初中数学竞赛基础教程

第二册

范学汉 主编

华中师范大学出版社

责任编辑：杨发明
封面设计：甘 英

ISBN 7-5622-0796-8/G·274
定价：2.15元

初中数学竞赛基础教程

第二册

主　编:范学汉
副主编:$\boxed{\text{童建民}}$
编　委:(以姓氏笔划为序)
吴焕新　严宗刚
范学汉　谢汉元

华中师范大学出版社

鄂新登字11号

初中数学竞赛基础教程

第二册

范学汉　主编

*

华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山）
新 华 书 店 湖 北 发 行 所 经 销
黄 冈 报 社 印 刷 厂 印 刷
*
开本787×1092　1/32　印张5.25　字数134千字
1991年12月第1版　1992年7月第2次印刷
ISBN 7-5622-0796-8 /G·274
印数10501—25500　定价2.15元

前　言

为给初中学生开展数学课外活动和数学竞赛提供一套与现行初中数学课本配套的实用教材，现按照初中数学教学大纲(修订本)及初中数学竞赛大纲(草案)的要求，编写了这套《初中数学竞赛基础教程》。目的是想通过这套教材的教学和辅导，起到开阔视野、启迪思维、提高智能的作用。

这套书将初中数学教学大纲规定的重点内容及数学竞赛大纲规定的全部内容归纳为19讲，共分为三册，分别供初一、初二、初三使用。各册在编写过程中注意了以下五个特点：(1)基本以现行初中数学课本的章节编排顺序为序，力图使课外活动的教学和课堂教学同步进行；(2)突出重点、整体配合、循序渐进，同时穿插一些数学竞赛需要的专题；(3)凡是扩充的知识内容，力求避免在理论上作繁难的推导，尽量采用通过实例直观印证，把重点放在方法的介绍和运用上；(4)将数学基本理论、基本知识、基本方法的学习和思维与能力的训练贯穿于例题的剖析之中；(5)每讲中都分别配有适量的练习和习题，每一册中都配有两套复习自测题，第三册后，另外配有两套竞赛模拟题。为了方便读者，每册中所有的练习、习题和复习自测题以及模拟题后面都附有答案、提示或解答。

本册由范学汉编写并审订。为本册部分讲节提供过初稿的有邵世堂、汪育君、贺华国。

本书在编写过程中曾得到黄州市教研室的大力支持、黄冈中学的热情鼓励和热心协助。华中师范大学《数学通讯》编辑部伍家德老师审阅了本书初稿，提出了不少宝贵意见。谨此一并感谢。

由于我们的思想和学识水平有限、加之时间仓促，书中错误在所难免，恳请广大读者批评指教。

编者

1991年6月于黄州

目　录

第十讲 根 式

本讲的主要内容是二次根式的性质和运算，重点是算术根的性质、二次根式的运算及化简的技巧.

一、算术根的概念及其运用

如果一个非负数 x 的 n 次幂等于 a（n 是大于 1 的整数，$a\geqslant 0$），那么 x 叫做 a 的 n 次算术根，记作 $x=\sqrt[n]{a}$. 这就是说："正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根，零的 n 次算术根仍是零".

由概念可知，n 次算术根 $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$。当 $n=2$ 时，$\sqrt{a}$ 表示算术平方根，因此，n 次算术根总是一个非负数，这一点是非常重要的.

例 1 已知 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=0$（a、b 为实数）求 $a^{100}+b^{101}$ 的值.

分析 由已知条件可知 $\sqrt{a+1}\geqslant 0$，$\sqrt{b+1}\geqslant 0$，而两非负数的和为零，故可推出 $\sqrt{a+1}=0$、$\sqrt{b+1}=0$ 同时成立时，原式才能成立，于是有 $a=-1$，$b=-1$.
所以 $a^{100}+b^{101}=(-1)^{100}+(-1)^{101}=0$

解 略.

评注 此题巧妙地运用了算术根是非负数的性质，从而找到了它的特殊解法.

