学者书屋系列

数学分析基础理论的强化与延伸（单变量部分）

张彩霞◎主编

哈爾濱工程大學出版社

学者书屋系列

数学分析基础理论的强化与延伸

（单变量部分）

主　编　张彩霞
副主编　李文赫　刘继颖　何　颖

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书主要内容包括极限理论、一元函数的微分学、一元函数的积分学、实数的完备性、函数的一致连续性、函数的凸性及级数理论。

由于数学分析课程内容较多、课时有限、教材受到局限，因此很多知识点在教材中无法得到更好的总结、深化、延伸和扩展。本书中对极限理论、一元函数的微分学、一元函数的积分学及级数理论部分的主要内容进行了强调和总结，对其中主要的知识点，配备了适量的例题，并非常重视一题多解和前后呼应，知识体系符合学生的思维规律，可以引导学生由浅入深并逐渐熟练应用。特别是本书克服了教材的局限性，将实数的完备性、区间套定理的应用、有限覆盖定理的应用、函数的一致连续性、函数的凸性都分别作为一章进行了专题讨论，使学生对这部分内容能有更全面的理解和掌握。

本书适合于作为数学分析课程的同步辅助教材，也可以作为报考数学类各专业硕士研究生复习数学分析的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析基础理论的强化与延伸. 单变量部分/张彩霞主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5661-0605-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学分析-基础理论 Ⅳ.①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 147601 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东市一兴印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 14.5
字　　数 310 千字
版　　次 2013 年 7 月第 1 版
印　　次 2013 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 28.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

就数学分析这样的课程来说，它是一门重要的大学基础课程，很多后继课程都以它为基础，可视为它的延伸、深化和应用，而它的基本概念、思想和方法更是无所不在。因此，牢固地掌握它的基本内容，透彻地理解它的基本思想，熟练地运用它的基本方法，是打开大学阶段数学学习之门的关键。但数学分析课程内容较多、课时有限、教材受到局限，很多知识点在教材中无法得到更好的总结、深化、延伸和扩展。

本书主要内容包括极限理论、一元函数的微分学、一元函数的积分学、函数的一致连续性、函数的凸性、实数的完备性及级数理论。

书中对极限理论、一元函数的微分学、一元函数的积分学及级数理论部分的主要内容进行了强调和总结。例如函数的正常极限共有六种，非正常极限共有十八种，再加上数列的正常极限和数列的非正常极限共四种，共有二十八种极限定义，本书给出了其中一部分的精确定义，使学生能举一反三，从而能叙述出其他每种极限的精确定义，对极限概念有深入的理解。再如函数极限存在定理有海涅定理、单调有界定理和柯西准则，每一个定理对自变量的不同趋向，有不同的叙述形式，本书进行了总结和强调。特别是本书克服了教材的局限性，将函数的一致连续性、函数的凸性、实数的完备性、区间套定理的应用、有限覆盖定理的应用都分别作为一章进行专题讨论，使学生对这部分内容能有更全面的理解和掌握。在本书中，针对每部分的知识点，配备了适量的例题，并非常重视一题多解和前后呼应，知识体系符合学生的思维规律，能够达到学生对知识点的进一步理解、掌握和较熟练应用的目的。

本书适合于作为数学分析课程的同步辅助教材，也可以作为报考数学类各专业硕士研究生复习数学分析的参考书。

本书第 1 章至第 4 章及第 6 章至第 10 章由张彩霞编写（约 154 千字）；第 5 章、第 12 章及第 14 章由李文赫编写（约 52 千字）；第 11 章、第 13 章及第 15 章由刘继颖编写（约 52 千字）；第 16 章、第 17 章及第 18 章由何颖编写（约 52 千字）。全书由张彩霞统稿。

由于作者水平有限，在目前的版本中必然有许多不妥之处，恳切地希望读者对本书批评指正，提出进一步改进的宝贵意见。

编　者

2013 年 3 月

目 录

第1章　实数集与函数

1.1　实数·确界原理·常用的不等式

1.1.1　实数

可以用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q为整数,$q \neq 0$)表示的数称为有理数,有理数也可以用有限十进位小数或无限十进位循环小数来表示,有理数集用$\mathbf{Q}$来表示.无限十进位不循环小数称为无理数.有理数和无理数统称为实数,实数集用$\mathbf{R}$来表示.

