高等学校教材

概率论与数理统计

刘琼荪　钟　波　荣腾中　李曼曼　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

刘琼荪　钟　波　荣腾中　李曼曼　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程编写的教材。全书共九章，内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析。各章根据教学基本要求和复习需要配置了相应习题，并在书后附有部分习题答案与提示。本书包含一些涉及工程与经济方面的应用案例，以拓展学生的知识面。同时，为了增强学生统计分析能力，添加了用于学生课外实践的统计题目和数据。附录汇集了两套模拟试题，便于学生总结与复习。

本书讲解简明扼要，注重应用，例题覆盖面广，也可作为实际工作者的应用参考书和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／刘琼荪等编著.-- 北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-038007-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 160043 号

策划编辑 兰莹莹　　责任编辑 胡 颖　　封面设计 李小路　　版式设计 童 丹

插图绘制 尹 莉　　责任校对 殷 然　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市卫顺印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.25	版　　次	2013年8月第1版
字　　数	370千字	印　　次	2013年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	29.70元

物 料 号　38007-00

前　言

本书是作者在重庆大学十多年教学实践的经验总结,编写时参照了教学基本要求和最新的全国硕士研究生入学统一考试大纲,可作为高等学校非数学类各专业的教材。

重庆大学概率论与数理统计课程是重庆市市级精品课程,也是重庆大学重点建设的大学数学公共基础课程之一。随着社会、经济、科技发展的加速和深化,各个专业领域涌现了大量的复杂问题,涉及国计民生的社会、经济问题也急切地需要深入研究,如金融风险、保险精算、环境保护、可持续发展等。概率论与数理统计是一门应用性极强的数学基础课程,它将为上述问题的研究与解决提供重要的手段与技术。同时,这门课程对培养学生的科学思维、理论联系实际的能力、分析问题和解决问题的能力具有十分重要的作用。

本教材在取材和写作上,有如下特色:

1. 为加强学生的内驱力,变被动学习为主动学习,注重理论与实际相结合。如在例题和习题中尽可能选择一些反映各个领域的应用背景或与日常生活比较贴切的题目,如系统可靠性问题、产品检验问题、保险品种的保费与索赔计算、投资组合风险问题、社会经济调查等,使学生对运用“概率论与数理统计”知识解决实际问题有更深入的认识,从而对本门课程产生浓厚的兴趣。

2. 为满足学生自主学习和拓展知识面的需要,本书添加了“欣赏与提高”内容。

3. 为课堂内师生互动讨论的需要,使学生对基本概念印象深刻,每章的教学内容中都穿插引入了一些思考题。

4. 为便于学生复习与总结,每章后面对知识点进行了梳理,并根据教学基本要求提出了本章应重点掌握的内容。

5. 针对不同层次学生和分类教学的需要,将习题分为 A,B,C 三组,A 组习题面向绝大多数学生,强调掌握基本概念和基本理论;B 组习题供优异学生和考研学生选择; C 组习题主要加强学生的数学建模和创新实践能力。

对非数学类各个专业的本科生而言,常规的考试题型主要有:基本概念题、简单演算题、计算题。本书将平时练习的题目与常规的考试题目挂钩,即书中的习题兼顾了考试的题型与题目,使之匹配,同时考虑到全国硕士研究生入学统一考试的实际需要,参考了近年来全国硕士研究生入学统一考试大纲。

概率论与数理统计作为高等学校的一门重要数学基础课程，在各门数学基础课程中并不算难，也不算很抽象，但学生在学习这门课程时往往很吃力，原因在于这门课比其他数学课程更加灵活。要改变拘泥于严谨的数学思维习惯有一个过程，尤其是数理统计，需要学生反复地体会统计含义，在数学推导和计算中明白蕴涵其中的随机本质。因此，要学好本门课程，“大量地练习”这一学好数学的法宝仍然需要，特别是勤于思考、举一反三和学会归纳尤为重要。

