TURING 图灵计算机科学丛书

PEARSON

Concrete Mathematics

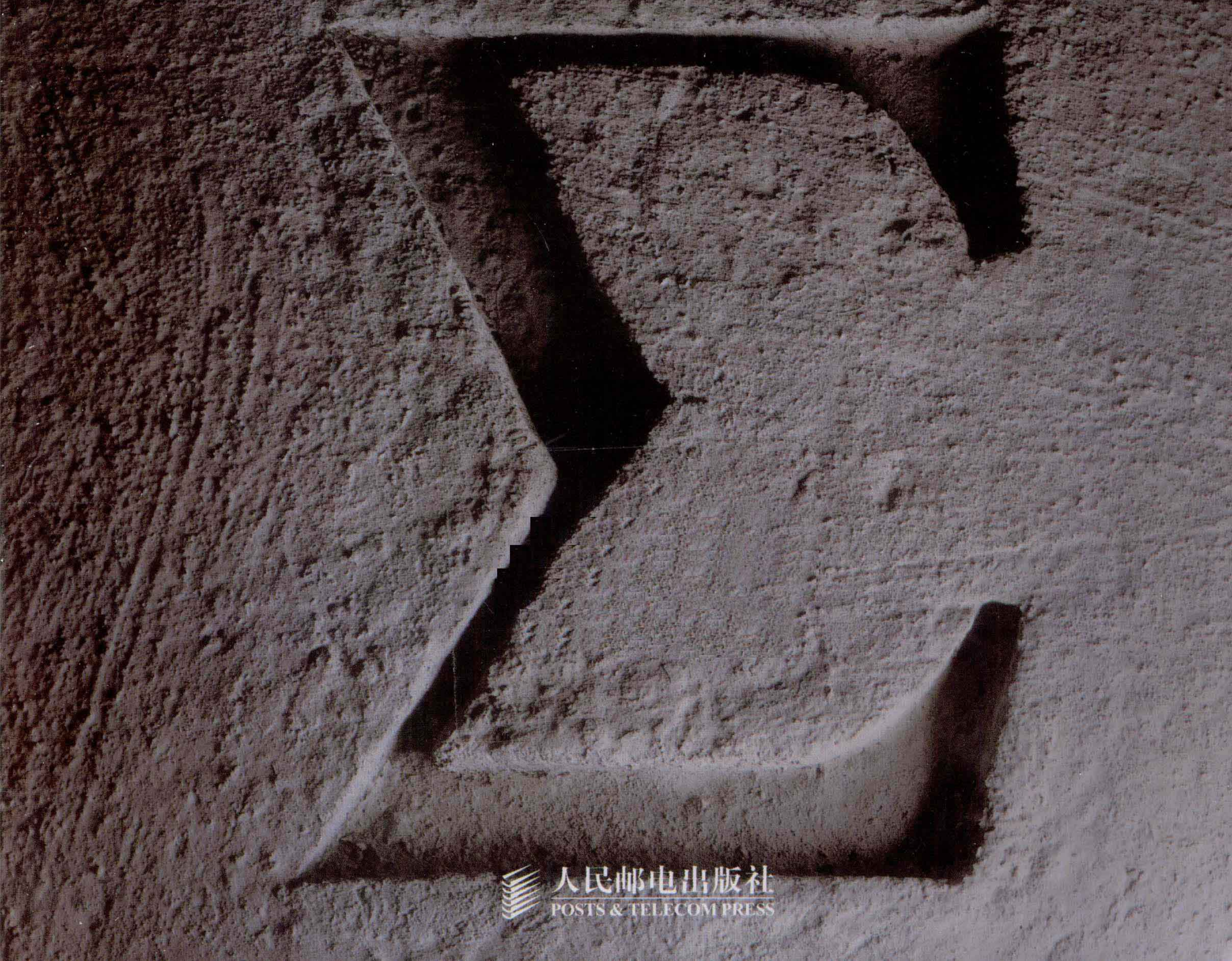
A Foundation for Computer Science, Second Edition

具体数学

计算机科学基础（第2版）

【美】Ronald L. Graham ◎ Donald E. Knuth ◎ Oren Patashnik 著

张明尧 张凡 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵计算机科学丛书

Concrete Mathematics

A Foundation for Computer Science, Second Edition

具体数学

计算机科学基础

（第2版）

【美】Ronald L. Graham ○ Donald E. Knuth ○ Oren Patashnik 著
张明尧 张凡 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