1. 把有限小数(包括正整数)表示为无限小数

(1) 当$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$时,其中a_0为非负整数,a_i为整数,且$0 \leqslant a_i \leqslant 9(i = 1,2,\cdots,n)$,$a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}_+$,记$x = a_0.a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n - 1)999\,9\cdots$.

当$x = a_0$时,a_0为正整数,记$x = (a_0 - 1).999\,9\cdots$.

(2) 对于负有限小数(包括负整数)y:先将$-y$表示为无限小数,再将所得的无限小数前加负号.

(3) 规定0表示为$0.0000\cdots$,所以任何实数都可以用一个确定的无限小数来表示.

2. 两个实数的比较

定义1　(1) 给定两个非负实数$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,$y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,其中$a_0,b_0$为非负整数,$a_k,b_k$为整数,且$0 \leqslant a_k \leqslant 9, 0 \leqslant b_k \leqslant 9, k = 1,2,\cdots$.

① 若$a_k = b_k, k = 0,1,2,\cdots$,则称$x$与$y$相等,记为$x = y$.

② 若$a_0 > b_0$,或存在非负整数m,使得$a_k = b_k, k = 0,1,2,\cdots,m$,而$a_{m+1} > b_{m+1}$,则称$x$大于$y$或$y$小于$x$,记为$x > y$或$y < x$.

(2) 给定两个负实数x和y,若按(1)有$-x = -y$或$-x > -y$,则分别称x等于y或x小于y,记为$x = y$或$x < y$.

(3) 规定任何非负实数大于负实数.

定义2　(1) 对于非负实数$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,称有理数$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$为实数$x$的$n$位不足近似值;称有理数$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$为实数$x$的$n$位过剩近似值,$n = 0,1,2,\cdots$.

(2) 对于非负实数 $x = -a_0a_1a_2\cdots a_n\cdots$，称 $x_n = -a_0a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n}$ 为实数 x 的 n 位不足近似值；称有理数 $\bar{x}_n = -a_0a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位过剩近似值，$n = 0,1,2,\cdots$.

实数 x 的 n 位不足近似值 x_n，当 n 增大时不减；n 位过剩近似值 $\bar{x}_n$，当 n 增大时不增.

命题：设 x,y 为两个实数，则 $x > y$ 的等价条件为存在非负整数 n，使 $x_n > \bar{y}_n$. 其中 x_n 为 x 的 n 位不足近似值，$\bar{y}_n$ 为 y 的 n 位过剩近似值.

1.1.2　确界原理

1. 有界集

(1) S 是有上界数集：$\exists M > 0, \forall x \in S, x \leqslant M$.

(2) S 是有下界数集：$\exists M > 0, \forall x \in S, x \geqslant -M$.

(3) S 是有界数集：$\exists M > 0, \forall x \in S, |x| \leqslant M$.

(4) 上确界：设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的数集，若数 ξ 满足

① $\forall x \in S$，有 $x \leqslant \xi$；

② $\forall \alpha < \xi, \exists x_0 \in S$，使得 $\alpha < x_0$（或 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$，使得 $\xi - \varepsilon < x_0$），则称 ξ 为 S 的上确界，记为 $\xi = \sup S$.

(5) 下确界：设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的数集，若数 η 满足

① $\forall x \in S$，有 $x \geqslant \eta$；

② $\forall \beta > \eta, \exists x_0 \in S$，使得 $x_0 < \beta$（或 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$，使得 $x_0 < \eta + \varepsilon$），则称 η 为 S 的下确界，记为 $\eta = \inf S$.

2. 确界原理

设 $S \subset \mathbf{R}$ 且 $S \neq \Phi$. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

1.1.3　常用的不等式

(1) $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$.

(2) $1 + x < e^x (x \neq 0)$.

(3) $0 < x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}, (x \in (0,1))$.

(4) $|\sin x| \leqslant |x|$，当且仅当 $x = 0$ 时，等号成立.

(5) 均值不等式：$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}_+$，记

算数平均值：$M(a_i) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$；

几何平均值：$G(a_i) = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = (\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$；

调和平均值：$H(a_i)=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$.

$H(a_i)\leqslant G(a_i)\leqslant M(a_i)$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(6) 伯努力(Bernoulli)不等式：$\forall x>-1$，有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx, n\in\mathbf{N}$. 当 $x>-1$，且 $x\neq 0, n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 时，有严格不等式 $(1+x)^n>1+nx$.

