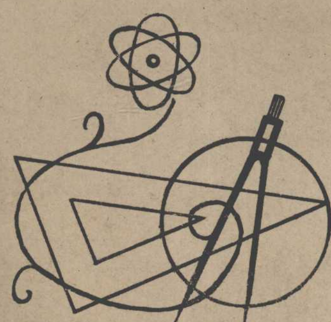
中
学数学问题解法探讨

（函授教育内部参攷资料）



庆师范学院数学系函授组编

1979年3月

第　一　章

顺推法与逆推法的结合——发现解法的主要思考方法

正确的（即有成效的）寻找解答的思考方法，不可避免地既要考虑到结论的需要，又要充分利用条件所能提供的可能性，即既是有的放矢，又是从实际出发这两个方面的恰当的结合，这一章，我们将详细论述这种寻找解答的思考方法的正确性。

一、证题的准备工作

证题之前，应该作一定的准备工作，这种准备工作的好坏，对于找出证明的效率有密切的联系。因此，研究怎样找出证明，首先必须研究证明的准备工作。下面介绍三种准备工作：

1. 全面掌握题意，即把题目的全部意思弄清楚。懂得每一个词，每一项关系，并且分辨出那几项是条件，那几项是结论。比如，题目若是「设H是△ABC的垂心，AP是△ABC的外接圆直径，那末PH被BC所平分」首先就必须理解“垂心”、“外接圆”、“直径”这几个名词以及术语“PH被BC所平分”的意义，同时也理解“那末”以前是条件，而以后是结论。

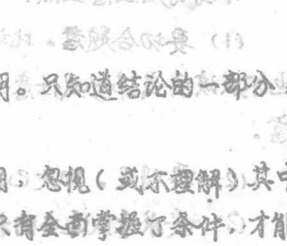
这样作的必要性是很明白的。因为：

(1) 如果不知道到底要证明什么，就谈不上应该怎样证明。只知道结论的一部分，势必要漏掉结论的其余部分，可见一定要全面地掌握结论。

(2) 在一般情况下，题目的条件的每一项※对证明都有作用，忽视（或不理解）其中任何一项，有时就无法找到证明（因为不存在这种证明）。可见只有全面掌握了条件，才能找出证明。

理解题意不能只限于字面，而要深一些更好。比如题目要求证明某个四边形能外切于一圆，实际却是要求证明四角的平分线交于一点；题目要求证明三点在一条直线上，实际却是要求中间一点与两旁二点的连线所成角是180°。要求证明$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，可以证明$\alpha$的正弦函数等于$\beta$的余弦函数，或$\sin(\alpha+\beta)=1$。

2. 精确地作出图形。对于一些题目来说，这不仅是切实掌握题意的必不可少的措施，也能引导我们发现解法的某些途径，以前举的题目为例，在我们作出了右边的图形之后，它不仅说明：



$$PM=HM$$

而且还说明：

$$BM=CM$$

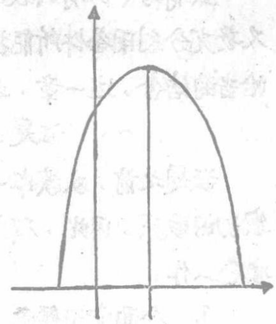
※ 有些题目，有不必要的条件，这样的条件，在全面地运用条件与结论以发现证明的过程中，是可以发现的。

BPCH是平行四边形.

这些，对我们找出证明显然是很有益的启示。

当题目不易作出准确的图形时，它的示意图对解题也有一定的帮助。

如：已知x_1、x_2是两个不相等的整数，它们能使函数 $y=1979-x^2+14x$ 取相等的值，求x_1、x_2的关系。



右边的示意图，说明这个函数的图形是一条抛物线，它的对称轴是$x=7$，使这函数取相等的值的x_1、x_2，实质上即是每一对对称点的横坐标，它们的中点必在$x=7$上，即$\frac{x_1+x_2}{2}=7$，或者$x_1+x_2=14$，这即是不相等的数x_1、x_2的关系。

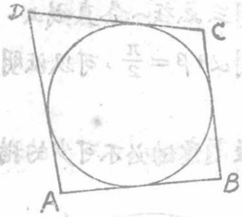
撇开图形空想，找到证明的效果必会降低，图形不准确还会引起错觉，有些学生画图马虎，甚至完全不使用规尺，以为节约了时间，不知这样作，会降低工作效果，刚好是浪费时间。

