工科研究生教材系列

数理统计

Mathematical Statistics

主编 赵彦晖

科学出版社

工科研究生教材系列

数理统计

主编　赵彦晖

编者　燕列雅　史加荣　李体政
　　　潘智民　彭家龙

科学出版社

内 容 简 介

本书比较系统地介绍了数理统计的基本概念、基本原理和基本方法. 全书共 6 章，内容包括样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和数理统计的 MATLAB 命令实现.

本书简明易懂，概念引入自然实用，易于教学. 在讲述统计方法时，尽量采用图表形式，既减少篇幅，又易于学生理解和掌握.

本书可作为高等学校工科各专业研究生和数学专业本科生数理统计课程的教材，也可作为应用概率统计的工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数理统计/赵彦晖主编. —北京：科学出版社, 2013
工科研究生教材系列
ISBN 978-7-03-036865-2

I. ①数… II. ①赵… III. ①数理统计-高等学校-教材 IV. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 040848 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 5 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2013 年 5 月第一次印刷 印张: 11 1/2
字数: 231 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是为适应21世纪数学课程改革的需要，在作者多年讲授数理统计课程的基础上编写而成的.

本书具有以下特点.

(1) 概念引入自然直观. 例如，在进行二元方差分析时，首先讨论双因子等重复试验的二元方差分析，然后给出非重复试验的相应结果. 这样做既利于学生理解交互作用的影响和产生背景，又避免同类问题的重复讨论，而且还减少篇幅，更易于学生掌握.

(2) 内容组织科学系统. 本书特别注重内容组织的科学性和系统性. 在处理许多定理时，用加"*"和小字号排版的方式加强定理的证明，使本书的体系更加系统、完整. 这样做既利于数学专业的学生知其所以然，又利于非数学专业学生略过证明部分直接应用定理的结论.

(3) 叙述简明易懂，易于教学. 作为高等学校的数学教材，本书在讲述统计方法时，尽量采用图表形式，既减少篇幅，又易于学生理解和掌握.

(4) 重视理论和实际的结合，注重学生能力的培养. 本书不但在理论上注重内容编排的系统性，而且在选材和叙述上尽量注意选取既具有实际意义，又具有启发性和应用性的例子作为本书的例题与习题，使学生通过本课程的学习能学到更丰富、更有用的数学知识及更强的运用数学工具的能力.

(5) 第6章集中介绍了数理统计中常用的MATLAB命令，书后附有概率论内容梗概，以便学生应用和查阅.

本书篇幅小、内容全，特别适合作为高等学校工科各专业研究生和数学专业本科生数理统计课程的教材，也可作为有关工程技术人员的参考书. 本书各章配有精选的习题，数量、难度适中，且书后附有部分习题参考答案.

本书的编排体系是为了适应21世纪数学课程改革需要而做的一种尝试. 由于编者水平有限，书中一定会有不少的疏漏和不足，恳请读者批评指正.

本书得到陕西省普通高等学校重点学科专项资金建设项目的资助.

编　者

2012年12月

目　　录

第1章 样本与抽样分布

和概率论一样，数理统计也是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 二者的区别在于概率论是在已知随机变量服从某种分布的情况下，研究随机变量分布(如分布函数、分布律、分布密度等)的性质和随机变量的数字特征(如数学期望、方差、相关系数等)的性质及其应用. 而数理统计则是以概率论为基础，研究如何合理地采集或收集资料，并根据观测得到的资料对随机变量的分布、数字特征等作出科学的推断.

1.1 基本概念

从理论上讲，只要对随机现象进行足够多次的试验，被研究的随机现象的规律性就能清楚地呈现出来. 但实际上，试验的次数只能是有限的，有时甚至是很少的，因为采集某些数据时，常要将研究的对象破坏. 例如，观测灯泡的寿命时，就一定要把它用坏；检查炮弹性能时，就需要将它发射出去. 有时即使不破坏对象，时间、财力和人力也不允许. 特别当信息具有很强的时效性时，旷日持久的大量检查或试验，只能获得陈旧的、毫无意义的信息. 因此，数理统计要研究的问题便是怎样选择有效的抽样方法采集数据(**抽样**)，并利用抽样获得的有限数据，对被研究的随机现象的规律性作出尽可能精确而可靠的结论(**推断**).

在数理统计中研究的**基本问题**有四个：**参数估计**、**假设检验**、**方差分析**和**回归分析**. 为此，先引入几个基本概念.

