王学理　孔庆海　主编

高等数学全析全解

MATHEMATICS

（第三版）

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学全析全解

（第三版）

主　编　王学理　孔庆海
副主编　付连魁　杨中兵

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学全析全解／王学理，孔庆海主编．—3版．— 沈阳 ：东北大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5517-0213-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①王…　②孔…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 216707 号

内容提要

本书将高等数学习题进行系统分类，将由车向凯、谢崇远主编的《高等数学》教材中的所有习题进行了全析全解.

全书共含 11 章，前 10 章是上述教材中的前 10 章的全部习题，最后一章是东北大学近年来期终考试的真题及其详解.

书中所给出的解法力求简练、清楚又不失连贯性，一些题给出了多种解法或多种证法，对于开拓思路大有益处.

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市池陆广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：18. 25
字　　数：604 千字
出版时间：2005 年 10 月第 1 版
2007 年 9 月第 2 版
2012 年 9 月第 3 版
印刷时间：2012 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：12001 ~ 16000 册
责任编辑：孙　锋　　　　责任校对：季冬亮
封面设计：唐敏智　　　　责任出版：唯　美

ISBN 978-7-5517-0213-3　　　　定　　价：30. 00 元

第二版序言

本书自两年前面世以来，深受读者欢迎。现将此书再版，以满足学生们的需要。

在这两年当中，我们也多方征求了不同读者人群的意见，趁这次再版时机，来满足大家的愿望。

此次再版，主要进行了以下修订。

第一，改正了原版书中的一些印刷错误，对于一些不恰当的行文与图示进行了修正。

第二，增补了原版书中遗漏的习题的解答，个别习题增补或改用了新的解法。

第三，将第 11 章中前四套题删去，增补了近两年来东北大学期末试题。

参加本书修订工作的除原书作者外，还有沈海龙、樊实同志。再版工作也得到了东北大学出版社与东北大学数学系的大力支持。全书修订工作由王学理主持完成。

我们将继续虚心接受广大读者的批评指正，使这本书日臻完善，成为学生们的良师益友。

作　者

2007 年 9 月 8 日于东北大学

第三版序言

本书于2005年出版，2007年再版，2009年重印，一直深受广大读者的关注。为满足大家的需要，现决定对该书进行必要的修订，发行第三版。

此次修订主要将原来的内容进行一些必要的修改，更新了第11章的所有内容。

借此次再版的机会，衷心感谢一直关注本书的广大读者，也希望大家继续提出宝贵的意见和建议。

本书修订工作由原书作者共同完成，也得到了有关方面的大力支持。

作　者

2012年8月18日于东北大学

前　　言

由车向凯、谢崇远主编的《高等数学》已由高等教育出版社出版发行，这是一套为理工科院校本科生编写的高等数学教材。该书选用了大量的习题，以供学习者演练。这些习题取材广泛，有些题技巧性较强，难度也稍大，使得初学者感到困难。

针对上述情况，我们组织主要由原书编者参加的具有丰富教学经验的高等数学任课教师编写了这本《高等数学全析全解》。本书有以下四个特点。

一、解答详尽

除极简单题外，我们对教材中除第 11 章的数学实验类以外的全部习题给出全部解答，带 * 的题目尽管超出了对本科学生的要求，但本书也给出了解答，尽量做到步骤细致周全，没有大的跨跃。

二、注重分析

对于难度较大的题目，我们都给出解题思路，在解题过程中注重对题目的分析。有些题目我们给出了多种解法或多种证法，这对于开拓读者的思路大有益处。

三、自成体系

本书虽然是配合上述教材所编写的，但它又自成体系，即使读者手中没有上述教材，也可以独立阅读。实际上，本书是将高等数学诸多内容进行了系统的分类，又对各类问题进行了全析全解。

四、内容翔实

本书覆盖面广、类型全，包含的题目类型有是非判断题、填空题、选择题、计算题、应用题和证明题等，给出的所有解答都力求清楚明白。

全书共含有 11 章。参加本书编写的有孙艳蕊、谢崇远、王学理、车向凯、付连魁、孔庆海、杨中兵、孙承志。全书由王学理、孔庆海统稿并担任主编。

本书适用于理工科院校的本科生，对于那些有志考研的学子亦不失为一本内容翔实的参考资料。本书亦可作为高等数学任课教师的教学参考书。

我们衷心希望学生先自己动手做题，然后再阅读本书，不可用它来“抄作业”。如果本书能为学生们的学习带来有益的帮助，那正是我们的希望。书中存在的不足之处，仍烦读者不吝赐教。

作　者

2005 年 9 月 28 日于东北大学

目　　录

第1章 函数与极限

习题1.2 函 数

1. 下列函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x^4}$.

