高三

高中数学奥林匹克训练指导

顾鸿达 顾问　顾跃平 主编

03

上海科学普及出版社

3

933093

高中数学奥林匹克训练指导

（高　三）

顾鸿达　顾　　问

顾跃平　主　　编

G634.603
026

G634.603
026

重庆师大图书馆

CS1049251

上海科学普及出版社

153

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克训练指导．高三/顾跃平主编．上海：上海科学普及出版社，2005.1
ISBN 7-5427-2743-5

Ⅰ.高… Ⅱ.顾… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075708 号

责任编辑 郭子安

高中数学奥林匹克训练指导
（高 三）
顾鸿达 顾问
顾跃平 主编
上海科学普及出版社出版发行
（上海中山北路 832 号 邮政编码 200070）
http://www.pspsh.com

各地新华书店经销
常熟新骅印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 13.5 字数 328 000
2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—5 100

ISBN 7-5427-2743-5/O·124 定价：18.00 元
本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题
请向出版社联系调换

内 容 提 要

本丛书是为数学爱好者所编写，并按数学分类方法从高一至高三分为三册．每一册内容由浅入深，语言通俗易懂，对于比较难理解的内容，有专门的评注分析．其特点是每章节前均有知识点导读，对新的定理与知识都给予详细介绍，并有例题剖析，使读者能尽快了解新的知识点．书中的习题，从易到难，有利于培养学生学习数学的兴趣和自信心，书后附有解答提示和参考答案，所以本书也可以作为数学爱好者的自学用书．

本书分为四部分：一、同步提高篇；二、专题辅导篇；三、方法指导篇；四、综合训练篇．供高三年级选用．主要介绍：排列、组合、二项式、概率、统计、极限、微积分初步、组合数学初步、容斥原理、抽屉原理和应用数学选讲等内容．在方法指导方面则介绍了分类讨论、函数思想运用、数形结合、转换与化归、探究型问题及应用题解题方法与策略．最后还有模拟测试卷和最新竞赛试卷汇编，可供读者自我考查．

编委会名单

顾　　　问： 顾鸿达

主　　　编： 顾跃平

高一分册主编： 薛大伟

高二分册主编： 顾跃平　许　颖

高三分册主编： 穆晓炯

编 委 成 员： 薛大伟　徐南嘉　龚定森

曹立东　施裕辉　徐　贤

陈　涉　奚丽琴　耿　伟

顾跃平　许　颖　罗伟民

胡玉蓉　穆晓炯　张佑棠

陆似敏　汪建华　舒舍予

詹达松　张　琼　冯桂芳

陈　未　徐彦琳　徐　波

吴玲华　彭本新

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

数学是思维的体操
数学是逻辑的修炼
数学是时空的艺术
数学是智力的阶梯

——希望同学们通过本书的学习能对数学有进一步的了解.

前 言

十九世纪的一位伟人说过：一门学科，只有在运用了数学之后，才能成为真正的科学.时至今日，没有人会怀疑数学的重要性，也没有人会怀疑学好数学的重要性.但是，怎样才能学好数学，却是见仁见智，众说纷纭.值得庆幸的是，不管存在多少种不同的见解，有两点是大家公认肯定的：第一，不存在一用就灵的万能方法；第二，无论哪种学习方法，都离不开勤学多练这个中心环节.

本书正是为有志学好数学的学生提供一个勤学多练的平台，为他们的提高发展奠定坚实的基础.

时下，针对学生的各类教辅材料琳琅满目，环肥燕瘦，各有千秋，春兰秋菊，各擅胜场，令学生和家长难以作出选择.本书集百家之优点，采同类之长处，形成了一套适合学生自学、自测的体系，从而达到巩固提高的目的，同时，也成为学生和家长选择的亮点.具体来说，本书有以下特点：

第一，紧扣教材，由浅入深，结构合理，逐层推进.本书每册都分三部分：同步提高篇、专题辅导篇和综合训练篇.其中同步提高篇为基础知识和基本方法，大致与教材的结构顺序一致.专题辅导篇则是在此基础上加以提炼、扩展、深化，最后归结为综合训练，这是检查学习效果的必经程序.使用本书并循此路线学习，一步一个脚印地前进，岂有数学水平不提高之理！

第二，知识要点，归结清楚，典型例题，皆有评注.本书每章均列有知识要点及各知识点之间的联系，以便学生理解、记忆和应用.每道例题之后均有评注，分析解题思路及要点、难点，指出其中的得失利弊.寥寥数语，往往能起到“四两拨千斤”的效果，富有启迪和点拨作用.