具体数学 ：计算机科学基础 ：第2版 / （美）葛立恒（Graham,R.L.），（美）高德纳（Knuth,D.E.），（美）帕塔许尼克（Patashnik,O.）著 ；张明尧，张凡译. -- 北京 ：人民邮电出版社，2013.4

（图灵计算机科学丛书）

书名原文：Concrete mathematics:A foundation for computer science,second edition

ISBN 978-7-115-30810-8

Ⅰ. ①具… Ⅱ. ①葛… ②高… ③帕… ④张… ⑤张… Ⅲ. ①电子计算机－数学基础 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第014812号

内 容 提 要

本书是一本在大学中广泛使用的经典数学教科书．书中讲解了许多计算机科学中用到的数学知识及技巧，教你如何把一个实际问题一步步演化为数学模型，然后通过计算机解决它，特别着墨于算法分析方面．其主要内容涉及和式、整值函数、数论、二项式系数、特殊的数、生成函数、离散概率、渐近式等，都是编程所必备的知识．另外，本书包括了六大类500多道习题，并给出了所有习题的解答，有助读者加深书中内容的理解．

本书面向从事计算机科学、计算数学、计算技术诸方面工作的人员，以及高等院校相关专业的师生．

图灵计算机科学丛书

具体数学：计算机科学基础（第2版）

◆ 著　[美] Ronald L. Graham　Donald E. Knuth　Oren Patashnik

译　张明尧　张　凡

责任编辑　傅志红

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号

邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com.cn

网址　http://www.ptpress.com.cn

三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：880×1230　1/16

印张：36.25

字数：1003千字　2013年4月第1版

印数：1－6 000册　2013年4月河北第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2011-1850号

ISBN 978-7-115-30810-8

定价：99.00元

读者服务热线：(010)51095186转604　印装质量热线：(010)67129223

反盗版热线：(010)67171154

中文版致辞

We are deeply honored to have this book translated into the Chinese language, and we hope that students in China will enjoy reading it as much as we have enjoyed preparing it. Many American idioms in our original manuscript are very difficult to render into equivalent forms in other languages, so we wish to thank the translator for his painstaking care.

Ronald L. Graham
Donald E. Knuth
Oren Patashnik

这本书能翻译成中文出版，令我们备感荣幸. 真诚希望中国的学生们与我们当初乐于写作此书一样，乐于阅读这本书. 在本书原稿中，有许多美国习惯用语，它们很难在其他语言中找到对应的描述形式，所以我们要感谢译者在翻译本书时所付出的艰苦努力.

葛立恒
高德纳
帕塔许尼克

图灵社区读者评论

阅读《具体数学》是一件非常愉悦的事，细细体会大师深邃的思想，时不时看到充满诙谐意味的涂鸦，会心一笑，深思中得以放松. 阅读过程中对某段话、某个公式的心领神会，那种感觉很难用文字表达，难怪中国有个成语叫做“妙不可言”.

——空军

作者直言数学光有抽象的美是不够的，那些具体的问题和技术，以及其与真实世界的联系也是必须的. ……书中全是直接的推演，绝妙的技巧会让学生很受刺激的！页边的涂鸦真的非常有意思，而且也有真实感，作者一点都没有欺骗读者.

——学徒1

这是一本充满数学技巧和实战心得的书，令人望而却步的理论推导也有，但是别担心，一来并不难，二来有充分的铺垫和预热. 好像一个武林高手打开了他的兵器库，如数家珍地一样样拿出来，手把手教你基本功，“把这些学扎实，我再传你绝世武功”. 嗯，你一定也感受到了高德纳藏在镜片后狡黠的目光.

——浮生小憩

《具体数学》是一本需要慢慢体会和品味的教材. 这本书非常严谨，逻辑条理清晰，大多数主题都是我们所熟悉的……如果真的想读懂一章甚至于一节，花多少时间都不过分. 有时间的话，大家都可以尝试着自己推导书中的每一个公式，也可以对每一个场景举一反三.

——staryin

图灵社区的空军、学徒1、浮生小憩、数学家、邓国平、staryin、王腾超、白龙、yaowei123、lt、蒋麒霖等读者在本书审读活动中提出了很多宝贵建议，特此表示感谢.

前言

“读者对象、读者水平以及处理方式，这些描述是前言里应该谈及的.”
——P. R. Halmos[173]

本书成形于斯坦福大学的同名课程讲义，该课自1970年以来每年都会开设. 每年大约有50名学生选学这门课，有本科生，主要是研究生. 他们毕业后逐渐在各地开设了类似的课程. 由此看来，向更为广泛的读者（包含大学二年级学生）提供教材的时机已经成熟了.

