

高中代数

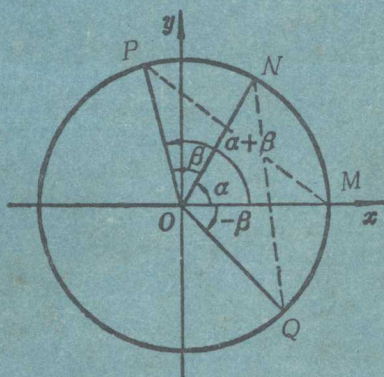
典型题例解与习题精选

主 编

孙海正 黄明华

编 者

孙海正 黄明华 阎延坤 于永泉



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

吉林人民出版社

号10字登报 (吉)

高中代数

典型题例解与习题精选

主 编

孙海正 黄明华

编 者

孙海正 黄明华 阎延坤 于永泉

高中代数

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

吉林人民出版社

(吉)新登字01号

高中代数 典型题例解与习题精选

主编

李树黄 王敬怀

参编

李树黄 王敬怀 李树黄 王敬怀

高中代数 典型题例解与习题精选

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市第九印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 17印张 376 000字

1994年2月第1版 1994年2月第1次印刷

印数：1—6000册

ISBN 7-206-01985-4

G·421 定价：10.60元

前 言

“高中代数典型题例解与习题精选”、“高中几何典型题例解与习题精选”与高中数学现行课本配套同步，紧扣数学教学大纲，跟踪高考信息，不仅是高中各年级学生的良师益友，也适用于高考复习之用，也是中学数学教师必备的教学参考书。

本书以单元为基础编写，每单元分：基础知识提要；典型题例解；习题精选；习题答案四个部分。按课本知识顺序，同步深入，密切配合，恰当扩展，巩固提高。

基础知识提要 做为单元主要内容的概括与总结，突出重点、突出基本方法，使知识与方法一目了然。

典型题例解 依据本单元的教学要求，本着注重基础知识和基本技能，本着多方位、多角度突出重点和难点，编者多年实践中经过测试、筛选、比较精选了各单元典型例题。通过典型例题，落实基础知识，揭示解题方法、技巧，归纳总结解题规律，提出注意的问题。帮助学生掌握优良的学习方法，提高分析问题水平，扩展解题思路，培养举一反三能力。

习题精选 根据单元教学要求，根据高考试题特点，每单元都配有习题精选，实质是各单元内容的进一步落实与强化，也是留给学生的自测题，习题精选具有典型性、代表性、新颖性，覆盖面广。

习题答案 为便于学生自我学习,自我检查,自我验收,也便于各种不同程度的同学的需要,每个习题都配有答案或提示,对于较易习题配有提示,对于中下等难度以上的习题都给出略解或详解。

本书具有很强的实用性。

本书是全国重点中学东北师大附中及吉林省实验中学、长春市实验中学几位在教学第一线的具有丰富实践经验和著述的中学特级、高级教师编写,集三校经验与长处于一体,并吸取了全国重点中学交流试题中优秀习题。在此表示感谢。

对于本书存在的问题或不足之处,敬请读者批评指正。

编者

1994年二月于东北师大附中

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

- 一 集合..... (1)
- 二 映射、函数、函数的定义域、值域和图象..... (12)
- 三 函数的单调性与奇偶数..... (26)
- 四 反函数..... (39)
- 五 幂函数、指数函数和对数函数..... (45)
- 六 指数方程、对数方程..... (67)

第二章 三角函数

- 一 任意角的三角函数..... (81)
- 二 三角函数的图象和性质..... (98)

第三章 两角和与差的三角函数

- 一 两角和与差的三角函数..... (123)
- 二 二倍角的正弦、余弦、正切..... (143)
- 三 三角函数的积化和差与和差化积..... (165)

第四章 反三角函数与简单三角方程

- 一 反三角函数..... (186)
- 二 简单三角方程..... (202)

第五章 不等式

- 一 不等式的性质..... (219)
- 二 不等式的解法..... (228)

三	证明不等式	(251)
四	函数的最大值、最小值问题	(281)

第六章 数列、极限、数学归纳法

一	等差数列	(302)
二	等比数列	(319)
三	数列的极限	(335)
四	数学归纳法	(354)
五	求数列通项	(370)

第七章 复数

一	复数的概念	(391)
二	复数的代数式运算	(401)
三	复数的三角形式及运算	(418)
四	复数的乘方与开方	(437)
五	在复数集上解方程	(456)

第八章 排列、组合、二项式定理

一	两个原理	(474)
二	排列、组合应用问题	(482)
三	二项式定理	(495)

第九章 综合练习

习题一	(506)
习题二	(509)
习题三	(513)
习题四	(516)
习题答案	(521)

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

一 集 合

基础知识提要

1. 集合的意义 一组对象的全体称为一个集合。构成集合的对象叫集合的元素，集合的元素应是确定的、互异的。

2. 集合的表示方法 (1) 列举法；(2) 描述法。

3. 集合的(包含)关系

子集 对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A \text{)}$$

真子集 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A \text{)}.$$

相等 集合 A 、 B ，如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，则称 $A = B$ 。

4. 集合的运算

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 、 B 的交集，记作 $A \cap B$ ，即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$ 。

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 、 B 的并集，记作 $A \cup B$ ，即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$ 。

或 $x \in B$ }.