例 2 已知 $y=\dfrac{\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[10]{x^2-1}+2}{x+1}$ 其中 x、y 是实数，求$(\sqrt{2})^{x-y}$的值.

分析 要求$(\sqrt{2})^{x-y}$的值，必须分别知道 x、y 的值，根据算术根的概念有 $\sqrt[4]{1-x^2}\geqslant 0$，$\sqrt[10]{x^2-1}\geqslant 0$，从而可先求出 x 的值.

解 因 x、y 是实数，故 $\sqrt[4]{1-x^2}\geqslant 0$ 且 $\sqrt[10]{x^2-1}\geqslant 0$
又因 $1-x^2$ 与 x^2-1 互为相反数，所以 $\sqrt[4]{1-x^2}=0$，$\sqrt[10]{x^2-1}=0$，所以 $x=\pm 1$.

又因分母 $x+1\neq 0$，所以 $x\neq -1$，即 $x=1$.

把 $x=1$ 代入方程得 $y=1$.

故
$$(\sqrt{2})^{x-y}=(\sqrt{2})^{2}=2.$$

评注 这道题的解法是以算术根的概念为基础，通过观察分析被开方数的特殊性及分母的非零性，立即得到未知数的值.

例 3 化简$\dfrac{(x-2)(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-4}}(x>2)$.

分析 由于 $x>2$，所以 $x-2>0$，故 $x-2$ 可改写为 $(\sqrt{x-2})^2$，而 $\sqrt{x^2-4}$ 可分解为两个因式，因此有因式可提出.

解 因 $x>2$，故 $x-2>0$

所以
$$\begin{aligned}原式&=\frac{(\sqrt{x-2})^2(x+1)+(x-1)\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})^2(x-1)+(x+1)\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}}\\&=\frac{\sqrt{x-2}[\sqrt{x-2}(x+1)+(x-1)\sqrt{x+2}]}{\sqrt{x+2}[\sqrt{x+2}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-2}]}\\&=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}}\ .\end{aligned}$$

评注 如果直接分母有理化，计算将是很繁杂的.

例 4 指出下式中的错误，说明理由，并加以改正.

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b.$$

分析 按算术根的概念，将 a、b 分成正、负、零的情况加以讨论.

解 由算术根的概念知，当 a 为正数或零时，$\sqrt{a^2}=a$；当 a 为负数时，$\sqrt{a^2}=-a$，所以上式显然是错误的，改正如下：

$a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$；

$a\geqslant0$，$b<0$ 时，$\sqrt{a^2+}\sqrt{b^2}=a-b$；

$a<0$，$b\geqslant0$ 时，$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=-a+b$；

$a<0$，$b<0$ 时，$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=-(a+b)$.

评注 由于 a、b 没有限制条件，故应根据算术根的概念进行讨论，才能得出正确的结果.

例 5 化简 $a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

分析 此题从表面上看，好象是在没有条件下进行化简，但认真分析一下就会发现题中有隐含条件$\dfrac{a+b}{a-b}\geqslant0$，$\dfrac{a-b}{a+b}\geqslant0$，$a^2-b^2>0$，故 $a+b$ 和 $a-b$ 必须同号.

解 原式$=\dfrac{a|a+b|}{\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{b|a-b|}{\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$=\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2}\ (a+b\text{ 和 }a-b\text{ 同时为正})\\ \dfrac{a^2+3b^2}{b^2-a^2}\sqrt{a^2-b^2}\ (a+b\text{ 和 }a-b\text{ 同时为负})\end{cases}$$

评注 在没有直接给出条件先行化简和计算时，要注意题目中的隐含条件，否则会错解或漏解.

例 6 计算 $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$.

分析 因为 $\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 只表示算术根，故该题求解时，要根据 x 的取值范围进行讨论。讨论前，先要确定 x 的零点值，由 $x+3=0$、$x-2=0$、$x-5=0$ 可得到 x 的三个零点值 -3、

2、5，因此本题应分四种情况进行讨论.