事实上，由 $1+x>0$ 且 $1+x\neq 1$，有 $(1+x)^n+n-1=(1+x)^n+1+1+\cdots+1>n\sqrt[n]{(1+x)^n}=n(1+x)$（当 n 个正数不全相等时，算数平均值大于几何平均值），所以有 $(1+x)^n>1+nx$.

(7) $\forall h>0$，由二项展开式

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\cdots+h^n$$

有 $(1+h)^n$ 大于右端的任意一项.

(8) $\forall x,y\geqslant 0, \forall n\in\mathbf{N}_+$, $\sqrt[n]{x+y}\leqslant\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$.

(9) 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1^\alpha-x_2^\alpha|\leqslant|x_1-x_2|^\alpha$.

事实上，当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，因为 $\forall x\in[0,1]$ 有不等式 $(1-x)^\alpha+x^\alpha\geqslant(1-x)+x=1$，得 $1-x^\alpha\leqslant(1-x)^\alpha$，由此知：$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，有

$$x_1^\alpha-x_2^\alpha=x_1^\alpha\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha\right]\leqslant x_1^\alpha\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha=(x_1-x_2)^\alpha$$

所以，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1^\alpha-x_2^\alpha|\leqslant|x_1-x_2|^\alpha$.

(10) $\log_a x\leqslant x-1$，$(a\geqslant \mathrm{e}, x\geqslant 1)$.

例 1－1　证明：$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有

(1) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$；

(2) $\dfrac{1}{2}(|a|+|b|)\leqslant\max\{|a|,|b|\}\leqslant\dfrac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$.

证明　(1) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

(2) 由于 $|a|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$，$|b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$，则

$$|a|+|b|\leqslant 2\max\{|a|,|b|\}$$

$$\frac{1}{2}(|a|+|b|)\leqslant\max\{|a|,|b|\}$$

又由于
$$|a+b|+|a-b| \geqslant |a+b+a-b| = 2|a|$$
$$|a+b|+|a-b| \geqslant |a+b-a+b| = 2|b|$$
则
$$\max\{|a|,|b|\} \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$$
所以
$$\frac{1}{2}(|a|+|b|) \leqslant \max\{|a|,|b|\} \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$$

例 1-2 求数集 $S=\{x\mid x=1-\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}_+\}$ 的上、下确界,并依定义加以验证.

解 $\sup S=1, \inf S=\frac{1}{2}$.

首先验证 $\sup S=1$:

(i) $\forall x\in S$,有 $x=1-\frac{1}{2^n}\leqslant 1; n\in\mathbf{N}_+$;

(ii) $\forall \alpha<1, \exists n_0\in\mathbf{N}_+$,使得$\frac{1}{2^{n_0}}<1-\alpha$,即 $\alpha<1-\frac{1}{2^{n_0}}$,记 $x_0=1-\frac{1}{2^{n_0}}$,则 $x_0\in S$,且 $\alpha<x_0$.

由上确界定义知 $\sup S=1$.

其次验证 $\inf S=\frac{1}{2}$:

(i) $\forall x\in S$,有 $x=1-\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{1}{2}; n\in\mathbf{N}_+$;

(ii) $\forall \beta>\frac{1}{2}$,记 $x_0=\frac{1}{2}$,则 $x_0\in S$,且 $x_0<\beta$,由下确界定义知 $\inf S=\frac{1}{2}$.

1.2 函　　数

1.2.1 复合函数

设有两个函数 $y=f(u), u\in D, u=g(x), x\in E, E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E$.若 $E^*\neq\Phi$,则对每一个 $x\in E^*$,通过 g 对应 D 内唯一一个值 u,而 u 又通过 f 对应唯一一个值 y,这就确定了一个定义在 E^* 上的函数,它以 x 为自变量,y 为因变量,记作 $y=f(g(x)), x\in E^*$ 或 $y=(f\circ g)(x), x\in E^*$,简记为 $f\circ g$,称为函数 f 和 g 的复合函数,并称 f 为外函数,g 为内函数,u 为中间变量.

1.2.2 反函数

设函数 $y=f(x), x\in D$ 满足:对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y,D 中有且只有一个值 x,

使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作 $f^{-1}:f(D)\to D,(y\mapsto x)$ 或 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$.

1.2.3　初等函数

基本初等函数：常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

1.2.4　具有某些特性的函数

1. 有界函数

(1) f 为 D 上有上界函数：$\exists M>0,\forall x\in D,f(x)\leqslant M$.