补集 已知全集 I , 集合 $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在集合 I 中的补集, 记作 $\bar{A}$.

即 $\bar{A} = \{x | x \in I, \text{且} x \notin A\}$.

集合运算的性质

1. 交换律 $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

2. 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3. 分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. 德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

典型题例解

1. 集合的概念

例1 以下各条是否分别确定了一个集合.

(1) 某一班中身材高大的学生全体.

(2) 某一班戴眼镜的学生全体.

(3) 某一班中家住学校附近的学生全体.

(4) 某一班中住校学生的全体.

(5) 某一班中住高楼学生的全体.

解: (1) 中“身材高大”标准不明确, 某一学生是否是高大的可能断定不下来, 因此不都认为是集合. 同样(3)、(5)中标准也是不明确的, 也不能认为是集合. (2)、(4)的对象是确定的, 所以是集合.

例 2 下列各条是否可以是一个集合.

(1) 接近于 0 的数的全体.

(2) 比较小的正整数全体.

(3) 平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体.

(4) 正三角形的全体.

(5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

解: “接近于 0 的数”、“比较小的正整数”标准不明确, 所以 (1)、(2) 不是集合. 同样, “ $\sqrt{2}$ 的近似值”也不明确精确到什么程度, 因此很难判定一个数, 比如 2, 是不是它的近似值, 所以也不是一个集合. (3)、(4) 是一个集合.

小结 集合的元素必需是确定的, 即能明确指出某一对象属于它或不属于它.

2. 集合的关系

例 3 若集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, $B \subset A$, 求 m 的值.

解: $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$.

$\because B \subset A, \therefore mx + 1 = 0$ 的解为 -3 或 2 或 $\emptyset$.

当 $mx + 1 = 0$ 的解为 -3 时, 由 $m \cdot (-3) + 1 = 0$, 得 $m = \frac{1}{3}$;

当 $mx + 1 = 0$ 的解为 2 时, 由 $m \cdot 2 + 1 = 0$, 得 $m = -\frac{1}{2}$;

当 $mx + 1 = 0$ 的解为 $\emptyset$ 时, $m = 0$

综上所述, $m = \frac{1}{3}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 0$.

注意 B 可以是空集.

例4 求满足条件, $\{x|x^2+1=0, x\in R\}\subset M\subseteq\{x|x^2-1=0, x\in R\}$ 的集合 M 的个数.

分析: M 是集合 $\{x|x^2-1=0, x\in R\}$ 的子集; 又 $\{x|x^2+1=0, x\in R\}$ 是空集, 它是 M 的真子集, 所以 M 不是空集. 所以问题归结为求 $\{x|x^2-1=0, x\in R\}$ 非空子集的个数.

解: $\{x|x^2-1=0, x\in R\}=\{-1, 1\}$, 其非空子集为 $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$. 所以满足条件 $\{x|x^2+1=0, x\in R\}\subset M\subseteq\{x|x^2-1=0\}$ 的集合 M 共 3 个.

例5 设集合 $A=\{1, 2\}$, 集合 $B=\{x|x\subseteq A\}$, 用列举法写出 B , 并指出集合 A 与集合 B 的关系.

分析: 集合 B 的元素是集合 A 的子集, 问题归结为写出集合 A 的所有子集.

解: A 的子集为 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\emptyset$.

$\therefore B=\{x|x\subseteq A\}$

$=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}.$

集合 A 是集合 B 的一个元素, $\therefore A$ 与 B 的关系是 $A\in B$.

小结 注意集合元素的多样性, 集合的元素也可以是一个集合. 本题中, A 集合的元素是数, B 集合的元素是由数组成的集合.

例6 集合 $X=\{x|x=2n+1, n\in Z\}$, $Y=\{z|z=4k\pm 1, k\in Z\}$, 试证明 $X=Y$.

分析: 要证明 $X=Y$, 按集合相等的定义, 应证明 $X\subseteq Y$, 且 $Y\subseteq X$.

证明: 设 $x_0\in X$, 则 $x_0=2n_0+1, n_0\in Z$.