作图时应注意三点：

（1）要切合题意。比如题目中的条件若是平行四边形，就不应该画成矩形，菱形，也不应该画成梯形或任意四边形，为了切合题意，也就必须准确，不准确必然不切合题意。

（2）要明显。即是已知条件与求证结论都必须看清楚。不要看不清楚（如挤成一团）。

（3）要求采取适当的程序，从理论上讲，只要按题意作图就行，但事实上由于仪器的准确性有一定的限制，就必须考虑程序。比如作题目“已知一个四边形的一对对边的和等于另一对对边的和，那么这个四边形必能外切于一圆”的正确作图程序应该是：



（1）先作任意的⊙O；

（2）作与⊙O相切的任意的四边形ABCD。

而不应该是：

（1）作一个一对对边的和等于另一对对边的和的四边形；

（2）作这个四边形的内切圆。

后者虽然在理论上说得过去，但实际作起来不但比较麻烦，并且由于需要多次使用直尺和圆规，反而不易作到准确。※

※ 具体作法如下：（1）作任意一线段MN；

（2）在MN上任意取两点P、Q；

（3）任意作一线段AB使等于MP；（转下页）

尽管作图时允许颠倒已知和求证，但证明时是不允许的。

必须注意的是：

为了使图形更有助于思考，往往要引辅助线，关于怎样引辅助线的问题，将在后面谈到。

3. 写出"已知"、"求证"。那是尽可能将已知条件和结论用数学语言、符号表示出来。如题是："若夹三角形的一条中线的两边不相等，那么这条中线与大的一边的夹角小于它与小边的夹角"，即应写成：

已知：在ΔABC中，$AB>AC$，$BM=CM$

求证：$\angle BAM<\angle CAM$.

这样作的目的，是对题目的一般性内容给以具体意义。因为证明总得对一个具体对象进行，这与认识由特殊到一般的规律正相一致。

对于条件与结论已经用数学语言明白表示出来的题目，就没有再写"已知"、"求证"的必要了。

习　题　一

1. 什么原因使我们深信一个边长是几千公里的三角形的三内角之和也是$180°$？
2. 你碰到过在证明当中用想象力的情况吗？能不能举一个例子？

作出下列题目的准备工作和作出图形：

3. 若四边形对角相补，那么它必能内接于一个圆。
4. 等腰三角形底边上任意一点与两腰的距离的和等于它的腰上的高。
5. 一直线与二平行直线相交，所成一对同旁内角的平分线必互相垂直。
6. 二个三角形若有两边相等而夹角不等，那么夹角大的，第三边必大。
7. 说出第三题的作图程序。

二、　用顺推法寻找解答

在证题的准备工作中已经作好时，必须解决的问题即是怎样找出证明。为此，这里介绍顺推法，它是找到证明的常用的方法之一。

2.1 什么是顺推法？顺推法即是由条件出发，逐步向前推证，使推证的最后结论即

※（接上页）(4) 分别以A、B为心，PQ和Na作半径作二个弧a、b，

(5) 以弧b上取适当的点C为圆心、NP为半径作弧f，使它与弧Q相交，令这交点为D，联结BC、CD、DA；

(6) 作∠A、∠B的平分线，设它们的交点是I，由I作AB的距离IE；

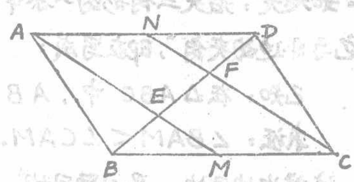
(7) 以I为心，IE为半径作圆。

是题目的结论的方法。中学常见的证明，绝大部分都是用的顺推法。

当条件有几项时，逐一找出它们的一系列综合性的过渡结论，最后证明所求证的结论。当条件比较复杂时，必须进行变形成为比较简单的形式，然后与其它条件配合作出求证的结论，这样作都是顺推法，为了说明它的特点举以下各例。

例1. 设ABCD为平行四边形，M、N分别为BC、AD的中点，AM、CN分别交于BD于E、F，

求证：$BE=EF=FD$.



思考过程

由ABCD是平行四边形可知

$$AD \parallel CB \qquad AD=CB$$

把这二项推论与M、N分别是BC、AD中点结合起来，可知：

$$AN \parallel CM \qquad AN=CM$$

因而产生了新的平行四边形AMCN和它的推论$AM \parallel CN$.

