即证明 $(f(x),g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个线性组合.

由于 $(f(x),g(x))$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,因此有
$$(f(x),g(x))\mid f(x)\text{且}(f(x),g(x))\mid g(x)$$
由 $(f(x),g(x))\mid f(x)$ 知 $(f(x),g(x))h(x)\mid f(x)h(x)$,由 $(f(x),g(x))\mid g(x)$ 知 $(f(x),g(x))$

$h(x)|g(x)h(x)$,从而根据第 8 题的已知结论可知$(f(x),g(x))h(x)$是 $f(x)h(x)$与 $g(x)h(x)$的一个最大公因式,$(f(x),g(x))h(x)$的首项系数为 1,所以

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$$

因此结论成立.

10. 如果 $f(x),g(x)$不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$$

【分析】本题考查多项式互素的充分必要条件,如果多项式 $f(x)$与 $g(x)$是互素的,则存在多项式 $u(x)$与 $v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

证明:由于$(f(x),g(x))$表示 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,因此存在 $u(x),v(x)$使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

又因为 $f(x),g(x)$不全为 0,所以$(f(x),g(x))\neq 0$.

根据消去律,等式两端同时除以$(f(x),g(x))$,可得

$$1=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$$

根据多项式互素的充分必要条件,有

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$$

因此结论成立.

11. 证明:如果 $f(x),g(x)$不全为零,且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

那么$(u(x),v(x))=1$.

【分析】根据两个多项式互素的充分必要条件证明,如果多项式 $f(x)$与 $g(x)$是互素的,则存在多项式 $u(x)$与 $v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

证明:由于

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

因此$(f(x),g(x))$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,满足

$$(f(x),g(x))\mid f(x)\text{且}(f(x),g(x))\mid g(x)$$

因为 $f(x),g(x)$不全为 0,所以$(f(x),g(x))\neq 0$,即$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$和$\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$均为多项式.

根据消去律,等式两端同时除以$(f(x),g(x))$,可得

$$1=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$$

根据多项式互素的充分必要条件,有

$$(u(x),v(x))=1$$

因此结论成立.

12. 证明:如果$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$,那么

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

【分析】根据两个多项式互素的充分必要条件可知,如果多项式 $f(x)$与 $g(x)$是互素的,则存在多项式 $u(x)$与 $v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

将两个和式相乘展开合并成适当形式证明，也可以利用反证法证明.

证明：已知

$$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$$

根据互素的充分必要条件可知，存在 $u_1(x),v_1(x)$ 及 $u_2(x),v_2(x)$ 使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$$

将上面两个等式相乘展开并将适当的项合并，得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x)$$
$$+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1$$

所以根据多项式互素的充分必要条件可得

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

因此结论成立.

13. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 都是多项式，而且

$$(f_i(x),g_j(x))=1 \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

求证：$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

【分析】 利用多项式互素的定义，反复利用第 12 题的结论证明.

证明：已知

$$(f_i(x),g_j(x))=1 \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

因此可得

$$(f_1(x),g_j(x))=1 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

反复利用第 12 题结论，可得

$$(f_1(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

同理根据已知有

$$(f_i(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

再次利用第 12 题的结论可得，

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

14. 证明：如果 $(f(x),g(x))=1$，那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

【分析】 利用多项式互素的充分必要条件结合第 12 题的结论证明.

证明：由题设知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素，即 $(f(x),g(x))=1$，根据多项式互素的充分必要条件可知，存在 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

从而
$$u(x)f(x)-v(x)f(x)+v(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

即
$$[u(x)-v(x)]f(x)+v(x)[f(x)+g(x)]=1$$

所以
$$(f(x),f(x)+g(x))=1$$

同理
$$u(x)f(x)+u(x)g(x)-u(x)g(x)+v(x)g(x)=1$$

即
$$[v(x)-u(x)]g(x)+u(x)[f(x)+g(x)]=1$$

可得
$$(g(x),f(x)+g(x))=1$$

根据第 12 题的结论 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$. 因此结论成立.

15. 求下列多项式的公共根

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1;g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

【分析】 利用辗转相除法得到两个多项式的最大公因式，最大公因式的根就是两个多项式的公共根.