具体数学诞生之际，正逢一个黑暗的、暴风骤雨般动荡的十年. 在那些骚动不安的岁月里，长期秉承的价值观频频受到质疑，大学校园成了争论的温床. 大学课程本身也受到挑战，数学同样难逃严重细究之厄运. John Hammersley刚刚写了一篇发人深省的文章“On the enfeeblement of mathematical skills by ‘Modern Mathematics’ and by similar soft intellectual trash in schools and universities”（《论中学和大学中被“现代数学”以及类似的软智力垃圾弄得日益衰弱的数学技巧》）[176]，其他颇感担忧的数学家们[332]甚至发问：“数学能得到拯救吗？”本书作者高德纳（Donald E. Knuth）撰写了名为*The Art of Computer Programming*（《计算机程序设计艺术》）的系列专著. 在写第一卷时，他发现一些数学工具从他的数学武库中消失了. 为透彻而扎实地理解计算机程序，他所需要的数学已经与他读大学数学专业时所学习的内容迥然不同. 所以，他引入了一门新的课程，讲授他认为本该有人教授他的那些内容.

“人们用行话来武装自己，的确得到一点短暂的威望：他们可以自命不凡，卖弄表面的专业知识. 但是，我们对受过教育的数学家们的真正要求，不是他们能说些什么，甚至也不是他们对现存的数学知识知道些什么，而是他们会用所学知识做些什么，以及他们能否实实在在地解决实践中提出来的数学问题. 简言之，我们要的是行动，而不是空谈.”
——J. Hammersley[176]

这门冠名“具体数学”的课程起初是为矫正“抽象数学”而设置的，那时，具体的经典结果正在被接踵而至的俗称“新数学”的抽象思想迅速摒弃在现代数学课程表之外. 抽象数学是一个奇妙的主题，其中没有任何谬误，它既漂亮、通用，又实用. 但是，它的拥护者们误以为，数学的其余部分都是低劣而不再值得关注的了. 一般化的目标变得如此时髦，使得整整一代数学家变得不会欣赏具体数学之美，不能享受求解数量型问题的挑战，也不再重视技术手段之价值. 抽象数学于是变得排外，并逐渐失去与现实的联系. 数学教育需要增加具体的砝码以保持健康的平衡.

高德纳在斯坦福大学第一次讲授具体数学这门课时，说他打算讲授一门硬性而非软性的数学课，这也解释了这个略显古怪的课程名称. 他宣称，与某些同事的期望相反，他既不打算讲授集合论，也不打算讲授Stone嵌入定理，甚至不讲授Stone-Čech紧致化.（几位土木工程系的学生于是站起来，安静地离开了教室.）

“数学的核心是由具体的例子和具体的问题组成的.”
——P. R. Halmos[172]

尽管具体数学的起步是针对流行趋势的反动，但是它存在的主要理由是具有积极而非消极意义的. 作为一门持续受欢迎的课程，它的题材得以“充实”并在各种新的应用中被证明是有价值的. Z. A. Melzak曾出版了两卷本的著作*Companion to Concrete Mathematics*[267]，从另一个角度肯定了这一课程名称的恰当性.

“在讲授具体的对象之前就讲授抽象的内容，是完全不应该的.”
——Z. A. Melzak[267]

具体数学的素材初看像是一堆互不相干的技巧，但是透过实践可以把它汇集成一组严谨高效的工具. 的确，这些技术有基本的一致性，且对许多人都有极强的吸引力. 当另一作者

葛立恒（Ronald L. Graham）在1979年首次教授这门课时，学生们都感觉很有趣，以至于决定一年后举行一次班级聚会.

具体数学究竟是什么呢？它融合了**连续**数学和**离散**数学.①更具体地说，它是利用一组求解问题的技术对数学公式进行有控制的操作. 理解了本书的内容之后，你所需要的就是一颗冷静的头脑、一大张纸以及较为工整的书写，以便对看上去令人恐怖的和式进行计算，求解复杂的递归关系，以及发现数据中隐藏的精妙规律. 你会对代数技巧得心应手，从而常常会发现，得到精确的结果比求出仅在一定意义下成立的近似解更为容易.

具体数学是通向抽象数学的桥梁.

这本书要探讨的主题包括和式、递归式、初等数论、二项式系数、生成函数、离散概率以及渐近方法. 其重点是强调处理技术，而不是存在性定理或者组合推理，目的是使每一位读者熟悉离散性运算（如最大整数函数以及有限求和），就好像每一位学习微积分的学生都熟悉连续性运算一样（如绝对值函数以及不定积分）.