考察一下这项平行关系，对于证明：

$$BE=EF=FD$$

有无作用：即可发现把它与条件：$BM=CM$

结合起来，就得到：$BE=EF$

把它与条件：$AN=DN$

结合起来，就得到：$EF=FD$

思考过程结束。以上思考过程，可用下表表示：

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} BM=BC \\ AN=DN \\ ABCD是▱ \Longrightarrow AD=CB \end{array}\right\} \Longrightarrow AN=MC \\ \qquad\qquad\qquad \searrow AD \parallel CB \Longrightarrow AN \parallel CM \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} CM=BM \\ AMCN是▱ \Longrightarrow AM \parallel CN \end{array}\right\} \Longrightarrow BE=EF \\ \left.\begin{array}{r} DN=AN \end{array}\right\} \Longrightarrow EF=FD \end{array}\right\} \Longrightarrow BE=EF=FD$$

$\Longrightarrow$表示“推得”，　}表示“结合”

很可能有人要问，为什么由ABCD是平行四边形出发，只作一项推论

$$AB=CD \qquad AB \parallel CD$$

而不作其它推论，如：

(1) $AD \parallel BC$，　$AD=BC$

(2) 对角相等，

(3) 邻角相补，

(4) 对角线互相平分。

回答这个问题是容易的，所有上述这些推论都与另外的两项条件：

$AM=BM \qquad CN=DN$

没有关系，因而不能使它们与这二项条件结合起来产生新的过渡性的结论——向求证靠拢的过渡性结论。因之，必须抛弃它们而仅仅使用：

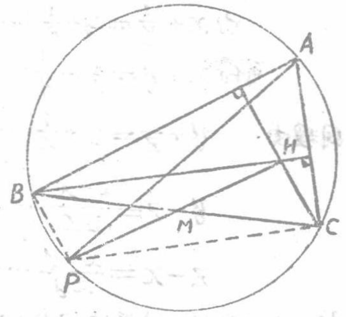
$AB=CD \qquad AB \parallel CD$

这两项能够与另外的二项条件结合的推论使"顺推"得以顺利地推下去，否则，顺推就要中断，证明就找不出来。

有的同志可能要问，这个证明是否一气呵成？我们这里介绍的问题是：这个题目的正确的思考过程。即每一个同志在经过对于这个题目的"做题"工作（其间不可避免地走一定程度不同的弯路）之后，会总结出这样的思考过程，至少不会不理解这样的思考过程，我们决没有认为每个同志都会不经过锻炼甚至不经过思考就产生这样的思考过程，这个题目如此，其它的题目莫不如此。

例2. 设H是△ABC的垂心，AP是△ABC的外接圆的直径。

求证：HP被BC所平分。



思考过程：(1) 图形提供了感性认识。

PH、BC互相平分，应该从理论上证明$BPCH$是平行四边形。

(2) 由于H是垂心，必得：

$BH \perp AC$（垂心定义），

又AP是直径，必得：

$PC \perp AC$（半圆所对圆周角是直角），

所以$BH \parallel PC$.（垂直于同一直线的二直线必平行），

同理$CH \parallel PB$.

(3) 所以$BPCH$是一个平行四边形（定义）从而PH被BC平分（平行四边形对角线互相平分）。

这个思考过程，可用下表说明：

$$\left.\begin{array}{l}\text{H是垂心} \Longrightarrow BA \perp AC \\ \text{AP是直径} \Longrightarrow PC \perp AC\end{array}\right\} \Longrightarrow BH \parallel PC$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{H是垂心} \Longrightarrow CH \perp AB \\ \text{AP是直径} \Longrightarrow PB \perp AB\end{array}\right\} \Longrightarrow CH \parallel PB$$

$$\left.\begin{array}{l}BH \parallel PC \\ CH \parallel PB\end{array}\right\} \Longrightarrow BPCH\text{是平行四边形} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow PM=MH$$

为什么不用H是垂心，作出AH⊥BC的推论？因为在这个题目，B与C居于对等地位，关于B引出的结论，通过同理可证，即可引出关于C的类似结论，而A与B不居于对等地位，（直径以A为端点，不以B、C为端点）不能把关于A的结论推广到A上，（用AH⊥BC也可得到这个题目的解答，但要麻烦一些）。

为什么不由H是垂心作出其它推论如

B、C、P、E共圆？

因为这个推论与"AP是直径"（或其推论）关系不明显，不便于与"AP是直径"结合起来产生新的过渡性结论，而我们却很需要这种结合，以其产生的过渡性结论。

例3. 已知 $x.y.z$ 为互不相等的实数

并且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

求证：$x^2y^2z^2=1$

注意到 x、y、z 互不相等，它们的差都不为0，即能够做除数，因之，应该使用它的差：

$$x-y \quad y-z \quad z-x$$

来解决问题。

由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ …… (1)