(2) f 为 D 上有下界函数：$\exists M>0,\forall x\in D,f(x)\geqslant -M$.

(3) f 为 D 上有界函数：$\exists M>0,\forall x\in D,|f(x)|\leqslant M$.

(4) f 在 D 上的上确界：$\sup\limits_{x\in D}f(x)=\sup f(D)$.

(5) f 在 D 上的下确界：$\inf\limits_{x\in D}f(x)=\inf f(D)$.

2. 单调函数

(1) f 为区间 I 上(严格)增函数：$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

(2) f 为区间 I 上(严格)减函数：$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

3. 奇函数和偶函数

设 D 为对称于原点的数集，f 为定义在 D 上的函数. 若对每一个 $x\in D$ 有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为 D 上的奇函数；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 f 为 D 上的偶函数.

4. 周期函数

设 f 为定义在数集 D 上的函数，若存在 $\sigma>0$，使得对一切 $x\in D$，有 $f(x\pm\sigma)=f(x)$，则称 f 为周期函数，σ 称为 f 的一个周期.

1.2.5　几个特殊的函数

(1) 符号函数：$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) 取整函数：$y=[x]$，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数：$D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数时,\\ 0, & 当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$

(4) 黎曼(Riemman)函数:$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & 当 x = \dfrac{p}{q}(p,q \in \mathbf{N}_+, \dfrac{p}{q} 为既约真分数)时, \\ 0, & 当 x = 0,1 和(0,1) 内的无理数时. \end{cases}$

例 1 - 3 设$f(x) = \begin{cases} 1, & x 为有理数 \\ 0, & x 为无理数 \end{cases}$. $g(x) = \dfrac{1}{x}$,试问复合函数$f\circ g$和$g\circ f$是否存在?

解 由于 $D_f = R, E^* = \{x \mid g(x) \in D_f\} \neq \Phi$,所以复合函数$f\circ g$存在,且

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x 为非零有理数 \\ 0, & x 为无理数 \end{cases}, x \in E^* = D_g$$

由于 $D_g = R\backslash\{0\}, E^* = \{x \mid f(x) \in D_g\} = Q \neq \Phi$,所以$g\circ f$存在,且

$$g[f(x)] = 1, x \in E^* = Q$$

例 1 - 4 写出分别满足下列要求的函数的一个表达式:

(1) 定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$\{-1,0,1\}$的递减奇函数;

(2) 定义在闭区间$[0,1]$上的无界函数;

(3) 定义在 $\mathbf{R}$ 上非常数周期函数,但无最小正周期;

(4) 定义在$[0,1]$的函数,它有反函数,但在$[0,1]$的任一子区间上都不是单调函数.

解 (1)$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$

(2)$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(3)$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x 为有理数, \\ 0, & x 为无理数. \end{cases}$

任何正有理数都是f的周期,但无最小正周期.

(4)$f(x) = \begin{cases} x, & x 为[0,1]上的有理数, \\ -x, & x 为[0,1]上的无理数. \end{cases}$

f有反函数,但在$[0,1]$的任一子区间上都不是单调函数.

例 1 - 5 设f和g为D上的有界函数,证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x) + g(x)\} \leqslant \inf\limits_{x\in D} f(x) + \sup\limits_{x\in D} g(x)$;

(2) $\sup\limits_{x\in D} f(x) + \inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \sup\limits_{x\in D}\{f(x) + g(x)\}$.

证明 (1) $\forall x \in D$,有

$$\inf_{x\in D}\{f(x) + g(x)\} \leqslant f(x) + g(x) \leqslant f(x) + \sup_{x\in D} g(x)$$

则 $\forall x \in D$,有

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\sup_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)$$

即$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\sup\limits_{x\in D}g(x)$是$f(x)$在$D$上的一个下界,所以有

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\sup_{x\in D}g(x)\leqslant \inf_{x\in D}f(x)$$

即

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant \inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x)$$

(2) 同理可证(略).

例1-6　设f在区间I上有界,记$M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$,$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$,证明:

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$$

证明　记$S=\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in I\}$,以下证明$\sup S=M-m$.

若$M=m$,结论显然成立.

以下设$M>m$.

(1) $\forall x',x''\in I,f(x'),f(x'')\in[m,M]$, 显然有$|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m$.