"略过看似基础内容的高水平读者，比略过看似复杂内容的较低水平读者，可能错失更多的东西."

——G. 波利亚[297]

注意，这些主题与当今大学本科中的"离散数学"课程的内容截然不同. 因此，这门课程需要一个不同的名称，而"具体数学"可谓恰如其分.

最初在斯坦福大学教授"具体数学"的教材是*The Art of Computer Programming*[207]中的"Mathematical Preliminaries"（数学预备知识）一节. 但是，那110页的内容相当简洁，所以另一位作者欧伦·帕塔许尼克（Oren Patashnik）受到启发，撰写了一套长篇幅的补充笔记. 这本书就是那些笔记的产物，它扩充了"数学预备知识"中的资料，也更从容地引出了这些预备知识，其中略去了那些较高深的部分，同时又包含了笔记里未提及的主题，使得书的内容更为完整.

[我们没敢叫作"离续数学"（Distinuous Mathematics）.]

我们很享受一起写这本书，因为这门课程就在我们眼前逐渐定型，获得了生命，它就看似是自己写就的. 此外，我们这些年来在若干地方采用的非常规方法看起来也十分妥帖，让人忍不住认为，这本书正好宣告了我们所喜爱的做数学的方式. 所以我们想，这本书就像讲述数学之美之奇的故事，希望读者能够分享我们写作中的愉悦，哪怕只有 ε 那么一点点.

"……一件具体的救生衣抛向沉入抽象大海的学生."

——W.Gottschalk

自从本书在大学环境中诞生以来，我们就一直尝试以非正式的风格来体现当代课堂教学的精神. 有些人认为数学是一项严肃的工作，必须是冷冰冰的，但是我们认为数学是娱乐，而且并不羞于承认这个事实. 为什么要把工作和娱乐截然分开呢？具体数学充满了引人入胜的模式，其演算推理并非总是轻而易举，然而答案却可能极具魅力. 数学工作的欢乐和忧伤都鲜明地反映在这本书中，因为它们是我们生活的一部分.

学生们总是比老师们更有头脑，所以我们请这个教材的首批学生提出他们坦诚的意见，即旁注中的"涂鸦". 在这些"涂鸦"中，有一些仅仅是套话，有一些则很深奥；有一些提醒区分歧义或者含混之处，有一些则是后排那些聪明家伙爱做的点评；有一些是正面的，有一些是负面的，还有一些则不偏不倚. 但是，它们都是情感的真实表现，应该有助于读者理解正文内容.（这种旁注的灵感来自名为*Approaching Stanford*（《走近斯坦福》）的学生手册. 在这本手册中，官方的大学信息与即将离校的学生评论相映成趣. 例如，斯坦福大学说："在

数学涂鸦：
Kilroy wasn't Haar.
Free the group.
Nuke the kernel.
Power to the n.
N=1 ⇒ P =NP.②

① 具体数学的英文Concrete取自连续（CONtinuous）和离散（disCRETE）两个单词. ——编者注

② 这些涂鸦都是将某个典故与数学关联在了一起. 比如"Kilroy was here!"指第二次世界大战期间美国士兵墙壁涂鸦，而Haar是指Alfréd Haar，一位匈牙利数学家.（如无特殊说明，本书脚注均为译者注.）

我对这个主题的兴趣只能靠边站.

斯坦福大学这个无定型的生活方式中，有一些东西是你不能错过的.”而旁注中写道：“无定型……鬼知道是什么意思？这里到处都是典型的伪理智主义.” 斯坦福大学说：“一群住在一起的学生，他们的潜力是无穷尽的.”而涂鸦则声称：“斯坦福大学的宿舍就像无人管理的动物园.”）

这是我曾经上过的最令人愉快的课程. 你在学习时能加以总结会大有裨益.

旁注中也直接引用了著名数学家们的话，这些话是他们在宣布某些重大发现时所说的. 看起来，将莱布尼茨、欧拉、高斯等人的话与那些继续其研究工作的人的话混在一起是合适的. 数学是身处各地的人进行的不间断的探索研究，涓涓细流才能汇成浩瀚的海洋.

我明白了，具体数学就意味着操练.

这本书包含了500多道习题，分成如下六大类.

作业题挺难，但是我学到很多，值得为它付出时间.

家庭测试题极其重要——请保留它们.

我猜想考试比作业更困难.