可得 $x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$

同理由 $y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ …… 和 $z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}$ 分别得，

$$y-z=\frac{z-x}{zx} \cdots\cdots (2)$$

$$z-x=\frac{x-y}{xy} \cdots\cdots (3)$$

把 (1)(2)(3) 的两边相乘（这也是一种结合的形式）得，

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}$$

两边用 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除，即得：

$$\frac{1}{x^2y^2z^2}=1$$

思考过程可表示如下：

$$x.y.z\text{互不相等}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(1)\text{必须用差}\\ x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}\end{array}\right\}\Longrightarrow x-y=\frac{y-z}{yz}\\ \left.\begin{array}{l}(2)\text{必须用差}\\ y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}\end{array}\right\}\Longrightarrow y-z=\frac{z-x}{xz}\\ \left.\begin{array}{l}(3)\text{必须用差}\\ z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}\end{array}\right\}\Longrightarrow z-x=\frac{x-y}{xy}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{y-z}{yz}\\ y-z&=\frac{z-x}{zx}\\ z-x&=\frac{x-y}{xy}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}\Longrightarrow x^2y^2z^2=1$$

为什么不采用下面的方案：令

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$$

可得：

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=k\\ y+\dfrac{1}{z}=k\\ z+\dfrac{1}{x}=k\end{cases}$$

然后解这个方程组，求出 x、y、z 关于 k 的参数方程：

$$\begin{cases} x=f_1(k)\\ y=f_2(k)\\ z=f_3(k)\end{cases}$$

进而证明 $x^2y^2z^2=1$　因为所得方程组是一个三元二次方程组，解这样的方程组比较麻烦。这说明为什么不采取其它方案，这是题目告诉我们的。条件"x、y、z 互不相等"就向我们交了底："必须用差"。

例4. 设 x 为小于 $180°$ 的正角，解方程

$$16^{\cos^2x+2\sin^2x}+4^{2\cos^2x}=40\cdots\cdots A$$

解：考虑到两个指数中有两个三角函数 $\sin x$，$\cos x$，把它们化为一个问题就简化了。为此，把 $\cos^2x+2\sin^2x$ 化为 $2-\cos^2x$，这样原方程就化为：

$$16^{2-\cos^2x}+4^{2\cos^2x}=40\cdots\cdots A_1$$

这个方程有两个底数，化为一个，即：

$$16^{2-\cos^2x}+16^{\cos^2x}=40\cdots\cdots A_2$$

根据指数律，上式又可化为：

$$\frac{16^2}{16^{\cos^2x}}+16^{\cos^2x}=40\cdots\cdots A_3$$

由于 $16^{\cos^2x}\neq0$，用 $16^{\cos^2x}$ 乘上式得：

$$(16^{\cos^2x})^2+16^2=40(15^{\cos^2x})\cdots\cdots A_4$$

以$16^{\cos^2 x}$为未知数解上面的方程可得：

$$(16^{\cos^2 x}-32)(16^{\cos^2 x}-8)=0$$

$$\therefore 16^{\cos^2 x}=32,\quad 16^{\cos^2 x}=8 \cdots\cdots A_5$$

由于$\cos^2 x\leqslant 1$，$16^{\cos^2 x}=32$不能成立，

由A_5可得：

$$\cos^2 x=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots\cdots A_6$$

又已知 x为小于180°的正角，可知：

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \cdots\cdots A_7$$

思考过程示意表：

$$\left.\begin{matrix}A_1\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}A_2\\ \text{指数律}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}A_3\\ 16^{\cos^2 x}\neq 0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}A_4\\ \text{二次方程解法}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}A_5\\ \cos^2 x\leqslant 1\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}A_6\\ 0<x<180^\circ\end{matrix}\right\}\Longrightarrow A_7$$

有的同志会说，万一我不知道把

$16^{2-\cos^2 x}$化成：$\dfrac{16^2}{16^{\cos^2 x}}$

怎么办？这个问题不难理解，既然要化简（解方程本来要求逐步化简）而把

$16^{2-\cos^2 x}$化成$\dfrac{16^2}{16^{\cos^2 x}}$

道理很明显，并且只要这样一作，方程就只有一个未知数"$16^{\cos^2 x}$"。因而便于求解了，为什么我们不这样作呢？当然这样作要求指数律的知识，未掌握这项基础知识的人，不可能知道这样作。

例5. 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=3 & \cdots\cdots(1)\\ x^3+y^3=5 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