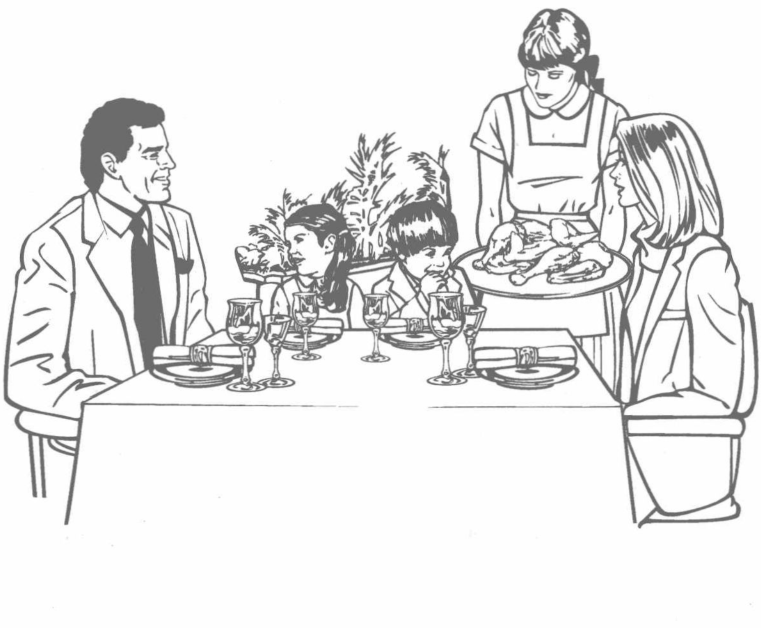
第三，注重能力，强调训练，题型多样，涵盖全面.本书每个章节都配备了相应的习题，目的在于培养和提高解题能力和应用能力.正如《新教学大纲》所指出:“能力是在知识的教学和技能的训练中，通过有意识地培养而得到发展的.”知识是能力的载体，能力是知识的升华.对于数学来说，二者的最佳结合点是习题.这恰好印证了数学家 P. Halmous 所说的:“问题是数学的心脏.”

参加本书编写的都是多年工作在教学第一线的教师，本书凝聚了他们的学识和经验，对学生会有显著的帮助.同时对书中存在的不足之处，我们也期待着来自读者的批评建议，以便再版时更能体现完美.

目 录

第一篇

同步提高篇



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　排列、组合和二项式定理

第一节　排列与组合

【知识要点】

1. 基本原理

加法原理：如果某件事情可以由k类不同办法完成，在第一类办法中有m_1种不同方法完成；在第二类办法中有m_2种不同方法完成……；在第k类办法中有m_k种不同方法完成，那么完成这件事情共有$m_1+m_2+\cdots+m_k$种方法.

乘法原理：如果完成一件事，需要几个步骤，做第一步有m_1种方法，做第二步有m_2种方法……，做第n步有m_n种方法，那么，完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种方法.

2. 排列与组合的意义

排列：从n个不同元素中，任意取m $(m\leqslant n)$个元素，按一定顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列；当$m=n$时，称为n个元素的全排列.

组合：从n个不同元素中，任意取m $(m\leqslant n)$个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合.

3. 排列与组合的主要公式

$$\mathrm{P}_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\quad(m\leqslant n)$$

n个不同元素的全排列数为$\mathrm{P}_n=n!$，规定$0!=1$.

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{P}_n^m}{\mathrm{P}_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\quad(m\leqslant n)$$

$$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}\quad \mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m\quad(m\leqslant n)$$

4. 解排列组合问题的关键

(1) 抓住“分类”与“分步”的区别，用好两个基本原理. 在分类时，做到“不重不漏”，在分步时或者从元素出发，或者从位置出发.

(2) 抓住“有序”与“无序”的区别，分清排列与组合两类问题.

(3) 善于从反面考虑问题，灵活运用排除法.

例 1：由 1、2、3、4 四个数字可以组成多少个没有重复数字的自然数？

解：$N = P_4^1 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = 64$.