- **热身题**：这是**每一位读者**在第一次阅读本书时就应完成的习题.
- **基础题**：这些习题揭示出了，通过自己的推导而不是他人的推导来学习最好.
- **作业题**：是加深理解当前章节内容的问题.
- **考试题**：一般同时涉及两章以上的内容，可作为家庭测试题（不作为课堂上的限时考试）.
- **附加题**：它们超出了学习本教材的学生的平均水平，以耐人寻味的方式扩展了书中的知识.
- **研究题**：或许非人力所能解，但是这里给出的题似乎值得一试身手（不限时）.

附录A中给出了所有习题的答案，常常还附有相关的解题思路.（当然，研究题的“答案”并不完全. 但即便如此，也会给出部分结果或者提示，这或许会很有帮助.）我们鼓励读者看一看答案，特别是热身题的答案，但应该首先努力试图求解问题，而不是在这之前就偷窥答案.

偷懒者有可能通过抄袭答案通过这门课程，但他们是在自欺欺人.

在附录C中，我们尝试说明每道习题的出处，因为一个富有教益的问题常常融会了大量的创造性思想或者运气. 很遗憾，数学家们有个不好的传统：借用了习题，而不表示感谢. 我们相信，相反的做法，例如棋类书籍和杂志中的做法（通常都会指出最初棋类问题的名字、时间和地点），要远胜于此. 然而，许多流传已久的问题我们已经无从考证其来源. 如果有读者了解某个习题的起源，而书中的说明缺失或不够准确，我们非常乐于知道详情，以便在这本书的后续版本中予以纠正.

困难的考试并没有顾及要准备其他课程的学生.

这本书自始至终使用的数学字体是由Hermann Zapf[227]新设计的，它由美国数学会委托，并且在由B. Beeton、R. P. Boas、L. K. Durst、D. E. Knuth、P. Murdock、R. S. Palais、P. Renz、E. Swanson、S. B. Whidden和W. B. Woolf组成的委员会的帮助下发展起来. Zapf的设计基本原理是抓住数学的韵味，就好像它是一位数学家用极其漂亮的书法书写出来的. 采用手写体而不用呆板机械的风格是恰当的，因为人们一般是用钢笔、铅笔或者粉笔创造数学的.（例如，新设计的一个特征是“0”的符号，这个符号的顶部有点尖，因为在曲线回到起点时，手写的零很少能够平滑地闭合.）字母是直立的，而不是斜置的，所以下标、上标以及撇号都更容易与常规符号融为一体. 这种新的字体取名为AMS Euler，是以伟大的瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（1707—1783）的名字命名的，他有如此众多广为人知的数学发现. 这一字母系统包括Euler Text、Euler Fraktur和Euler Script Capitals，还有Euler Greek以及像$\wp$和$\aleph$这样的特殊符号. 我们特别高兴能在这本书里让Euler字体家族登台亮相，[①]因为莱昂哈德·欧拉

我不习惯这张面孔.

① 本书中文版没有采用这个字体库，难于呈现原书的字体，我们深表遗憾. ——编者注

的精神真的活在每一页中：具体数学就是欧拉的数学.

我们非常感谢Andrei Broder、Ernst Mayr、Andrew Yao（姚期智）和Frances Yao（储枫），他们在斯坦福大学教授具体数学的这些年间对这本书贡献极大. 此外，我们对助教们表示十二万分的感谢，他们将每一年班级所发生的事情创造性地记录下来，并且帮助设计了考题，他们的名字列在了附录C中. 这本书基本上是十六年来教学讲义的价值的缩影，没有他们出色的工作，就不会有这本书.

亲爱的教授：感谢(1)这些双关语，(2)这些题材.

本书出版还得益于许多其他人的帮助. 例如，我们希望表扬布朗大学、哥伦比亚大学、纽约市立大学、普林斯顿大学、莱斯大学和斯坦福大学的学生，他们贡献了精选的涂鸦之作，并为初稿挑错. 我们与Addison-Wesley的接触特别富有成效和助益. 特别地，我们希望感谢出版人Peter Gordon、产品监理Bette Aaronson、设计师Roy Brown以及文字编辑Lyn Dupré. 美国国家科学基金以及海军研究署给予了非常宝贵的支持. 在我们准备索引时，Cheryl Graham给了极大的帮助. 最重要的是，我们希望感谢夫人们（Fan、Jill以及Amy）给予我们的耐心、支持、鼓励以及意见.

我不知道学到的东西对我有何帮助.

学这门课程时我有过许多困扰，但是我知道它使我的数学技巧以及思维能力得以加强.

本书第二版新增了5.8节，它描述了本书第一版付印之后不久Doron Zeilberger所发现的某些重要想法. 对第一版所做的进一步改进几乎在每一页中都能找到.