解：这个方程组说明(1)的两边的立方减去(2)式两边的平方就可以把x、y的整数次方消去，这使我们作出

$(1)^3$：$x^6+3x^2y^2(x^2+y^2)+y^6=27$

又由(1)知：

$$x^2+y^2=3$$

因之，上式可变形为

$$x^6+9x^2y^2+y^6=27 \cdots\cdots(3)$$

再作$(2)^2$得：

$$x^6+2x^3y^3+y^6=25 \cdots\cdots (4)$$

把这两个式子结合起来（即相减）得：

$$2x^3y^3-9x^2y^2+2=0 \cdots\cdots (5)$$

由于 $x^3y^3=(xy)^3$，$x^2y^2=(xy)^2$，可知(5)是关于"xy"的三次方程，为了解这个方程、对左边作分解(3)式的配项：

$$2x^3y^3-x^2y^2-8x^2y^2+4xy-4xy+2=0$$

提出因子得：

$$x^2y^2(2xy-1)-4xy(2xy-1)-2(2xy-1)=0$$

再提出因子得：

$$(2xy-1)(x^2y^2-4xy-2)=0 \cdots\cdots (6)$$

$$xy\begin{cases}\frac{1}{2} \cdots\cdots (7)\\ 2+\sqrt{6} \cdots\cdots (8)\\ 2-\sqrt{6} \cdots\cdots (9)\end{cases}$$

这样原方程组转化为三个方程组：

$$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+y^2=3\\ xy=2+\sqrt{6}\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+y^2=3\\ xy=2-\sqrt{6}\end{cases}$$

第二个方程组里 $x^2+y^2<xy$，无实际数解，其余两个方程组解法相同，都是由所给二个方程求出：

$$(x+y)^2 \text{ 与 } (x-y)^2$$

进而求出 $x+y$ 与 $x-y$ 得到四组根：

$$\begin{cases}1+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{6}+1+\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\\ \dfrac{-\sqrt{6}+1-\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{-\sqrt{6}+1-\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\\ \dfrac{-\sqrt{6}+1+\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\end{cases}$$

解题过程示意表：

$$\left.\begin{matrix}(1)\Longrightarrow(3)\\ (2)\Longrightarrow(4)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(5)\Longrightarrow(6)\Longrightarrow\begin{cases}(8)\\ (9)\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\ (7)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \text{前二组解} \qquad \left.\begin{matrix}(9)\\ (1)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \text{后二组解}$$

这个解法、也充分反映把条件"结合"起来的思想，作出(1)—(4)不消说是这种思

想的体现，把(5)当作关于"xy"的方程来解也体现了这种思想，因为只要求出了"xy"与(1)相结合必然可求出：$x+y$ 与 $x-y$

因而"天下大定"了。

至于解3次方程为什么要分解因式，那是十分明白的，这是解3次以上的方程的常用方法。

例6. 已知α、β为锐角，并且：

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1 \qquad (1)$$

$$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0 \qquad (2)$$

求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$

解：故应到条件提到"α、β为锐角"那就说明它们的三角函数都大于0，这一点在解题的开始不一定有作用，但它们对于整个解题肯定有作用。

(1)、(2)项条件说明：条件是比较复杂的，必须化简，化简就必须消去α、β之一。

为了实现这项"消去"必须把(1)里的α、β的三角函数化成2α、2β的三角函数，而保持(2)里的2α、2β的三角函数不变；或者反其道而行之。(1)里的"$2\sin^2\beta$"与"1"说明实行前一种比较方便。因为，由(1)可得：

$$3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos2\beta \cdots\cdots (3)$$

以(3)与(2)对照，可知$3\sin^2\alpha$与$3\sin2\alpha$有公因子$3\sin\alpha$，经过相除即可以消去这个公因子，为此，变(2)为：

$$3\sin2\alpha=2\sin2\beta \cdots\cdots (4)$$

(3)÷(4)得：

$$\frac{1}{2}tg\alpha=\frac{1}{2}ctg2\beta$$

即：$tg\alpha=ctg2\beta \cdots\cdots (5)$

由于α为锐角，$tg\alpha>0$，因而$ctg2\beta>0 \cdots\cdots (6)$

加以β为锐角，2β不可能为大于$180°$的角。

(6)说明2β为锐角，

由于α、2β都为锐角，(5)式说明$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$。

思考过程示意表：

$$\left.\begin{matrix}(1)\Longrightarrow(3)\\(2)\Longrightarrow(4)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(5)\\ \alpha\text{为锐角}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(6)\\ \beta\text{为锐角}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow 2\beta\text{为锐角}$$

$$\left.\begin{matrix}2\beta\text{为锐角}\\ \alpha\text{为锐角}\\ (5)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\text{结论}$$