【评　注】 将原事件分成若干类事件：组成没有重复数字的一位、二位、三位、四位自然数，共有多少个.

例 2：有三个不同的信箱，今有四封不同的信欲投其中，共有多少种不同的投法？

解：$N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$(种)

【评　注】 "投四封信"这件事分四步来完成，每投一封信作为一步，每步有投入三个不同信箱的三种方法，因此采用乘法原理来解.

例 3：有 A、B、C、D、E、F、G、H、I 9 个人排队，按下列要求各有多少种排法？

(1) A 不在排头；

(2) A 不在排头，B 不在排尾；

(3) A、B、C 3 人中任意 2 人不排在一起；

(4) A、B、C 3 人必须排在一起.

解：(1) 方法 1：A 不在排头，则排头的位置只能由其余 8 人中的 1 人去排，有 P_8^1 种. 剩下 8 个位置可任意排，共有 P_8 种，所以不同排法有：$P_8^1 \cdot P_8 = 322\,560$ 种.

方法 2：A 不能排排头，则 A 只能在后面 8 个位置中选一个，共有 P_8^1 种，剩下 8 个位置共有 P_8 种，所以不同排法有：$P_8^1 \cdot P_8 = 322\,560$ 种.

方法 3：9 人排队共有 P_9 种，其中 A 在排头不满足要求，把它减去，A 在排头的共有排法 P_8 种，$\therefore$ 不同排法为 $P_9 - P_8 = 322\,560$ 种.

(2) 9 人排队共有 P_9 种，A 在排头的共有 P_8 种，B 在排尾的共有 P_8 种，A 在排头，且 B 在排尾的共有 P_7 种，$\therefore$ 排法共有 $P_9 - P_8 - P_8 + P_7 = 287\,280$ 种.

(3) 先将其余 6 人排队，共有 P_6 种排法，在这些人的中间和两边有 7 个空档，而 A、B、C 在这 7 个位置的任意 3 个上都满足 A、B、C 不相邻，共有 P_7^3 种排法，$\therefore$ A、B、C 任意两人不相邻的排法共有 $P_6 \times P_7^3 = 151\,200$ 种.

(4) A、B、C 在一起共有 P_3 种排法，把 A、B、C 看成一个元素，与其余 6 人构成 7 个元素排队，共有 P_7 种，$\therefore$ 排法共有 $P_3 \times P_7 = 30\,240$ 种.

【评　注】 本例包含了排列中的几种常用方法：由本例(1)的方法 1、2 反映了特殊位置优先排列的两种情况；方法 3 用了排除法. 本例(2)的解法需谨慎，将重复去掉的排列数找回来. 本例(3)当要求某些元素不相邻排列时，可先对无条件限制的元素进行排列，然后将要求互不相邻的元素排入无条件限制元素所排列的空档中. 本例(4)当要求某些元素必须相邻时，可把它们放在一起看成一个元素和其余元素进行全排列，然后将放在一起的几个元素进行全排列.

例 4：9 本不同的书，

(1) 分给 3 人，每人各得 3 本，有多少种分法？

(2) 分给 3 人，甲得 1 本，乙得 2 本，丙得 4 本，有多少种分法？

(3) 分给三人，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 4 本，有多少种分法？

(4) 平均分成三堆，有多少种分法？

(5) 分给 3 人，1 人得 7 本，另两人各得 1 本，有多少种分法？

(6) 9 本不同的书，分给 3 人，全部分完且每人至少得 2 本，有几种分法？

解：(1) $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1\,680$.

(2) $C_9^1 \cdot C_8^2 \cdot C_6^4 = 3\,780$.

(3) $C_9^1 \cdot C_8^2 \cdot C_6^4 \cdot P_3^3 = 22\,680$.

(4) $\dfrac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{P_3} = 280$.

(5) $C_9^7 \cdot P_3 = 216$.

(6) $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 + C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 \cdot P_3 + \dfrac{C_9^2 \cdot C_7^2}{P_2} \cdot C_5^5 \cdot P_3 = 11\,508$.

【评　注】 分配问题是计数问题中的难点，若是指定分配，即谁得多少是指定的，则可按需要从总数中分步取出即可；若不是指定分配，则可以先进行分组再排列. 在分组中若遇到“平均分组”时，则要除以 P_n.