我们一直试图写出一本完美之书，但是我们不是完美无暇的作者. 因此恳请读者帮助我们纠正错误. 对于每个错误，我们乐于给第一个报告该错误的读者支付2.56美元，无论它是数学错误、史实错误还是印刷错误.

我建议混学分的学生不要上这门课.

1988年5月于新泽西州缪勒山
1993年10月于加利福尼亚州斯坦福
——葛立恒，高德纳，帕塔许尼克

记号注释

本书中的某些符号体系并不标准. 一些读者会在其他书中学习类似的内容，这里列出了他们可能不熟悉的记号，同时也标注了这些记号所在的页码.（一些标准的记号可以参见本书的索引.）

记　号	名　称	页　码
$\ln x$	自然对数：$\log_e x$	231
$\lg x$	以2为底的对数：$\log_2 x$	58
$\log x$	常用对数：$\log_{10} x$	376
$\lfloor x \rfloor$	底：$\max\{n \mid n \leqslant x，n$是整数$\}$	56
$\lceil x \rceil$	顶：$\min\{n \mid n \leqslant x，n$是整数$\}$	56
$x \bmod y$	余数：$x - y\lfloor x/y \rfloor$	68
$\{x\}$	分数部分：$x \bmod 1$	58
$\sum f(x)\delta x$	无限和式	41
$\sum_a^b f(x)\delta x$	有限和式	41
$x^{\underline{n}}$	下降阶乘幂：$x!/(x-n)!$	40, 175
$x^{\overline{n}}$	上升阶乘幂：$\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$	40, 175
$n¡$	倒阶乘：$n!/0! - n!/1! + \cdots + (-1)^n n!/n!$	161
$\Re z$	实部：x，如果 $z = x + \mathrm{i}y$	53
$\Im z$	虚部：y，如果 $z = x + \mathrm{i}y$	53
H_n	调和数：$1/1 + \cdots + 1/n$	24
$H_n^{(x)}$	广义调和数：$1/1^x + \cdots + 1/n^x$	232
$f^{(m)}(z)$	f关于z的m阶导数	393
$\left[{n \atop m}\right]$	斯特林轮换数（第一类斯特林数）	216

记号	名称	页码
$\left\{ {n \atop m} \right\}$	斯特林子集数（第二类斯特林数）	215
$\left\langle {n \atop m} \right\rangle$	欧拉数（Eulerian number）	223
$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\!\right\rangle$	二阶欧拉数	225
$(a_m \cdots a_0)_b$	$\sum_{k=0}^m a_k b^k$的基数记数法	9
$K(a_1,\cdots,a_n)$	连项式多项式	253
$F\left({a,b \atop c} \middle\vert z \right)$	超几何函数	170
$\#A$	基数：集合A的元素个数	33
$[z^n]f(z)$	$f(z)$中z^n的系数	164
$[\alpha..\beta]$	闭区间：集合$\{x \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$	61
$[m=n]$	1，如果$m=n$；否则，0*	21
$[m \backslash n]$	1，如果m整除n；否则，0*	85
$[m \backslash\backslash n]$	1，如果m精确整除n；否则，0*	121
$[m \perp n]$	1，如果m与n互素；否则，0*	96

* 一般情况下，如果S可以为真也可以为假，那么$[S]$就意味着：如果S为真，$[S]$就为1；否则，$[S]$就为0.

a/bc与$a/(bc)$是一样的．另外，$\log x/\log y = (\log x)/(\log y)$，$2n! = 2(n!)$.

如果你不明白页码中的X表示什么，那就问问你的拉丁语导师，而不是数学导师．

预应力混凝土数学（prestressed concrete mathematics）就是在具体数学（concrete mathematics）前加上一串眼花缭乱的记号．

目　　录

1

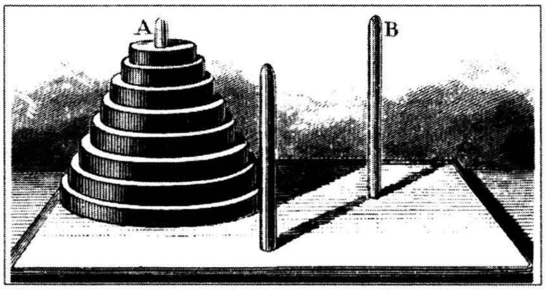
递归问题
RECURRENT PROBLEMS

本章探讨三个范例，以便你对后面要讲述的内容有个大概了解. 它们有两个共同的特征：一是都曾被数学家们反复研究过；二是它们的解都用到了*递归*的思想，每一个问题的解都依赖于同一问题的更小实例的解.