(2) 由于$M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$,$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$, 则$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<M-m)$, $\exists x',x''\in I$,使得

$$f(x')>M-\frac{\varepsilon}{2},\ f(x'')<m+\frac{\varepsilon}{2}$$

则

$$\left[m+\frac{\varepsilon}{2},M-\frac{\varepsilon}{2}\right]\subset(f(x''),f(x'))\subset[m,M]$$

所以有

$$|f(x')-f(x'')|>\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)=(M-m)-\varepsilon$$

由(1)(2)知$\sup S=M-m$,即$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$.

例1-7　写出如下概念的正面陈述与否定陈述:

(1) 函数$y=f(x)$在区间I上是有界函数;

(2) 函数$y=f(x)$在区间I上是增函数;

(3) 函数$y=f(x)$在区间I上是奇函数.

解　(1) 正面陈述:$\exists M>0$, $\forall x\in I$,总有$|f(x)|\leqslant M$.

否定陈述:$\forall M>0$, $\exists x_0\in I$,满足$|f(x_0)|>M$.

(2) 正面陈述:$\forall x_1,x_2\in I$,且$x_1<x_2$,总有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

否定陈述:$\exists x_1,x_2\in I$,满足$x_1<x_2$,但$f(x_1)>f(x_2)$.

(3) 正面陈述:$\forall x\in I$,总有$f(-x)=-f(x)$.

否定陈述:$\exists x_0\in I$,满足$f(-x_0)\neq -f(x_0)$.

例1-8　证明函数$f(x)=\dfrac{5x}{2x^2+3}$在$\mathbf{R}$上有界.

证明 由于$2x^2+3=(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3})^2\geqslant 2|\sqrt{2}x\cdot\sqrt{3}|=2\sqrt{6}|x|$.

则
$$|f(x)|=\frac{5|x|}{2x^2+3}\leqslant\frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|}=\frac{5}{2\sqrt{6}}<2(x\neq 0)$$

当$x=0$时,$|f(0)|=0<2$. 所以$\forall x\in\mathbf{R}$,有$|f(x)|\leqslant 2$, 即f在$\mathbf{R}$上有界.

例 1-9 用定义证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$在其定义域上既无上界也无下界.

证明 $\forall M>0,\exists x_0=\dfrac{1}{M}-2<\dfrac{1}{M}-1$,有$f(x_0)>M$. 所以$f$在其定义域$D=R\backslash\{-1\}$上无上界.

$\forall M>0,\exists x_0=-1-\dfrac{1}{2M}>-1-\dfrac{1}{M}$,有$f(x_0)=-2M<-M$. 所以$f$在其定义域$D=R\backslash\{-1\}$上也无下界.

例 1-10 证明:函数$f(x)(x\in D)$为严格单调函数的充要条件是:$\forall x_1,x_2,x_3\in D(x_1<x_2<x_3)$,有$[f(x_1)-f(x_2)]\cdot[f(x_2)-f(x_3)]>0$.

证明 必要性:设$f(x)$为D上严格单调增加(减少)函数,则$\forall x_1,x_2,x_3\in D$,且$x_1<x_2<x_3$,总有$f(x_1)-f(x_2)<0,f(x_2)-f(x_3)<0$.
$$[f(x_1)-f(x_2)>0,f(x_2)-f(x_3)>0]$$
所以有
$$[f(x_1)-f(x_2)]\cdot[f(x_2)-f(x_3)]>0$$

充分性:若$\forall x_1,x_2,x_3\in D$,且$x_1<x_2<x_3$有
$$[f(x_1)-f(x_2)]\cdot[f(x_2)-f(x_3)]>0$$
则$f(x_1)-f(x_2)$与$f(x_2)-f(x_3)$同号.

若$f(x_1)-f(x_2)<0,f(x_2)-f(x_3)<0$,则$f(x)$在$D$上严格单调增加;

若$f(x_1)-f(x_2)>0,f(x_2)-f(x_3)>0$,则$f(x)$在$D$上严格单调减少.

总之函数$f(x)$为D上严格单调函数.

例 1-11 设f为$[-a,a]$上的奇(偶)函数. 证明:若f在$[0,a]$上递增,则f在$[-a,0]$上递增(减).

证明 任取$x_1,x_2\in[-a,0],x_1<x_2$, 有$-x_1,-x_2\in[0,a]$, 且$-x_2<-x_1$. 又f在$[0,a]$上递增,则$f(-x_2)<f(-x_1)$.

若f为$[-a,a]$上的奇函数,则由$f(-x_2)<f(-x_1)$,有$-f(x_2)<-f(x_1)$,从而$f(x_2)>f(x_1)$,f在$[-a,0]$上递增.