例 5：四面体的顶点和各棱中点共有 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，不同的取法共有多少种？

解：从 10 个点中任取 4 个点，共有 C_{10}^4 种取法，其中 4 点共面的情况有三类：(1) 取出的 4 个点位于四面体的同一个面内，即 $4C_6^4$；(2) 取任一条棱上的 3 个点与该棱对棱的中点，这 4 点共面，有 6 种；(3) 由中位线构成的平行四边形(其两组对边分别平行于四面体相对的两条棱)，它的 4 个顶点共面，有 3 种.

∴ 共有 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 6 - 3 = 141$ 种.

【评　注】 本题考查组合的知识，平面的基本性质，空间想像能力，以及分类讨论的思想方法. 本题一般采用“排除法”解，难点在于排除哪些不合条件的组合，由于对空间想像能力要求高，不易考虑周全.

例 6：四张卡片的正反面分别写着 0 与 1，2 与 3，4 与 5，6 与 7. 将其中三张卡片并排放在一起，可组成多少个不同三位数(其中数字 6 也可以作 9 用)？

解：可以把抽出的三张卡片分为两类：第一类是没有 0 与 1 而 6 又可以看成 9，因此可把 6 与 7 这张卡片理解成有 3 个数字，其余每张有 2 个数字，要组成一个三位数且每张奉献一个数字，共有 $2\times2\times3$ 种方法，拿出数字后进行全排列得三位数个数为：$2\times2\times3\times P_3 = 72$(种)；第二类是含有 0 与 1，考虑到 0 不能作首位，若三张卡片为 0 与 1，2 与 3，4 与 5，共有 $8\times3! - 4\times2! = 40$(种)，若三张卡片为 0 与 1，6 与 7，2 与 3 或 4 与 5，共有 $2\times(2\times2\times3\times3! - 2\times3\times2!) = 120$(种).

因此，组成不同的三位数共有 $72 + 120 + 40 = 232$(种).

【评　注】 解排列组合问题，要熟练地从给出的问题中寻找某些特殊元素，然后根据特殊元素来进行分类讨论研究.

练 习 一 (1)

一、填空题:

1. 甲、乙、丙三个单位各有总机,新年值班时分别有 3、4、5 人,新年中彼此作祝贺,每两个总机的人都彼此一一通话,他们共通话________次.

2. 从 5 名男生、3 名女生中选出 2 名男生、1 名女生,分别参加语文、数学、外语三科课外小组,每组一人,共有________种选法.

3. 把 4 本不同的书全部分给 3 个学生,每人至少一本,共有________种分法.

4. 从 1～100 这 100 个自然数中取 3 个数,若这 3 个数的和为 3 的倍数,共有________种不同的取法.

5. 用红、黄、蓝三色纸各制作一套卡片,每套卡片中有 A, B, C, D, E 字母卡片各一张,若从这 15 张卡片中每次取出 5 张,要求字母各不相同且三色齐全,不同的取法有________种.

6. 四面体的一个顶点为 A,从其他顶点与棱的中点中取 3 个点,使它们和点 A 在同一平面上,不同的取法有________种.

二、选择题:

7. 从 -11, -7, 0, 1, 2, 3, 5 这七个数中,每次选不重复的三个数作为直线 $ax+by+c=0$ 的系数,则倾角为钝角的直线共有(　　).

(A) 14 条　　(B) 30 条　　(C) 70 条　　(D) 60 条

8. 计划在某画廊展出 10 幅不同的画,其中 1 幅水彩画,4 幅油画,5 幅国画,排成一行陈列,要求同品种的画必须连在一起,并且水彩画不放在两端,不同的方式有(　　)种.

(A) $P_4 \cdot P_5$　　(B) $P_3 \cdot P_4 \cdot P_5$

(C) $C_3^1 \cdot P_4 \cdot P_5$　　(D) $P_2 \cdot P_4 \cdot P_5$

9. 若把两异面直线看成一对,那么六棱锥的棱所在直线中,共有异面直线的对数是(　　).

(A) 12　　(B) 24　　(C) 36　　(D) 48

10. 在一份高考志愿中,可填 3 个学校,每校可填 2 个专业.现有四所学校可供选择,且每个学校有 3 个使你满意的专业,若表格填满,学校、专业都无重复,则填写的方法共有(　　).