解：先求 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式,根据辗转相除法,可求得

$$(f(x),g(x))=x^2+x+1$$

当 $x^2+x+1=0$ 时,在复数范围内解此一元二次方程,它的两个根分别为

$$\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\text{和}\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

所以 $f(x)$和 $g(x)$的公共根为$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

16. 判别下列多项式有无重因式：

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

【分析】根据重因式的性质,如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充分必要条件是 $p(x)$是 $f(x)$和 $f'(x)$的公因式.

解：1) 先求多项式 $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ 的一阶微商,即

$$f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$$

用辗转相除法求出 $f(x)$和 $f'(x)$的最大公因式为

$$(f(x),f'(x))=(x-2)^2$$

所以 $f(x)$有重因式,且 $x-2$ 是 $f'(x)$的二重因式,即 $x-2$ 是 $f(x)$的三重因式.

2) 先求多项式 $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$ 的一阶微商,即

$$f'(x)=4x^3+8x-4$$

用辗转相除法求出 $f(x)$和 $f'(x)$的最大公因式为

$$(f(x),f'(x))=1$$

由于 $f(x)$和 $f'(x)$是互素的,所以 $f(x)$无重因式.

17. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

【分析】根据重根的定义,如果多项式 $f(x)$有重根,则这个重根也是一阶微商 $f'(x)$的根,即 $f(x)$和 $f'(x)$不互素,结合辗转相除法,只要余式 $r_1(x)$或者 $r_2(x)$等于 0,即说明 $f(x)$和 $f'(x)$不互素.

解：先求多项式 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 的一阶微商,即

$$f'(x)=3x^2-6x+t$$

用辗转相除法得

$q_2(x)=$ $\dfrac{9}{2t-6}x-\dfrac{45}{2(2t-6)}$	$f'(x)=3x^2-6x+t$ $3x^2+\dfrac{3}{2}x$	$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ $x^3-2x^2+\dfrac{1}{3}tx$	$\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}=q_1(x)$
	$-\dfrac{15}{2}x+t$ $-\dfrac{15}{2}x-\dfrac{15}{4}t$	$-x^2+\dfrac{3}{2}tx-1$ $-3x^2+2x-\dfrac{1}{3}t$	
	$r_2(x)=\qquad t+\dfrac{15}{4}$	$r_1(x)=\dfrac{2t-6}{3}x+\dfrac{t-3}{3}$	

将上述结果用等式表示为

$$f(x)=q_1(x)f'(x)+r_1(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})f'(x)+\frac{2(t-3)}{3}x+\frac{t-3}{3}$$

$$f'(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left[\frac{9}{2t-6}x-\frac{45}{2(2t-6)}\right]r_1(x)+t+\frac{15}{4}$$

当 $r_1(x)=\frac{2t-6}{3}x+\frac{t-3}{3}=0$ 时，$t=3$,此时 $f(x)$有 3 重根 $x=1$；

当 $r_2(x)=t+\frac{15}{4}=0$ 时，$t=-\frac{15}{4}$,此时 $f(x)$有 2 重根 $x=\frac{1}{2}$.

18. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

【分析】与第 17 题类似，根据重根的定义,如果多项式 $f(x)$有重根,则这个重根也是一阶微商 $f'(x)$的根,即 $f(x)$和 $f'(x)$不互素,结合辗转相除法，$f(x)$是三次多项式只要余式 $r_1(x)$或者 $r_2(x)$等于 0,即说明 $f(x)$和 $f'(x)$不互素.

解：令 $f(x)=x^3+px+q$,则其一阶微商为 $f'(x)=3x^2+p$,利用辗转相除法可得到

$$r_1(x)=\frac{2}{3}px+q, r_2(x)=\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}$$

如果 $r_1(x)=\frac{2}{3}px+q=0$,则可得 $p=0$ 且 $q=0$ 时,$f(x)=x^3$ 有三重根 $x=0$.

如果 $r_2(x)=\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}=0(p\neq 0)$,则可得 $4p^3+27q^2=0$ 时，$f(x)=x^3+px+q$ 有二重根 $x=-\frac{3q}{2p}$.