若f为$[-a,a]$上的偶函数,则由$f(-x_2)<f(-x_1)$,有$f(x_2)<f(x_1)$,从而f在$[-a,0]$上递减.

例 1-12 设f定义在$[-a,a]$上,证明:

(1)$F(x)=f(x)+f(-x),x\in[-a,a]$为偶函数;

(2) $G(x)=f(x)-f(-x)$, $x\in[-a,a]$ 为奇函数;

(3) f 可表示为某个奇函数与某个偶函数之和.

证明　(1) $\forall x\in[-a,a]$, $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$,即 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $\forall x\in[-a,a]$, $G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$,即 $G(x)$ 为奇函数.

(3) 设 $F_1(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的偶函数, $G_1(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的奇函数,且

$$f(x)=F_1(x)+G_1(x)$$

从而有

$$f(-x)=F_1(x)-G_1(x)$$

联立二式,解得:

$$F_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],G_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

所以 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为偶函数 $F_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$ 的和.

例1-13　试问 $y=|x|$ 是初等函数吗?

解　因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$,即 $y=|x|$ 是基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 的复合函数,所以 $y=|x|$ 是初等函数.

例1-14　设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:

(1) $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$;

(2) $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

证明　由于 $\begin{cases}\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b,\\ \max\{a,b\}-\min\{a,b\}=|a-b|.\end{cases}$

解方程组得

$$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

$$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

例1-15　设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是初等函数,以下函数是初等函数吗?

(1) $|f(x)|$.

(2) $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

(3) $F(x)=\begin{cases}-c, & 若 f(x)<-c,\\ f(x), & 若 |f(x)|\leqslant c,\ c>0 为常数,\\ c, & f(x)>c.\end{cases}$

(4) 对每一个 x,定义 $F(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 中处于中间的一个值.

(5) 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0)$.

解 (1) 由于 $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$,则 $|f(x)|$ 是初等函数.

(2) 由于

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是初等函数.

(3) 由于

$$F(x) = \max\{-c, \min\{f(x), c\}\}$$

或

$$F(x) = \min\{\max\{f(x), -c\}, c\}$$

或

$$F(x) = \frac{1}{2}\{|f(x) + c| - |f(x) - c|\}$$

根据(2)知 F 是初等函数.

(4) 由于

$$F(x) = f(x) + g(x) + h(x) - \max\{f(x), g(x), h(x)\} - \min\{f(x), g(x), h(x)\}$$

而

$$\max\{f(x), g(x), h(x)\} = \max\{f(x), \max\{g(x), h(x)\}\}$$

$$\min\{f(x), g(x), h(x)\} = \min\{f(x), \min\{g(x), h(x)\}\}$$

则 F 是初等函数.

(5) 由于 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$,则 $f(x)^{g(x)}$ 是初等函数.

例 1 - 16 证明关于函数 $y = [x]$ 的如下不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时,$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$;

(2) 当 $x < 0$ 时,$1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x$.

证明 当 $x \neq 0$ 时,有 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$.

(1) 当 $x > 0$ 时,$x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant x \cdot \frac{1}{x}$

即

$$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$$

(2) 当 $x < 0$ 时,$x\left(\frac{1}{x} - 1\right) > x\left[\frac{1}{x}\right] \geqslant x \cdot \frac{1}{x}$

即

$$1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x$$

例 1 - 17 设 f 和 g 为区间 I 上的增函数,证明

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

也是 I 上的增函数.

证明　$\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2), g(x_1)\leqslant g(x_2)$.

则
$$f(x_1)\leqslant \max\{f(x_2),g(x_2)\}$$
$$g(x_1)\leqslant \max\{f(x_2),g(x_2)\}$$
所以有
$$\max\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant \max\{f(x_2),g(x_2)\}$$
即
$$\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$$
又
$$\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant f(x_2),\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant g(x_2)$$
所以有
$$\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant \min\{f(x_2),g(x_2)\}$$
即
$$\psi(x_1)\leqslant\psi(x_2)$$
因此 φ,ψ 都是区间 I 上的增函数.

例1－18　试用符号函数表示下列函数:

(1)$f(x)=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & x=1,\\ -1, & x<1;\end{cases}$　　(2)$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$

解　(1)$f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$.

(2)$g(x)=x^2\operatorname{sgn}x$.