由于编者水平所限，不当乃至错谬之处在所难免，恳请国内同行及广大读者不吝赐教。

编　者

2013年5月10日于重庆大学

本书符号说明

样本空间：Ω

事件：$A,B,C,\cdots,A=\{X<a\},B=\{X=1,2,3\}$

事件之间的运算：$A\cup B,A\cap B,\overline{A}=\Omega-A,A-B=A\overline{B}$

随机变量：$X,Y,Z,\cdots$

二维随机变量函数：$U=U(X,Y),V=V(X,Y)$

概率：$P(A)$

离散型随机变量 X 的取值：$a_1,a_2,\cdots$ 或 $b_1,b_2,\cdots$

分布律定义：$P\{X=a_i\}=p_i,P\{X=a_i,Y=b_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$

连续型随机变量 X 的密度函数：$f(x)$

随机变量 X 的分布函数定义：$F(x)=P\{X\leqslant x\}$

常见分布的记号：二项分布 $B(n,p)$，泊松分布 $P(\lambda)$，几何分布 $G(p)$，均匀分布 $U[a,b]$，指数分布 $\Gamma(1,\lambda)$，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，卡方分布 $\chi^2(n)$，t 分布 $t(n)$，F 分布 $F(n,m)$

随机变量 X 的数学期望及方差：EX,DX

随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望及方差：$E(g(X)),D(g(X))$

X,Y 的协方差：$\operatorname{cov}(X,Y)$

X,Y 的相关系数：$\rho(X,Y),\rho_{XY}$

样本：$X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本观测值：$x_1,x_2,\cdots,x_n$

样本均值：$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本标准差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本 k 阶原点矩：$M_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩：$M_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k=2,3,\cdots$

求和项的符号：$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n} x_i$

乘积项符号：$\prod_{i=1}^{n} X_i$

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010) 82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

目　录

第 1 章 随机事件及其概率

§1.1 引 言

1.1.1 随机数学

现实生活中,我们随处可见在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,即随机现象. 比如,道琼斯指数明天上涨 0.04%,上班时乘坐的公共汽车经过市中心时遇见 3 次红灯,在银行的 ATM 机前有 2 个人排队……随机数学就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,在自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等诸多领域中有着广泛的应用. 随机数学包含概率论、数理统计、随机过程、试验设计、抽样调查、随机运筹学等,但概率论与数理统计是随机数学的两个主要部分.

概率论是随机数学的理论基础,它给出了描述随机现象及其统计规律性的数学方法和模型,从理论上研究事件发生的概率及性质;数理统计是运用概率论的方法研究如何通过抽样观察,实现对随机对象统计规律的认识,包括样本抽样、数据分析、统计推断,最后作出决策. 可以说,数理统计更偏向于实际应用.

概率论与数理统计,简称概率统计,有着完善的理论体系,严密的推理过程,我们将运用高等数学、组合数学、代数论、几何学等方法来学习概率统计的基本知识.

1.1.2 概率论的起源

概率论起源于 17 世纪中叶. 当时在误差分析、人口统计等范畴中,有大量的随机数据资料需要整理和研究,从而孕育出一门数学分支专门用于研究随机现象的规律性. 同时,由于欧洲贵族的赌博游戏的兴起,在利益的驱动下,越来越多的精英投入到"可能性"的研究上来. 渐渐地,人们不再满足于诸如"掷硬币赌正反面"这样简单的赌博方式,希望增加赌局复杂度和趣味性,把"可能性"进行加密,让有概率运算能力的人靠技术拥有更多的赌博优势. 比如,他们研究的一个问题是:

(1) 掷骰子一次,掷前下注三个点,出现其中之一就获胜;

(2) 掷骰子三次,掷前下注一个点,只要出现一次就获胜.

这两种赌博方式,可能性是不是一样的呢?哪一种方式对赌徒有利呢?在学完古典概率之后,读者就能对此问题作出回答.

使概率论成为数学的一个分支,并作出重要贡献的是瑞士数学家伯努利(Bernoulli),他在 1689 年建立了概率论中的第一个极限定理"伯努利大数定律". 法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年出版了《概率的分析理论》,首先明确地给出了概率的古典定义. 后经过高斯(Gauss)和泊松(Poisson)等数学家的努力,概率论在数学中的地位基本确立. 到了 20 世纪 30 年代,柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出概率的三条公理化定义,为概率论的发展作出杰出贡献,使概率论成为了一门严谨的数学分支. 近代又出现了理论概率及应用概率的分支,概率论被广泛地应用到了不同的范畴和学科.