这个解法说明，题目对解法的确有启示作用，这个题目里的"1"，"$2\sin^2 B$"固然提供了解法的启示，题目里的两个"3"同样提供了解题的启示，可见要使解题有效，必须认真研究题目，切实掌握住题目提供的启示。华罗庚同志说："题目包括了解答"，完全合乎实际。

例7. 在△ABC中，已知：

$$a\,tg A+b\,tg B=(a+b)\,tg\frac{A+B}{2}\ \cdots\cdots(1)$$

求证：$a=b$

证：题目的条件有下述三项：

(1) A、B 是△ABC 的角.

(2) a、b 分别是△ABC中A与B的对边.

(3) 把A、B、a、b连接在一起的等式(1).

(1)比较复杂，不便使用，必须化简。

怎样化简？考虑到：

$$A-\frac{A+B}{2}=\frac{A+B}{2}-B=\frac{A-B}{2}$$

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B$$

对(1)作下述变形：

即：$a\left(tg A-tg\frac{A+B}{2}\right)=b\left(tg\frac{A+B}{2}-tg B\right)$

$$2R\sin A\left(tg A-tg\frac{A+B}{2}\right)=2R\sin B\left(tg\frac{A+B}{2}-tg B\right)\cdots\cdots(2)$$

消去两边的公因子2R并运用差角的正切公式进一步变形得：

$$\sin A\,tg\frac{A-B}{2}\left(1+tg A\,tg\frac{A+B}{2}\right)=\sin B\,tg\frac{A-B}{2}\left(1+tg B\,tg\frac{A+B}{2}\right)\cdots\cdots(3)$$

消去两边的公因子$tg\frac{A-B}{2}$根据诱导公式把$tg\frac{A+B}{2}$变形为$ctg\frac{C}{2}$得：

$$\sin A\left(1+tg A\,ctg\frac{C}{2}\right)=\sin B\left(1+tg B\,ctg\frac{C}{2}\right)\cdots\cdots(4)$$

即：

$$\sin A\left(1+\frac{\sin A\cos\frac{C}{2}}{\cos A\sin\frac{C}{2}}\right)=\sin B\left(1+\frac{\sin A\cos\frac{C}{2}}{\cos B\sin\frac{C}{2}}\right)\cdots\cdots(5)$$

即：$$\frac{\sin A\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)}{\cos A\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin B\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}{\cos B\sin\frac{C}{2}}\ \cdots\cdots(6)$$

由：$A+\frac{C}{2}+B+\frac{C}{2}=180°$，可知：

$$\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)$$

因之，(6)实质上即是：

$tg\,A = tg\,B$ …… (7)

由于：A、B是△内的角，都是小 $180°$ 的正角。

(7)式说明：

$A=B$ …… (8)

根据等腰△判定定理，可知：

$a=b$ …… (9)

解题过程示意表：

$$\left.\begin{matrix}(1)\\ \text{条件}(2)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(2)\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(3)\\ \text{条件}(1)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(5)\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(6)\\ \text{条件}(1)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(7)$$

$$\left.\begin{matrix}(7)\\ \text{条件}(1)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(8)\Longrightarrow(9)$$

例8. 在有理数范围内分解因子。

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

思考过程：

题目中四个括号内的常数项是一个等差数列，3与5之和则刚好等于1与7之和，分别把中间两个括号相乘和首末两个括号相乘，可得：

$[x^2+8x+15]$、 $[x^2+8x+7]$

当$x^2+8x+7=y$原式就化为关于y的二次三项式

$y^2+8y+15$

它是一个二次三项式，可以直接分解为：

$(y+3)(y+5)$

因之，原式化为：

$(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$

思考过程示意表：

"$3+5$"="$1+7$"$\Longrightarrow$化原式为$[x^2+8x+15][x^2+8x+7]$

$\Longrightarrow$化原式为$(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$。

例9. 分解因式

$(b^2-c^2)-2a^2(b^2+c^2)+a^4$

思考过程，考虑到：

$(b^2+c^2)^2-2a^2(b^2+c^2)+a^4$

是一个完全平方式，并且：

$(b^2-c^2)^2=(b^2+c^2)^2\ 4b^2c^2$

因之，原式可化为：

$$(b^2+c^2)^2-2a^2(b^2+c^2)+a^4-4b^2c^2 \cdots\cdots (1)$$

即：$(b^2+c^2-a^2)^2-(2bc)^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a), \cdots\cdots (2)$