解 原式$=|x-2|+|x+3|+|x-5|$.

(1)当 $x<-3$ 时，则有 $x+3<0, x-2<0, x-5<0$.

原式 $=2-x-x-3+5-x=4-3x$.

(2)当 $-3\leqslant x<2$ 时，则有 $x+3\geqslant 0, x-2<0, x-5<0$.

原式 $=2-x+x+3+5-x=10-x$.

(3)当 $2\leqslant x<5$ 时，则有 $x+3>0, x-2\geqslant 0, x-5<0$.

原式 $=x-2+x+3+5-x=x+6$.

(4)当 $x\geqslant 5$ 时，则有 $x+3>0, x-2>0, x-5\geqslant 0$.

原式 $=x-2+x+3+x-5=3x-4$.

评注 此题的解不唯一，是因为随着 x 的不同的取值范围而得到不同的解，在解的时候，应根据 x 的零点值，分情况进行讨论才能求解，这也是解此类问题的一般方法.

练 习 一

1. 选择题(将下列每小题唯一正确答案的代号填在括号内).

(1) 当 $a<b$ 时，化简 $\sqrt{a^2b-2ab^2+b^3}$ 得(　　)；

(A) $(a-b)\sqrt{b}$　　(B) $(b-a)\sqrt{b}$

(C) $-\sqrt{b(a-b)^2}$　　(D) 以上都不对

(2)把代数式 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 根号外的因式移到根号内，则原式等于(　　).

(A) $\sqrt{1-a}$　(B) $-\sqrt{1-a}$　(C) $\sqrt{a-1}$　(D) $-\sqrt{a-1}$

2. 化简下列各题.

(1) 如果 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，化简 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$；

(2) 化简 $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{9-6a+a^2}$.

3. 若 $y=3\sqrt{2x-3}+5\sqrt{3-2x}+6$，求 $(\sqrt[3]{3})^{xy}$ 的值.

4. 若 $a>b$，化简 $\sqrt{4a^2-4b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-5\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{9a^2-9b^2}$
$-\sqrt{(a-b)^2}$.

二、关于二次根式的化简、求值

在初中代数中，有关根式的化简、求值课本已介绍了一些方法，为了帮助同学们提高解这类题的能力，这里介绍如何根据题目的本身特点，灵活运用技巧的方法.

1. 求根式值的几种思考方法

(1) 直接代入法

例 7 已知 $x=\sqrt{3}$，求 $\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^2-7}$ 的值.

解 把 $x=\sqrt{3}$ 代入 $\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^2-7}$ 得

$$\frac{3\cdot(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}+5}{2\cdot(\sqrt{3})^2-7}=\frac{14-2\sqrt{3}}{-1}=2\sqrt{3}-14.$$

评注 此题已知条件简单明了，而所给的分式的分子、分母没有公因式可约，故直接将已知条件代入到分式中进行求值.

(2) 简化条件法

这种方法是将已知条件进行化简，然后再代入求值，从而使运算简便得多.

例 8 若 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，求 $\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$ 的值.

解 因 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，故 $x+2=a+\dfrac{1}{a}$.

而 $$x\geqslant 0,\quad a>0,\quad \sqrt{x}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

故 $$a\geqslant 1,\quad a-\frac{1}{a}\geqslant 0.$$

所以 $\sqrt{4x+x^2}=\sqrt{(x+2)^2-4}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}$

$$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=a-\frac{1}{a}.$$

所以　　原式$=\dfrac{a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}}=\dfrac{2a}{\frac{2}{a}}=a^2.$

评注　此种解法，完全避开了根式运算，使计算大为简捷.

（3）化简结论法

这种方法是将所给的要求值的式子先进行化简，然后再代入求值，这样可避免繁复的计算.

例 9　已知 $x=\sqrt{ab}$，且 $a>0,b>0,a>b$. 求

$$\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}$$

的值.