①若 n_0 是偶数, 可设 $n_0 = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. 则 $x_0 = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1$, $\therefore x_0 \in Y$

②若 n_0 是奇数, 可设 $n_0 = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$. 则 $x_0 = 2(2m - 1) + 1 = 4m - 1$, $\therefore x_0 \in Y$,

$\therefore$ 不论 n_0 是偶数还是奇数, 都有 $x_0 \in Y$.

$\therefore X \subseteq Y \dots \dots (1)$

又 设 $y_0 \in Y$, 则 $y_0 = 4k_0 + 1$ 或 $y_0 = 4k_0 - 1$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

$\therefore y_0 = 4k_0 + 1 = 2(2k_0) + 1$,

$y_0 = 4k_0 - 1 = 2(2k_0 - 1) + 1$,

$2k_0$ 和 $2k_0 - 1$ 都属于 $\mathbb{Z}$,

$\therefore y_0 \in X$.

$\therefore Y \subseteq X \dots \dots (2)$

由(1)、(2) $X = Y$.

小结 证明两集合相等, 主要是根据集合相等的定义. 同时要注意怎样证明一个集合是另一个集合的子集.

3. 集合的运算

例 7 已知 $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{n | n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \left\{n | \frac{n}{3} \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 20\right\}$, $D =$

$\{n | n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 全集 $I = \mathbb{N}$.

求: (1) $A \cup B$; (2) $B \cap C$ 和 $C \cap D$; (3) $(\overline{A} \cap B) \cup D$.

解: 为明确起见, 先将 B 、 C 、 D 用列举法写出:

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,

$D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

(2) $B \cap C = \{3, 9\}$; $C \cap D = \emptyset$.

$$(3) \overline{A} \cap B = \{3, 7, 9\},$$

$$\therefore (\overline{A} \cap B) \cup D = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 16, 32\}.$$

例8 全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$, $C = \{4, 7\}$.

求: (1) $\overline{A} \cap \overline{B}$; (2) $\overline{A} \cup \overline{B}$; (3) $A \cap (B \cup C)$.

解: (1) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{4, 6, 8, 9, 10\}$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$(3) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5, 7\}$$

小结 有时利用集合运算的性质, 可以使集合运算的过程简化.

例9 设 $A = \{\text{过点 } M \text{ 的圆}\}$, $B = \{\text{过点 } N \text{ 的圆}\}$, 说明

$\overline{A \cup B}$ 是一个什么样的集合.

解: $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$,

$\therefore \overline{A \cup B} = \{\text{过点 } M \text{ 且过点 } N \text{ 的圆}\}.$

例10 $M = \{1, 3, t\}$, $N = \{t^2 - t + 1\}$, 若 $M \cup N = M$, 求 t 的值.

分析: 由 $M \cup N = M$, 可知 N 是 M 的子集, 所以 N 的元素可能是 1, 3 或 t . 即 $t^2 - t + 1$ 可以是 1, 3 或 t , 从而可以解出 t .

解: $\because M \cup N = M, \therefore N \subseteq M$.

$$\therefore t^2 - t + 1 = 1 \cdots \cdots ①$$

$$\text{或 } t^2 - t + 1 = 3 \cdots \cdots ②$$

$$\text{或 } t^2 - t + 1 = t \cdots \cdots ③$$

由①得 $t = 0$ 或 $t = 1$; 由②得 $t = 2$ 或 $t = -1$;

由③得 $t = 1$.

但由集合 M 的元素的互异性, $t \neq 1$.

$\therefore t = 0, t = -1$ 或 $t = 2$.

例11 $A = \{x | x^2 - ax - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 当 a 为何值时, $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

解: $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$,

$C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\} = \{-4, 2\}$.

$\therefore A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore A$ 中必须有 2 或 3,

又 $\because A \cap C = \emptyset$, $\therefore A$ 中没有 2.

故 A 中必有元素 3.

将 $x = 3$ 代入 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 中, 得

$$3^2 - 3a + a^2 - 19 = 0. \quad \text{即}$$

$$a^2 - 3a - 10 = 0.$$

$\therefore a = -2$ 或 $a = 5$.

当 $a = -2$ 时, $A = \{3, -5\}$, 符合条件.

当 $a = 5$ 时, $A = \{3, 2\}$, 与 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾, $\therefore a = 5$ 舍去.

小结 $a = -2$ 时, $A \cap B \neq \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

小结 $a = -2$, $a = 5$ 只能保证 A 中有一个元素是 3, 另一个元素是什么, 还不清楚, 因此应当检验是否满足条件 $A \cap C = \emptyset$.