思效过程示意表：

$$\left.\begin{array}{l} A^2-2AB+B^2=(A-B)^2 \\ (b^2-c^2)^2=(b^2+c^2)^2-4b^2c^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{化原式为(1)} \Longrightarrow \text{化原式为(2)}$$

例10. 已知 $\log_{12}27=a$

求证：$\log_6 16=\dfrac{4(3-a)}{3+a}$

证明：根据换底公式可知：

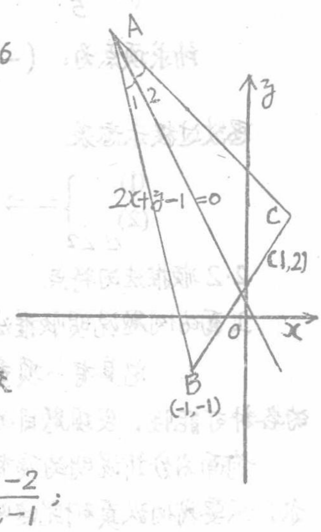
$$a=\log_{12}27=\frac{\lg 27}{\lg 12}=\frac{3\lg 3}{\lg 3+2\lg 2}$$

考虑到求证式右边复杂，左边单纯，由复杂变成简单该消去什么，在变形过程中会明白显示出来，而由单纯变形成复杂在变形过程中该配什么因子（或项）不易揣测，决定把右边变形成左边。

$$\frac{4(3-a)}{3+a}=\frac{12-4\times\dfrac{3\lg 3}{\lg 3+2\lg 2}}{3+\dfrac{3\lg 3}{\lg 3+2\lg 2}}$$

$$=\frac{12\lg 3+24\lg 2-12\lg 3}{3\lg 3+6\lg 2+3\lg 3}$$

$$=\frac{24\lg 2}{6(\lg 3+\lg 2)}=\frac{4\lg 2}{\lg 3+\lg 2}=\frac{\lg 16}{\lg 6}=\log_6 16$$



例11. △ABC中，∠A的平分线是：

$$2x+y-1=0$$

另外的两个顶点是：

$B=(-1,-1)\quad C=(1,2)$

求：A的坐标。

解：这个项目涉及到角的相等问题，必须应用二直线夹角的正切公式，因之应先求出A、B、C的斜率表示式。

设：$A=(x,y)$ 可得：$k_{AB}=\dfrac{y+1}{x+1}\qquad k_{AC}=\dfrac{y-2}{x-1}$；

又：$k_{AD}=-2$，

$$tg\angle 1=\frac{\frac{-2-y+1}{x-1}}{\frac{1-2(y+1)}{x+1}}=\frac{-2x-y-3}{x-2y-1}\ \cdots\cdots(1)$$

$$tg\angle 2=\frac{\frac{y-2}{x-1}+2}{\frac{1-2(y-2)}{x-1}}=\frac{2x+y-4}{x-2y+3}\ \cdots\cdots(2)$$

根据已知条件 $\angle 1=\angle 2$ 可得：

$$\frac{-2x-y-3}{x-2y-1}=\frac{2x+y-4}{x-2y+3}\ \cdots\cdots(3)$$

根据等比定理（不用等比定理也可化简，但要麻烦一些）把(3)的左边的分子分母分别加在右边的分子分母上，不改变分数的值，可得：

$$\frac{-2x-y-3}{x-xy-1}=\frac{-7}{2x-4y+2}\ \cdots\cdots(4)$$

整数得：$4x^2-6xy-4y^2+3x+4y+13=0$

又A在直线 $2x+y-1=0$ 上，x、y必满足这个方程，所以

$y=1-2x\ \cdots\cdots(6)$

代入(5)并整理得：

$5x=-13 \qquad \therefore\ x=-\frac{13}{5}\ \cdots\cdots\ (7)$

代入(6)得：

$y=\frac{31}{5}\ \cdots\cdots(8)$

所求顶点为：$\left(-\frac{13}{5}，\frac{31}{5}\right)$

思放过程示意表：

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\ \scriptstyle\angle 1\ \angle 2\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(5)\\(6)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}(7)\\(6)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(8)$$