【解】 相同. 因为$g(x)=\sqrt{x^4}=x^2$.

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$.

【解】 不同. 因为两个函数的定义域不同.

$f(x)$的定义域是$x>2$；$g(x)$的定义域是$x>2$或$x<1$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$.

【解】 要使$f(x)$有意义，必须有$\sin\dfrac{\pi}{x}>0$. 这时

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi,\ (k=0,1,2,\cdots)$$

或
$$-2k\pi<\frac{\pi}{x}<(-2k+1)\pi,\ (k=1,2,\cdots)$$

解得 $\{x|x>1\}\cup\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k},\ k=1,2,\cdots\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2k-1}<x<-\dfrac{1}{2k},\ k=1,2,\cdots\right\}$.

(2) $f(x)=(x-\lg x)\sqrt{\sin^2x-1}$.

【解】 要使$f(x)$有意义，必须有$x>0$且$\sin x=\pm1$，解得

$$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,1,2,\cdots\right\}.$$

3. 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，试求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$.

【解】 因为$f(x)$的定义域为$[0,1]$，所以要使$f(x^2)$有意义，须有$x^2\in[0,1]$，即$x\in[-1,1]$，这就是$f(x^2)$的定义域.

(2) $f(\sin2x)$.

【解】 因为$f(x)$的定义域为$[0,1]$，所以要使$f(\sin2x)$有意义，须有

$$0\leqslant\sin2x\leqslant1,$$

故定义域为
$$\left\{x\,\middle|\,k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\right\}.$$

4. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$的定义域.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$，所以要使$f[f(x)]$有意义，须有

$$1-x\neq0,\ 且\ x\neq0,$$

即 $x\neq 0,1$.

$f[f(x)]$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0,1\}$.

$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$，要使$f\{f[f(x)]\}$有意义，$f[f(x)]$必须有意义，因此$f\{f[f(x)]\}$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0,1\}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1,\\ |x|-2, & 1\leqslant |x|<3,\end{cases}$ 求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)<0,\\ 1, & g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

由 $g(x)$的表达式知，当$1\leqslant |x|<2$时，$g(x)<0$；当$|x|<1$或$2\leqslant |x|<3$时，$g(x)\geqslant 0$. 因此

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leqslant |x|<2,\\ 1, & |x|<1 \text{ 或 } 2\leqslant |x|<3;\end{cases} \qquad g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|<1,\\ |f(x)|-2, & 1\leqslant |f(x)|<3.\end{cases}$$

由$f(x)$的表达式知，当$x<0$时，$|f(x)|=0<1$；当$x\geqslant 0$时，$1\leqslant |f(x)|=1<3$. 因此

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0,\\ -1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 由$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$解得$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}\quad(0<y<1)$.

所求反函数$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$.

(2) $y=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -(1+x^2), & x<0.\end{cases}$

【解】 由$y=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$ 解得$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1.\end{cases}$

所求反函数$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1.\end{cases}$

7. 证明.

(1) 定义在(a,b)上的任意函数$f(x)$必能表示为一个非负函数和一个非正函数之和.

【证明】 设$f_1(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$.

显然$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$且$f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\leqslant 0$. 结论成立.

(2) 定义在(a,b)上的任意函数$f(x)$必能表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

【证明】 设$f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，则$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，且

$f_1(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x)$，即$f_1(x)$为偶函数；

$f_2(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-f_2(x)$，即$f_2(x)$为奇函数.

因此，结论成立.