解　　原式$=\dfrac{\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}\right]^2}{(x+a)(x+b)-(a-x)(x-b)}$

$$=\frac{(a+b)x+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{x^2+ab}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{2ab}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

评注　在所求值的式子比较复杂，而已知条件又明了的情况下，应先将所求值的式子进行化简，然后将已知条件代入求值.

（4）同时变换条件和结论法

有些题要同时变换条件和结论，才能使计算简便.

例 10　设 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ 且 $a>0,b>0$，求

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

的值.

解 原式$=\frac{2a\sqrt{1+x^2}(x-\sqrt{1+x^2})}{x^2-1-x^2}$

$$=-2a\sqrt{1+x^2}(x-\sqrt{1+x^2})$$

因 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

故 $x^2=\frac{1}{4}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)=\frac{(a-b)^2}{4ab}$,

所以 $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$.

则 原式$=2a\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=2a\cdot\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\left[\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right]$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2b}-\frac{(a+b)(a-b)}{2b}=a+b.$$

评注 在条件和所求值的式子都比较复杂的情况下,采用此法较方便.

(5) 设辅助字母法

若对要求的式子直接变形困难时,可用一个或多个字母表示其中有关的"项",进行化简后再将"原项"代入求值.

例 11 当 $x=\frac{1}{2}$时,求

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1-x}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}-x+1}$$

的值.

分析 此题若直接进行通分化简,计算复杂,仔细观察就

会发现，只有两个“基本项”，即“$1+x$”和“$1-x$”，若用两个字母代替它们，就会使问题变得简单明了.

解 设 $\sqrt{1+x}=p$，$\sqrt{1-x}=q$，

则
$$\text{原式}=\frac{p}{p-q}-\frac{q^2}{pq+q^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$$
$$=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{1}{x}=2.$$

(6) 凑合法

例 12 已知 $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，求 $2x^4-23x^3-17x^2+2x$ 的值.

分析 如果从已知条件进行化简，再代入所给的表达式求其值是相当麻烦的，因此可考虑用凑合法求解.

解 由 $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

得 $x-7=4\sqrt{3}$，即 $x^2-14x+1=0$，

所以
$$\text{原式}=2x^2(x^2-14x+1)+5x^3-19x^2+2x$$
$$=5x(x^2-14x+1)+51x^2-3x$$
$$=51(x^2-14x+1)+711x-51$$
$$=711\cdot(7+4\sqrt{3})-51=4926+2844\sqrt{3}.$$

评注 这种根据已知条件先求得一个过渡性的式子的值（如：$x^2-14x+1=0$）再代入求值，以简化运算的方法，我们称它为“方程法”。在数学竞赛的一些题目中经常要用到此法，同学们应很好地掌握它、灵活地运用它.

练 习 二

1. 已知 $x=1+\sqrt{2}$，求 $\frac{x}{x^2+a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{2x-\sqrt{x^2+a^2}}{x^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$

$+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$的值.

2. 已知 $9+\sqrt{11}$ 与 $9-\sqrt{11}$ 的小数部分分别是 a、b，试求 $ab-3a+4b-7$ 的值.

3. 已知 $x^2+x=\dfrac{1}{3}$，求 $6x^4+15x^3+10x^2$ 的值.

4. 已知 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{x^2-2x+1}{1-x}-\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x}$ 的值.

5. 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 求多项式 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

6. 已知 $1989x^3=1990y^3=1991z^3$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$，求 $\sqrt[3]{1989x^2+1990y^2+1991z^2}$ 的值.

2. 根式化简的几个技巧

根式的化简往往包含大量运算，如果不讲究运算技巧，不仅要花费大量的时间，而且不易得到正确的答案，下面介绍几种化简技巧.

（1） 配项

例 13 化简 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{1})}$.

解 因 $\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1$

所以
$$\begin{aligned}原式&=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\&=\sqrt{2}+1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\\&=\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

评注 此题没有直接将分母有理化，而是抓住式子中的数值结构