1.1.3　数理统计的发展

数理统计的主要发展是从 20 世纪初开始的. 在早期的发展中,起领导作用的是以费希尔(Fisher)和皮尔逊(Pearson)为首的英国学派. 特别是费希尔,他在数理统计的发展中作出了杰出的贡献,目前许多常用的统计方法以及教科书中的内容都与他的名字有关. 瑞典统计学家克拉默(Cramer)在 1946 年发表的著作《统计学数学方法》标志着数理统计学科已达到成熟的地步. 第二次世界大战后,许多在战前开始成形的统计分支得到飞速的发展,数学上的深度比以前大大加深了. 20 世纪后半期,伴随着电子计算机这一强有力的数值计算工具的迅速普及,数理统计理论和方法迎来全新的发展,已成为自然科学与社会科学中信息处理必不可少的分析工具.

§1.2　随 机 事 件

在这节,我们将学习如何用集合这个数学工具描述随机现象,以便我们可以借助集合来研究实际问题中的随机现象.

1.2.1　随机事件

在某些确定的条件下,可以预知过程和结果的现象,如物理实验、天文观测、春夏更替等,我们称之为确定性现象;还有一类现象是在相同的条件下,结果也是不可预知的,或者即使知道它过去的状态,也不能肯定其将来的发展状态,如天气情况、股票走势、购买彩票、机械故障等,我们称之为随机现象或随机事件,简称为事件,常用大写字母 A,B,C 等表示. 随机事件随处可见,自然界的本质就是随机的. 所谓的确定性现象,比如水加热会沸腾,种瓜得瓜、种豆得豆,买的汽

车会出故障、会最终报废,人的生命有限,太阳从东边升起等,只在一定的范围或一定的条件下成立,当条件方式改变,这些现象就可能表现出某种不确定性,这种不确定性我们通常也不可能精确地量化它们,只能了解或认识其整体趋势(称之为统计规律性). 比如水加热沸腾所需的时间? 转基因大豆会长出什么来? 你买的汽车什么时候出现第一次故障? 一个人能活多少岁? 明天看到太阳升起的时间? 等都属于随机事件. 又如下列试验中出现的现象:

(1) 掷一枚均匀硬币,观察朝上面的图案;

(2) 将10件相同型号产品标上号码1,2,…,10,从中任取一件,观察取得几号产品;

(3) 一天内进入超市的顾客数;

(4) 一台电视机的使用寿命;

(5) 实弹射击,观察射击的实弹落点.

以上五个例子,有着共同的特点,归纳如下:

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且试验前可以确定所有可能出现的结果;

(3) 每次试验之前不能准确预言哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验,记为 E 或 $E_i, i=1,2,\cdots$. 显然,我们讨论的随机事件一定是某个随机试验中的随机现象.

请注意,随机试验可在相同条件下重复进行,是一个宏观的概念. 正如世界上没有两片完全相同的树叶一样,不可能存在两次完全相同的抛掷硬币,其抛掷角度、力度、落点等都不会完全相同. 因此概率是基于宏观意义的指标.

随机性使得事物的未来变化变得不可预知,给生产生活带来许多不便. 那么随机性是否总是带来不利呢? 事物都具有两面性,随机性也会带来许多好处. 有了随机现象,才有了诸如抽签的公平、机遇与缘分、彩票和棋牌等. 可以说没有随机现象,就没有我们这个丰富多彩的世界,让我们一起来认识它吧!

1.2.2 样本空间

为了用集合工具表示随机现象,我们先给出样本空间的概念.

将随机试验 E 中可能出现的基本结果称为样本点,一般用小写字母 ω, e 等或数字表示,由所有样本点组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω. 例如,对上述5个例子:

(1) 抛掷一枚均匀硬币试验 E_1,样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面出现,ω_2 表示反面出现. 如果向上抛掷两枚硬币,则样本空间 $\Omega'=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,$

$\omega_4\}$,其中 ω_1 = (正,正), ω_2 = (正,反), ω_3 = (反,正), ω_4 = (反,反).