8. 已知某一天波士顿的水平面在午夜12点恰处于高潮位，水平面的高度在高潮位时达到3.01m，在低潮位时为0.01m，设下一个高潮位恰在12小时以后，且水平面的高度由余弦曲线给出，求出以波士顿

的水平面作为时间函数的表达式.

【解】 设 t 时刻水平高度为 ym，从午夜12点开始计时，此时$t=0$. 根据题意，有

$$y=A+A_0\cos\omega t. \tag{1}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，且 $\cos\omega t=1$ 时，$y=3.01$，$\cos\omega t=-1$ 时，$y=0.01$. 代入(1)式有

$$\begin{cases}3.01=A+A_0,\\0.01=A-A_0,\end{cases}$$

解得 $A=1.51$，$A_0=1.5$.

因此，所求函数表达式为 $y=1.51+1.5\cos\frac{\pi}{6}t$.

9. 某运输公司规定货物的运价：在距离 a（单位：km）内为 k（单位：元/km）；超过 a，超出部分为 $0.8k$. 求运价 y 和里程 s 之间的函数关系.

【解】 $y=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a,\\ka+0.8k(s-a), & s>a.\end{cases}$

习题1.3 极 限

1. 观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限. 如果有极限，指出它们的极限.

(1) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$.

【解】 随着 n 的增大，$|x_n|$无限趋于零，从而 x_n 也无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0.$$

(2) $x_n=1+(-1)^n\frac{2}{n}$.

【解】 由题(1)知，随着 n 的增大，$(-1)^n\frac{2}{n}$无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{2}{n}\right]=1.$$

(3) $x_n=(-1)^n\sin\frac{1}{n}$.

【解】 随着 n 的增大，$\frac{1}{n}$无限趋于零，$\sin\frac{1}{n}$也无限趋于零，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}=0.$$

(4) $x_n=\cos n\pi$.

【解】 $x_n=(-1)^n$，1 和 -1 交替出现，所以该数列的极限不存在.

(5) $x_n=2^{(-1)^n}$.

【解】 $x_{2k}=2$，$x_{2k-1}=\frac{1}{2}$，所以该数列的极限不存在.

(6) $x_n=\arctan n$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$.

2. 用极限定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n个})=1$.

【证明】 (1) 记 $x_n=0.\overbrace{99\cdots9}^{n个}=1-10^{-n}$，$|x_n-1|=\frac{1}{10^n}$.

$\forall 0<\varepsilon<1$，只要取 $N=[-\lg\varepsilon]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{10^n}<\varepsilon$，即 $|x_n-1|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n个})=1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

【证明】 记 $x_n=\frac{n}{2n+1}$，$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$.

【证明】 记 $x_n=\frac{n}{n^2+1}$，$|x_n-0|=\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而 $|x_n-0|<\varepsilon$，由数列极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

【证明】 $|\cos x-\cos a|=\left|-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$.

因为对任意角度 α，当 $\alpha\neq0$ 时，有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$，所以

$$|\cos x-\cos a|\leqslant2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<|x-a|.$$

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|\cos x-\cos a|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3. 在 x_0 的某个去心邻域内，$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，问是否有 $a>0$?

【解】 由已知条件，必有 $a\geqslant0$. a 有可能等于0. 如取 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，对任何 x，$f(x)>0$. 取 $x_0=0$，由极限的定义可以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x^2}=0$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在?

【证明】 因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由数列极限的定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

而 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$，因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $||x_n|-|a||<\varepsilon$，由数列极限的定义有，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在. 如 $x_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，数列 $\{y_n\}$ 有界，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

【证明】 因为数列 $\{y_n\}$ 有界，则 $\exists M>0$，对任意自然数 n，有 $|y_n|\leqslant M$.
又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，由极限定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，有

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$|x_ny_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 设 $x_n=2^{(-1)^n n}$，讨论数列$\{x_n\}$的收敛性.

【解】 取子列$\{x_{2k}\}$，$x_{2k}=2^{2k}$，显然$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=+\infty$. 因此，数列$\{x_n\}$发散.

7. 证明.