例12 已知 $A = \{x | x^2 - ax \leq x - a, a \in R\}$, $B = \{x | 2 \leq x + 1 \leq 4\}$, 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

解: $\because B = \{x | 2 \leq x + 1 \leq 4\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,

又 $\because A = \{x | x^2 - ax \leq x - a\}$

$$(\Leftrightarrow \{x | x^2 - (a+1)x + a\} \leq 0)$$

$$= \{x | (x-1)(x+a) \leq 0\}, \text{ 则 } M \text{ 合集由图}$$

即 A 集合是以 $1, a$ 为端点的闭区间. $\therefore 1 \leq a \leq 3$

若 $A \cup B = B$, 则 $1 \leq a \leq 3$. $\therefore x \in B$ 时, $(0-x)(x-3) \leq 0$, $\therefore 0 \leq x \leq 3$. $\therefore A \cup B = B$ 时, $1 \leq a \leq 3$.

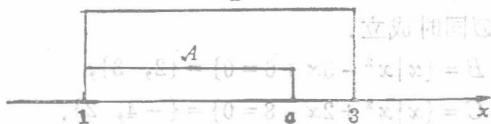


图 1-1

小结 这类问题归结为两个区间之间的关系, 为便于讨论这种关系, 可画数轴帮助思考. 这类问题还要特别注意端点是否属于所求的范围.

习题精选

(一) 选择题

1. 设 $A = \{x | x \leq 20\}$, $\{a = 13\}$, 下列论断正确的是
(A) $a \subset A$ (B) $a \notin A$ (C) $\{a\} \in A$ (D) $\{a\} \subset A$
2. 如果 $A = \{x | (x+3)(3-x) > 0\}$, 下列论断正确的是
(A) $0 \subset A$ (B) $\{0\} \in A$ (C) $\{0\} \subset A$ (D) $\emptyset \in A$
3. 满足条件 $\{1, 3\} \cup B = \{1, 3, 5\}$ 的所有集合 B 的个数是
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 非空集合, $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 若 $a \in A$, 则 $6-a \in A$. 满足上述条件的集合 A 的个数是

- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 7

5. 设全集 $I = R$, $A = \left\{ x \mid -4 < x < -\frac{1}{2} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x \leq -4 \right\}$, $C = \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{2} \right\}$, 则 C 是

(A) $A \cap B$

(B) $A \cup B$

(C) $\overline{A \cap B}$

(D) $\overline{A \cup B}$

6. $M = \left\{ x \mid x = n, n \in Z \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = \frac{n}{2}, n \in Z \right\}$

$P = \left\{ x \mid x = n + \frac{1}{2}, n \in Z \right\}$, 下列各式中正确的是

(A) $N \subset M$

(B) $N \subset P$

(C) $N = M \cup P$

(D) $N = M \cap P$

(三) 填空题

7. 设含有 4 个元素的集合的全部子集为 S , 其中由 3 个元素组成的子集为 T , 则 $\frac{T}{S}$ 的值为_____.

8. 以集合 $S = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ 的所有子集为元素的集合是_____.

9. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是正整数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. 若, 且 $A \cap B = \{a, a_4\}$, $a_1 + a_4 = 10$, 且 $A \cap B$ 的元素的和为 224, 则 $a_4 =$ _____, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 =$ _____.

10. 集合 $A = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$ 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

(三) 解答题

11. 已知集合 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 若 $M = N$, 求 x, y 的值

12. 已知集合 $M = \{x | x - a | < 1\}$, $N = \{x | x^2 - (a+3)x + 3a > 0\}$, $a \in R$. 若 $M \cup N = R$, 求 a 的值.

习题答案

1. D

2. C $(x+3)(3-x) < 0$, $(x+3)(x-3) < 0$,

$\therefore A = \{x | -3 < x < 3\}$, $\therefore 0 \in A$. $\therefore \{0\} \subset A$.

3. C B 是 $\{1, 3, 5\}$ 的子集, 并且必需含有元素 5.

$\therefore B$ 可以是 $\{5\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$.

4. D A 可以是 $\{3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 3\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. D 画数轴帮助解.

6. C 搞清各集合的元素.

7. $\frac{1}{4}$ 含有 4 个元素的集合的全部子集为 16., 其中
由 3 个元素组成的子集为 4 个.

8. $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cup \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}, \phi\}$ 注意有 8 个元素.

$a_1 = 9$; $a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 142$

$\therefore 1 \leq a_1 \leq a_1^2 < a_2^2 \cdots < a_{11}^2$, $a_1 \in B$, 所以只能 $a_1 = a_1^2$,
从而 $a_1 = 1$. $\therefore a_4 = 9$. $\therefore A \cup B$ 的元素的和为 224,
 $\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 224$. $\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 224 - 1^2 - 9^2 = 142$.