1.1 河内塔 THE TOWER OF HANOI

如果你从没有见过这个，请举手.
好的，其他人可以迅速转到式（1.1）.

我们首先探讨一个称为河内塔的精巧智力题，它是由法国数学家爱德华·卢卡斯于1883年发明的. 给定一个由8个圆盘组成的塔，这些圆盘按照大小递减的方式套在三根桩柱中的一根上.



我们的目的是要将整个塔移动到另一根桩柱上，每次只能移动一个圆盘，且较大的圆盘在移动过程中不能放置在较小的圆盘上面.

金子——哇.
我们的圆盘是用混凝土（concrete）做成的吗?

卢卡斯[260] 给这个玩具赋予了一个罗曼蒂克的传说，说的是一个大得多的婆罗贺摩塔（Tower of Brahma），它由64个纯金的圆盘堆放在三座钻石做成的方尖塔上. 他说，上帝一开始把这些金圆盘放到了第一座方尖塔上，并命令一组牧师按照上面的规则把它们移动到第三座方尖塔上. 据说牧师们夜以继日地工作，当他们完成任务时，那座塔就将坍塌，世界也将毁灭.

这个智力题有解，只是并非显而易见，不过只要稍加思考（或者此前看见过这个问题）

就能使我们确信的确如此．现在问题来了：我们能做到的最好的解法是什么？也就是说，要完成这项任务移动多少次才是必须且足够的？

解决这样问题的最好方法是对它稍加推广．婆罗贺摩塔有64个圆盘，河内塔有8个圆盘，让我们来考虑一下，如果有 n 个圆盘将会怎样？

这样推广的一个好处是，我们可以大大简化问题．事实上，在本书中我们将反复看到，**先研究小的情形**是大有裨益的．移动只有一两个圆盘的塔十分容易．再通过少量的尝试就能看出如何移动有3个圆盘的塔．

求解问题的下一步是引入适当的记号：**命名并求解**．我们称 T_n 是根据卢卡斯的规则将 n 个圆盘从一根桩柱移动到另一根桩柱所需要的最少移动次数．那么，T_1 显然是1，而 $T_2=3$．

考虑所有情形中最小的情形还可以轻松得到另一条信息，即显然有 $T_0=0$，因为一个有 $n=0$ 个圆盘的塔根本无需做任何挪动！聪明的数学家们不会羞于考虑小问题，因为当极端情形（即便它们是平凡的情形）弄得明明白白时，一般的形式就容易理解了．

现在让我们改变一下视角，来考虑大的情形：怎样才能移动一个大的塔呢？移动3个圆盘的试验表明，获胜的思路是将上面两个圆盘移动到中间的桩柱上，然后移动第三个圆盘，接着再把其余两个放到它上面．这就为移动 n 个圆盘提供了一条线索：首先把 $n-1$ 个小的圆盘移动到一个不同的桩柱上（需要 T_{n-1} 次移动），然后移动最大的圆盘（需要一次移动），最后再把那 $n-1$ 个小的圆盘移回到最大圆盘的上面（这需要另外的 T_{n-1} 次移动）．这样，至多需要 $2T_{n-1}+1$ 次移动就能移动 n（$n>0$）个圆盘了：

$$T_n \leqslant 2T_{n-1}+1,\quad n>0.$$

这个公式用的是符号"≤"，而不是"="，因为我们的构造仅仅证明了 $2T_{n-1}+1$ 次移动就足够了，而没有证明 $2T_{n-1}+1$ 次移动是必需的．智者或许能想到一条捷径．

还有更好的方法吗？实际上没有．我们迟早必须移动最大的那个圆盘．当我们这样做的时候，那 $n-1$ 个小的圆盘必须已经在某根桩柱上，而这至少需要 T_{n-1} 次移动才能把它们放置到那儿．如果我们不太精明，则移动最大的圆盘可能会多于一次．但是在最后一次移动最大的那个圆盘之后，我们必须把那 $n-1$ 个小的圆盘（它们必须仍然在同一根桩柱上）移回到最大圆盘的上面，这也需要 T_{n-1} 次移动．从而

已经就卢卡斯问题发表的大多数"解"，如Allardice和Fraser[7]给出的一个早期的解，都没能说明为什么 T_n 必定 $\geqslant 2T_{n-1}+1$．

2
$$T_n \geqslant 2T_{n-1}+1,\quad n>0.$$

把这两个不等式与 $n=0$ 时的平凡解结合在一起就得到

$$\begin{aligned} &T_0=0;\\ &T_n=2T_{n-1}+1,\quad n>0. \end{aligned}\tag{1.1}$$

（注意，这些公式与已知的值 $T_1=1$ 以及 $T_2=3$ 相一致．关于小的情形的经验不仅能帮助我们发现一般的公式，而且还提供了一种便利的核查方法，看看我们是否犯下愚蠢的错误．在以后各章涉及更为复杂的操作策略时，这样的核查尤为重要．）