(2) 取产品的随机试验 E_2,样本空间 $\Omega_2 = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$,其中 ω_i 表示取到第 i 号产品, $i = 1,2,\cdots,10$, 也可以直接用数字表示抽取产品的结果,记样本空间为 $\Omega_2 = \{1,2,\cdots,10\}$.

(3) 统计某天进入某超市人数的随机试验 E_3,$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots\}$,这是一个含有无穷可数个样本点的样本空间.

(4) 一台电视机的寿命试验 E_4,$\Omega_4 = \{t \mid t \in [0,+\infty)\}$ 或 $\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$,这是一个非负的实数集.

(5) 实弹射击随机试验 E_5,假定靶面是一个半径为 r 的圆面,则样本空间 $\Omega_5 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$.

以上例子显示,样本空间可能是有限集合,也可能是无限集合,譬如样本空间 Ω_1,Ω_2 中的样本点的个数为有限个,样本空间 Ω_3,Ω_4 和 Ω_5 中样本点为无限个. 在学习中,需要注意的是能恰当地描述随机试验的样本空间. 同一样本空间可能表示不同的随机试验,例如,样本空间 $\Omega = \{0,1\}$,既可以描述掷一枚硬币出现正面或反面的随机试验,也可以描述产品检验中出现“正品”或“次品”的随机试验. 把具体问题的随机试验用样本空间来描述,是建立一个数学模型的前提. 引入样本空间会给数学处理带来许多方便.

1.2.3 随机事件的集合表示

下面通过试验 E_2,说明如何用集合表示随机事件. 设 A 表示“抽到奇数号产品”的随机现象,如果试验中 A 出现了,那么一定是样本点 $\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9$ 中所代表的某个基本结果出现;另一方面,基本结果 $\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9$ 中的任何一个在试验中出现,则等于随机事件 A 出现了. 因此,我们用样本空间 Ω_2 中的子集 $\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$ 代表随机事件 A,记为 $A = \{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$. 事实上,对于一般的随机试验,它的任何一个随机事件 A,我们都可以用样本空间的一个子集表示,如图 1.2.1 所示,随机事件 A 发生当且仅当表示 A 的集合中某一基本结果发生.

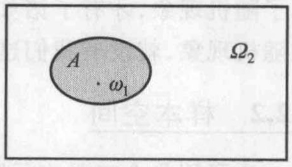

图 1.2.1 样本空间中的事件 A

例 1.2.1 (1) 掷两枚硬币试验的样本空间:

$$\Omega_1 = \{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$$

$$A = “至少出现一个正面” = \{(正,正),(正,反),(反,正)\}$$

$$B = “恰好出现一个正面” = \{(正,反),(反,正)\}$$

(2) 电视机的寿命试验:

$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$

$A=$“电视机寿命在 10 年以内” $= \{t \mid 0 \leqslant t < 10\}$

$B=$“电视机寿命在 10 年以上” $= \{t \mid t > 10\}$

任一个样本空间 Ω 都存在一个最大子集 (Ω) 和最小子集 ($\varnothing$), 称最大子集为必然事件,称最小子集为不可能事件,分别表示为 Ω 和 $\varnothing$. 必然事件表示了每次试验都要出现的现象,不可能事件表示了每次试验都不会出现的现象. 例如,掷一颗骰子,“出现点数不超过 6”是一个必然事件,“出现 7 点”是不可能事件.

1.2.4 事件之间的关系和运算

我们知道,事件有简单的,也有复杂的. 对于复杂事件,常常希望能用简单事件表示,从而将复杂问题转化为简单问题来处理. 那么,如何用简单事件表示复杂事件呢? 这个问题我们可以通过事件之间的关系和运算来解决.

下面借助集合之间的关系与运算定义事件之间的关系与运算.

(1) **子事件** 如果事件 A 的样本点也属于事件 B, 则称 A 为 B 的子事件,记为 $A \subset B$. 其含义为“事件 A 发生必然导致事件 B 也发生”. 例如,掷一颗骰子,$A=$“出现 4 点”,$B=$“出现偶数点”,显然,事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即有关系 $A \subset B$. 如图 1.2.2 所示.