(A) 112 种　　(B) 648 种　　(C) 5 184 种　　(D) 864 种

三、解答题:

11. 有 k 名棋手参加的单循环制象棋比赛,其中有两名选手各比赛了三次就不参加了,且这两名选手间未进行比赛,这样,到比赛结束时共赛了 84 场,求 k 的值.

12. 有同样大小的球 10 个，其中 4 个为红球，编号分别为 1，2，3，4；6 个为白球，编号分别为 5，6，7，8，9，10. 现从中取 4 个球，求：

(1) 红球比白球多的取法有多少种？

(2) 规定一个红球计 2 分，一个白球计 1 分，则 4 个球的总分不小于 5 的取法有多少种？

第二节　二项式定理

【知识要点】

1. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}).$$

等号右边的式子叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，它共有 $n+1$ 项，其中 $C_n^k (k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 叫做二项式系数.

二项展开式的第 $k+1$ 项：$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项.

2. 二项式系数的性质

(1) 在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $C_n^k = C_n^{n-k} (k=0, 1, 2, \cdots, n)$.

(2) 在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中，所有二项式系数的和等于 2^n，即

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

各奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，它们都等于 2^{n-1}，即

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}.$$

例 1： 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ 的展开式中，

(1) 求 x^2 项的二项式系数；

(2) $x^{\frac{1}{3}}$ 项是第几项？并求这一项的系数.

解：(1) 通项 $T_{k+1}=C_{11}^{k}(\sqrt[3]{x})^{11-k}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{k}=C_{11}^{k}(-2)^{k}x^{\frac{22-5k}{6}}$.

由题意，得 $\dfrac{22-5k}{6}=2$，则 $k=2$.

$\therefore$ x^2 项的二项式系数为 $C_{11}^{2}=55$.

(2) $\dfrac{22-5k}{6}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow k=4$.

$\therefore$ 第 5 项为 $x^{\frac{1}{3}}$ 项，系数为 $C_{11}^{4}(-2)^{4}=5\,280$.

【评　注】 通项公式一定要熟记，并注意问题的提法. 求某项、求某项系数、求二项展开式系数、求第 k 项、$k+1$ 项等要回答正确.

例 2：在 $(2x-3y)^9$ 的展开式中，求

(1) 二项式系数的和；　(2) 各项系数的和；

(3) 各奇数项系数的和；　(4) 各项系数的绝对值之和.

解：(1) 在 $(2x-3y)^9$ 的展开式中，

二项式系数的和为 $C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^9=2^9=512$.

(2) 设 $(2x-3y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+\cdots+a_9y^9$.

令 $x=y=1$，得 $a_0+a_1+\cdots+a_9=(2-3)^9=-1$.

$\therefore$ 各项系数之和为 -1.

(3) 设 $(2x-3y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+a_2x^7y^2+\cdots+a_9y^9$.

令 $x=y=1$，得 $a_0+a_1+\cdots+a_9=(2-3)^9=-1$.

令 $x=1,\ y=-1$，得 $a_0-a_1+\cdots-a_9=(2+3)^9=5^9$.

$\therefore$ 各奇数项系数和 $a_0+a_2+\cdots+a_8=\dfrac{-1+5^9}{2}=976\,562$.

(4) 从展开式中，可知 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9$ 为负数，$a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8$ 为正数.

令 $x=1,\ y=-1$，得 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8-a_9=(2+3)^9=5^9$.

$\therefore$ 各项系数的绝对值之和为 5^9.

【评　注】 由于二项展开式对任意复数均成立，因此可适当取一些特殊值，找到你需要求的值.

要注意二项式定理的逆用. 如 $C_n^0+2\cdot C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\cdots+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^n\cdot C_n^n=C_n^0\cdot 1^n+C_n^1\cdot 1^{n-1}\cdot 2+C_n^2\cdot 1^{n-2}\cdot 2^2+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 1\cdot 2^{n-1}+C_n^n\cdot 2^n=(1+2)^n=3^n$.

例 3：(1) 求 $\left(|x|+\dfrac{1}{|x|}-2\right)^3$ 的展开式中不含 x 的项.

(2) 求 $(1+x-x^2)^6$ 的展开式中 x^5 的系数.

解：(1) $\because |x|>0$　$\therefore |x|+\dfrac{1}{|x|}-2=\left(\sqrt{|x|}-\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^2$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com