像式(1.1)这样的一组等式称为**递归式**(recurrence，也称为递归关系或者递推关系)．它给出一个边界值，以及一个用前面的值给出一般值的方程．有时我们也把单独的一般性方程称为递归式，尽管从技术上来说它还需要一个边界值来补足．

是的，是的，我以前见过这个词．

我们可以用递归式对任何 n 计算 T_n．然而，当 n 很大时，并没有人真愿意用递归式进行

计算，因为太耗时了．递归式只给出了间接、局部的信息．得出**递归式的解**我们会很愉悦．这就是说，对于T_n，我们希望给出一个既漂亮又简洁的"封闭形式"，它使我们可以对其进行快捷计算，即便对很大的n亦然．有了一个封闭形式，我们才能真正理解T_n究竟是什么．

那么怎样来求解一个递归式呢？一种方法是猜出正确的解，然后证明我们的猜想是正确的．猜测解的最好方法是（再次）研究小的情形．我们就这样连续计算$T_3 = 2\times3+1=7$，$T_4 = 2\times7+1=15$，$T_5 = 2\times15+1=31$，$T_6 = 2\times31+1=63$．啊哈！这看起来肯定像是有

$$T_n = 2^n - 1,\quad n \geqslant 0. \qquad (1.2)$$

至少这对$n \leqslant 6$是成立的．

数学归纳法（mathematical induction）是证明某个命题对所有满足$n \geqslant n_0$的整数n都成立的一般方法．首先我们在n取最小值n_0时证明该命题，这一步骤称为**基础**（basis）；然后对$n > n_0$，假设该命题对n_0与$n-1$之间（包含它们在内）的所有值都已经被证明，再证明该命题对n成立，这一步骤称为**归纳**（induction）．这样一种证明方法仅用有限步就得到无限多个结果．

通过证明我们可以爬到梯子的最底一级（基础），并能从一个阶梯爬到上一个阶梯（归纳），数学归纳法就证明了：我们可以在一架梯子上想爬多高就爬多高．

递归式可以用数学归纳法完美地确立起来．例如在我们的情形中，式（1.2）很容易由式（1.1）推出：其基础是显然的，因为$T_0 = 2^0 - 1 = 0$．而如果我们假设当n被$n-1$取代时式（1.2）成立，则对$n>0$用归纳法就得出

$$T_n = 2T_{n-1}+1 = 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n - 1,$$

从而式（1.2）对n也成立．好的！我们对T_n的探求就此成功结束． 3

牧师的任务自然还没有完成，他们仍在负责任地移动圆盘，而且还会继续一段时间，因为对$n=64$有$2^{64}-1$次移动（大约1.8×10^{19}次）．即便是按照每微秒移动一次这个不可能实现的速度，也需要5000多个世纪来移动婆罗贺摩塔．而卢卡斯的智力问题更切合实际，它需要$2^8-1=255$次移动，快手大概四分钟就能完成．

河内塔的递归式是在各种应用中出现的诸多问题的一个典范．在寻求像T_n这样有意义的量的封闭形式的表达式时，我们经过了如下三个阶段．

(1) 研究小的情形．这有助于我们洞察该问题，而且对第二和第三阶段有所帮助．

(2) 对有意义的量求出数学表达式并给出证明．对河内塔，这就是递归式（1.1），它允许我们对任何n计算T_n（假设我们有这样的意向）．

什么是proof（证明）？"百分之一纯酒精的一半．"

(3) 对数学表达式求出封闭形式并予以证明．对河内塔，这就是递归解（1.2）．

第三阶段是本书要由始至终集中探讨的．实际上，我们将频繁跳过第一和第二阶段，因为我们以给定一个数学表达式作为出发点．即便如此，我们仍然会深入到各个子问题中，寻求它们的解将会贯穿所有这三个阶段．

我们对于河内塔的分析引导出了正确的答案，然而它要求"归纳的跳跃"，依赖于我们对答案的幸运猜测．这本书的一个主要目的就是说明**不具备**超人洞察力的人如何求解递归式．例如，我们将会看到，在递归式（1.1）中方程的两边加上1可以使其变得更简单

$$T_0 + 1 = 1;$$
$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2,\quad n > 0.$$

现在如果令$U_n = T_n + 1$，那么就有