特别地,如果事件 A 与 B 互为子事件,则称事件 A 与 B **相等**,记为 $A = B$. 这是因为同一个事件可能会有两种以上的表达形式. 例如,掷两颗骰子,事件 A 表示“两颗骰子的点数之和为奇数”,事件 B 表示“两颗骰子的点数一奇一偶”,这是同一事件的两种表示,显然有关系 $A = B$.

(2) **和事件** 称事件 A 与事件 B 的全部样本点组成的集合为事件 A 与 B 的和事件,记为 $A \cup B$. 于是,有 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B$, 即 $\omega \in A \cup B$. $A \cup B$ 表示“事件 A 和 B 至少有一个发生”,如图 1.2.3 所示. 例如,假定某产品仅由两个零件组装而成,该产品不合格意味着两个零件至少有一件不合格,令 $A_i=$“第 i 个零件不合格”, $i = 1,2$, $A=$“产品不合格”,则 $A = A_1 \cup A_2$.

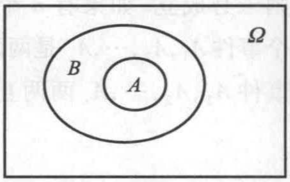

图 1.2.2 子事件

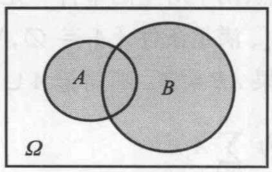

图 1.2.3 和事件 $A \cup B$

两个事件的和事件可以推广到多个事件的和事件，即事件 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 发生表示事件 $A_1, \cdots, A_n$ 至少有一个发生，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3) **积事件** 既属于事件 A 同时又属于事件 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$，简记为 AB. 因此，有 $\omega \in A$ 与 $\omega \in B$，即 $\omega \in AB$. AB 表示“事件 A 与 B 同时发生”，如图 1.2.4 所示. 例如，假定某产品仅由两个零件组装而成，产品合格意味着两个零件都合格，令 A_i = “第 i 个零件合格”，$i = 1,2$，A = “产品合格”，即 $A = A_1A_2$.

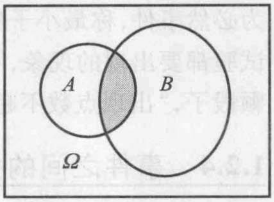

图 1.2.4 积事件 AB

同理，两个事件的积事件可以推广到多个事件的积事件，事件 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 发生表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

(4) **互斥事件与对立事件** 如果事件 A 与 B 没有公共的样本点，即满足 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 为互斥事件(也称为互不相容事件)，如图 1.2.5 所示. 其含义为：事件 A 与 B 不可能同时出现. 如果事件 A 与 B 满足 $AB = \varnothing$ 和 $A \cup B = \Omega$，则称 A, B 为互为对立的事件，也可将 A 的对立事件 B 记为 $\overline{A}$，B 的对立事件 A 记为 $\overline{B}$，如图 1.2.6 所示. 例如，在电视机寿命试验中，“电视机寿命小于 1 万小时”与“电视机寿命大于 5 万小时”是两个互斥事件. 而“电视机寿命小于 1 万小时”的对立事件是“电视机寿命大于或等于 1 万小时”.

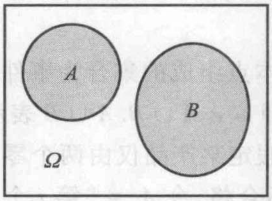

图 1.2.5 互斥事件 $AB = \varnothing$

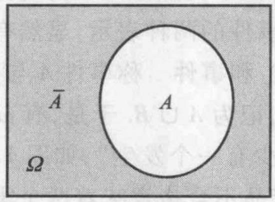

图 1.2.6 对立事件 $\overline{A}$

显然，两个对立的事件一定是互斥的，反之，则未必成立. 如果有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足条件 $A_iA_j = \varnothing, \forall i \neq j$，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的.

如果 $AB = \varnothing$，则简记 $A \cup B$ 为 $A + B$. 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则记 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(5) **差事件** 由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合称为 A 与