2·2 顺推法的特点

上面的例题说明顺推法有下述特点：

1. 它具有一项重要任务：研究条件所提供的解题的启示，充分运用条件提供的各种可能性，发现题目的解法。

前面的分析说明的确有相当多的题目，通过它们的条件和结论，向我们提供解法启示，只要我们认真研究这些启示，充分运用条件提供的各种可能性，就一定能找出所要

要求的解法。

因之，顺推法的这项任务既是必要的，也具备了充分的化为现实的基础。

2. 顺推法的形式，非常明显的是，当条件有几项时，它要求尽可能充分地综合运用所有各项条件，得到一系列过渡性的结论，这一系列结论中的最后一个即是求证或求解的结论，这是顺推法的最重要的特点。由于顺推法具有这个特点，就使它的效果是准确可信的，它凭借的是必然的因素（作出结论的一系列过渡性结论必然是条件的结合）而不凭借偶然，碰运气的猜想。

综合运用所有条件的过程，即是一次再次地综合运用两条件（或过渡性结论与条件，或过渡性结论与过渡性结论）求出过程性结论或新的过渡性结论的过程，就得简捷一点即是一再实行"二对一"的过程，这是以上各例的共性。

综合运用的两项条件的基本形式大体上有以下几种：

(1) 直接由两项条件得出它们的综合结论，如直接由 $BH \parallel PC$、$CH \parallel PB$ 得出 BPCH[①] 之平行四边形，这种形式可表示成：

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C$$

（其中 A、B 是条件，C 是它们的综合性结论）

(2) 先作出每一项条件的直接结论，再作这两项推论的综合性结论，如 例1. 证明四段所作的，这种形式可表示成：

$$\left.\begin{matrix} A_1 \Longrightarrow B_1 \\ A_2 \Longrightarrow B_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C$$

(3) 先作一项条件的推论（以至推论的推论），再求出这推论与另一项条件的综合性结论，这在 例2. 中见到了，这种形式可表示成：

$$\left.\begin{matrix} A_1 \Longrightarrow B_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C$$

第 (1) 种形式比较容易作出，但 (2)、(3) 种也很常见，在必须作出这两种时，要遵守这样的原则：选择一项条件的推论，要求这推论本身或它的推论与另一项条件（或其推论）能产生综合性结论，如果一项条件的推论（包括这推论的推论）不能与另一项条件（或推论）产生综合性结论，这种推论就不易选用，（至少不能优先选用）。

如果用第一种形式[2]代表这三种，那么用顺推法证题，其推证的基本形式大体上是

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} A \\ A_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow B_1 \\ A_3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow B_2 \\ A_4 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow B$$

或

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_1\\A_2\end{array}\right\}\Longrightarrow B_1\\[2ex]\left.\begin{array}{l}A_3\\A_4\end{array}\right\}\Longrightarrow B_2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}B_3\\A_5\end{array}\right\}\Longrightarrow B$$

或与以上形式相类式的。

一些同志难免要认为：由一项条件作出一项过渡性结论比之把两次条件配合起来作出过渡性结论来得容易，其实这是脱离解题实际的看法 事实上，一项条件往往可以作很多结论，到底选择其中那一项条件才合要求，的确不容易。以例1. 为例，单说M是BC的中点，可以引出很多过渡性结论，比如：

$BM=CM$

连AM并延长一倍到E，就得：$CE \mathrel{\underline{\parallel}} AB$；

连DM并延长一倍到F，就得：$BF \mathrel{\underline{\parallel}} CD$；

经过M作BD的平行线必平分CD；

经过M作AC的平行线必平分AB；

经过M作AB的平行线必平分AC；

以BC为直径作圆，圆心必是M；

经过M作BC的垂线，它必是BC的垂直平分线；

…… ……

如果真的在作出这些过渡性结论之后再去逐一选择，看到那一条是有助于作出求证的结论，那是撒拉江网，至少是很费力。

在这些过渡性结论中，到底哪一条恰当？都不行，因为它们都是摔开了其它条件作出来的。而求证的结论：

$BE=EF=FD$

都是一个▱和M、N两个中点的综合性结论，甩开了▱和N是中点，单凭M是中点的过渡性结论，断然证明不了求证的结论。

实行"二对一"着重于进行"使条件结合"的效思，因而容易一些。这与找人有类似之处，要确定某人是谁？只知道他是省委赵书记的熟人，那是很难确定的，因为赵书记的熟人很多。如果增加一项条件，这人在西宁市工作，情况就不同了，要是再加上一项条件，这人的爱人姓高，他到底是谁，就可以基本上确定了。

顺推法很象足球比赛，在足球比赛中往往出现下述成功的攻球场面：