综上所述,当 $4p^3+27q^2=0$ 时,多项式 x^3+px+q 有重根.

19. 如果$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$,求 A,B.

【分析】根据根和余式的关系,满足 $r(x)=0$,从而求出 A,B 的值.或者根据已知 $x=1$ 是 Ax^4+Bx^2+1 的重根,则 $x=1$ 也是其一阶微商 $4Ax^3+2Bx$ 的根求 A,B 的值.

解：令 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$,则 $f'(x)=4Ax^3+2Bx$,由$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$,可得$(x-1)\mid 4Ax^3+2Bx$,即 $x=1$ 同时是 Ax^4+Bx^2+1 和 $4Ax^3+2Bx$ 的根,因此可得方程组

$$\begin{cases} A+B+1=0 \\ 4A+2B=0 \end{cases}$$

解得 $A=1,B=-2$.

20. 证明：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

【分析】根据多项式函数的一阶微商和原多项式函数的关系,由互素的定义推出结论.

证明：令多项式函数

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

则 $f(x)$的一阶微商为

$$f'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

因此可得 $f(x)=f'(x)+\frac{1}{n!}x^n$,由于 $f'(x)$和$\frac{1}{n!}x^n$ 是互素的,于是

$$\begin{aligned}(f(x),f'(x))&=(f'(x)+\frac{1}{n!}x^n,f'(x))\\&=(\frac{1}{n!}x^n,f'(x))=1\end{aligned}$$

从而根据多项式有重根的充分必要条件可知 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重根.

21. 如果 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根,证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

【分析】根据重根的定义,先对 $g(x)$ 求导得到 $f'''(x)$,$g(x)$ 及 a 之间的关系,根据已知 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根,逆推得出结论.

证明:已知

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

则对其求一阶和二阶微商得

$$g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)]$$

$$g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)$$

容易验证得到 a 是 $g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$ 的根.

假设 a 是 $g(x)$ 的 t 重根,则 a 是 $g'(x)$ 的 $t-1$ 重根,也是 $g''(x)$ 的 $t-2$ 重根.

已知 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根,所以

$$t-2=k+1\Rightarrow t=k+3$$

因此证得 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

22. 证明:x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

【分析】利用重根的定义和判断方法从正反两方面证明.

证明:充分性:根据已知 $f^{(k-1)}(x_0)=0$ 且 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$,知 x_0 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的单根.又由于

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$$

x_0 是 $f^{(k-2)}(x)$ 的二重根,x_0 是 $f^{(k-3)}(x)$ 的三重根,依此类推,可知 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根.

必要性:假设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根,根据多项式重根的性质可知 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根,是 $f''(x)$ 的 $k-2$ 重根,以此类推,x_0 是 $f^{(k-2)}(x_0)$ 的单根,并且 x_0 不是 $f^{(k)}(x)$ 的根.于是

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,f^{(k)}(x_0)\neq 0$$

23. 举例说明断语"如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根,那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根"是不对的.

【分析】结合重根的定义和性质举例.

解:例如,设 $f(x)=\frac{1}{m+1}x^{m+1}-1$,那么 $f'(x)=x^m$ 以 0 为 m 重根,但 0 不是 $f(x)=\frac{1}{m+1}x^{m+1}-1$ 的根.

24. 证明:如果 $(x-1)\mid f(x^n)$,那么 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

【分析】如果将 x^n 作为一个整体,本题即转化为证明 $(x-1)\mid f(x)$.

证明:根据已知 $(x-1)\mid f(x^n)$,可知 1 是 $f(x^n)$ 的根,即

$$f(1^n)=f(1)=0$$

可得 $(x-1)\mid f(x)$,如果把 x^n 看作为一个变量 t,根据 $(t-1)\mid f(t)$,有 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

25. 证明:如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,那么

$$(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$$

【分析】根据已知和结论,结合等式 $(x^2+x+1)(x-1)=x^3-1$,将 x^2+x+1 用双根式代替,根据整除的性质证明.

证明:因为 x^2+x+1 的两个根为 ε 和 ε^2,其中