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$

【证明】 $\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=|\sqrt{x}-1|=\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|\leqslant|x-1|.$

$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-1|<\delta$时，有$\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1.$

【证明】 考虑$x\to0$时函数的极限，不妨设$0<|x|<1$，则

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}-1\right|=\left|\frac{-2x^2}{1+x^2}\right|<2|x|.$$

$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<|x-0|<\delta$时，有$\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1.$

8. 设$f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$，求$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$. 试问$\lim\limits_{x\to1}f(x)$是否存在？

【解】 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{1-x}=-1$， $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

9. 给出极限$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$的精确定义.

【解】 设$\exists X_0>0$，当$x<-X_0$时函数$f(x)$有定义. 如果$\forall M>0$(无论多么大)，总$\exists X>X_0>0$，当$x<-X$时，恒有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$为$x\to-\infty$时的无穷大，即

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$$

10. 试证函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$内无界，但当$x\to0^+$时函数不是无穷大.

【证明】 $\forall M>0$，取自然数n，使$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，记$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则$x_n\in(0,1)$且

$$f(x_n)=\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

因此，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$内无界.

下面证明当$x\to0^+$时该函数不是无穷大.

取$x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}>0$，$n=1,2,\cdots$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$，但$f(x'_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此，当$x\to0^+$时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大.

11. 对于数列$\{x_n\}$，如果$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【证明】 因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，则由极限的定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当$k>N_1$时，

$$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon.$$

同理，由$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$有，对上述$\varepsilon$，$\exists N_2\in\mathbf{N}^*$，当$k>N_2$时，

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$，则对上述ε，当$n>N$时有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. 试证在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

【证明】 以 $x\to x_0$ 时的情形为例. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$，根据无穷大的定义，取 $M=\frac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon}.$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$.

$\forall M>0$，根据无穷小的定义，取 $\varepsilon=\frac{1}{M}$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M}.$$

由于 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M.$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大.

同理可证 $x\to\infty$ 时的情形.

13. 试证数列 $x_n=n^{(-1)^n}$ 无界.

【证明】 $\forall M>0$，总可取 $n=2[M+1]$，$x_n=2[M+1]>M$，因此，数列 $x_n=n^{(-1)^n}$ 无界.

习题 1.4 极限的运算

1. 回答下列问题.

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，数列 $\{x_n+y_n\}$ 以及数列 $\{x_ny_n\}$ 的敛散性如何？

【解】 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 一定发散. 否则，如果 $\{x_n+y_n\}$ 收敛，因 $y_n=(x_n+y_n)-x_n$，根据极限运算法则 $\{y_n\}$ 收敛.

$\{x_ny_n\}$ 可能收敛也可能发散.

例如取 $x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=(-1)^n$，$\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，而 $x_ny_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

如取 $x_n=\frac{n}{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，但 $x_ny_n=\frac{(-1)^nn}{n+1}$ 发散.

(2) 在自变量的某个变化过程中，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均无极限，问 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$ 是否必无极限？

【解】 $f(x)+g(x)$ 可能有极限，也可能没有极限. 例如 $f(x)=x$，$g(x)=2x+1$. 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)=\infty$；若 $f(x)=\frac{1}{x-1}+1$，$g(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=1$.

$f(x)\cdot g(x)$ 可能有极限，也可能没有极限. 例如，$f(x)=\frac{|x|}{x}$，$g(x)=\frac{x}{|x|}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 均不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=1$；再如 $\lim\limits_{x\to\infty}x$，$\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)$ 均不存在，$\lim\limits_{x\to\infty}x(x+1)$ 也不存在.

(3) 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，问$f(x)$是否一定有界？

【解】 $f(x)$不一定有界. 如取$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 但当$x\to0$时，$f(x)\to\infty$，从而$f(x)$无界.

(4) 两个无穷大之和是否仍为无穷大？

【解】 不一定. 例如，取$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$，$g(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2-1}=-2$.

(5) 两个无穷大之差是否为无穷小？

【解】 不一定. 例如，取$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{2}{x}$.

显然$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\infty$，而$\lim\limits_{x\to0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x}=\infty$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{1+2}{1^2+1+1}=1$.

(4) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

【解】 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2hx+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

【解】
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(1+k)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x-1}+1)=2$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{x}\right)$.