1.1.1 总体与样本

在数理统计中，通常把所研究对象的全体称为**总体**(或**母体**)，而把组成总体的每个元素称为**个体**. 例如，某工厂生产的灯泡的寿命就是一个总体，而每个灯泡的寿命则是一个个体.

代表总体的指标(如灯泡寿命、钢筋强度等)的取值都有一定的随机性，因此，它们都是随机变量. 所以，总体就是某个随机变量可能取值的全体，常用 X,Y,Z (或 ξ,η,ζ)等表示. 总体的概率分布就是该随机变量的概率分布.

从总体 X 中抽取一个个体，就是对代表总体的随机变量 X 进行一次试验(观测). 从总体中随机地抽取 n 个个体：

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \tag{1.1}$$

就是对随机变量 X 进行了一组试验. 通常把由这 n 个试验组成的试验组(1.1)称为总体 X 的一个**样本**(或**子样**),样本中个体的数目 n 称为**样本容量**,其中 X_i 称为样本的第 i 个**分量**.

由于每个 X_i 都是从总体 X 中随机抽取的,在抽取之前,它可能取得 X 所有可能取值中的任何一个,可见这里的每个 X_i 都是一个随机变量,因此 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 就是一个 n 维随机变量. 在抽取之后,每一个 X_i 的值已完全确定,它是一个数,是对 X_i 的一次观测值,记作 x_i,这时称

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1.2}$$

为样本(1.1)的一个观测值,简称**样本观测值**.

我们抽取样本的目的是为了对总体的分布进行分析和推断. 因此要求抽样具有代表性,即应使总体的每个个体都有同等的机会被抽到,或每个样本分量 X_i 都与总体 X 有相同的概率分布. 此外,还要求抽样必须是独立的,即要求样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立的随机变量,或每个分量的观测结果不影响其他分量的观测结果,也不受其他观测结果的影响. 这样抽取的样本称为**简单随机样本**. 获得简单随机样本的方法称为**简单随机抽样**. 今后,凡是提到样本和抽样,都是指简单随机样本和简单随机抽样.

1.1.2 统计量与样本矩

样本来自总体,是总体的代表,是统计推断的依据. 但是我们抽取样本之后,并不直接用样本进行推断,而常需要对样本进行一番加工和提炼,把样本中包含的我们所关心的信息集中起来,以便对总体的某种特性作出推断.

例如,当我们取得总体 X 的一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时,常构造样本的平均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

来推断总体的均值. 当然,为了推断总体的其他特性,还要用到样本的其他函数. 为此,我们引入下面的定义.

定义 1.1.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,如果函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个实值函数,且 φ 中不包含任何未知参数,那么称

$$T = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{1.3}$$

为一个**统计量**.

由于构成统计量(1.3)的 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量,所以,作为 n 维随机变量的函数,统计量也是随机变量.

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个观测值,则称

$$t=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

为统计量(1.3)的一个**观测值**.

例 1.1.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,则当 μ 已知,σ 未知时,样本均值 $\overline{X}$,$Y=X_1+X_2$ 和

$$\widetilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \tag{1.5}$$

都是统计量,而

$$Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

不是统计量(因为它包含未知参数 σ).

数理统计中,**常用的统计量**有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{1.6}$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{1.7}$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \tag{1.8}$$

$$\overline{X^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad (k=1,2,\cdots) \tag{1.9}$$

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \quad (k=1,2,\cdots) \tag{1.10}$$

它们分别称为**样本均值**、**样本方差**、**样本标准差**、**样本 k 阶原点矩**和**样本 k 阶中心矩**.当取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值时,这些统计量的观测值分别为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$$\overline{x^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

显然上述统计量之间有如下的关系:

$$M_2=\overline{X^2}-\overline{X}^2=\frac{n-1}{n}S^2 \tag{1.11}$$

应用中还有一种常用的统计量称为次序统计量. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的样本,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的观测值,把它们由小到大排列并用$x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$表示,即

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

取值为$x_{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$的变量都是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的函数,记作$X_{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$,显然,$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$都是统计量,称它们为**次序统计量**,其中的$X_{(1)}$称为**最小次序统计量**,$X_{(n)}$称为**最大次序统计量**,次序统计量满足关系

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)} \tag{1.12}$$

它们的观测值为$x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$. 由次序统计量构成的

$$\mathrm{Me}=\begin{cases}X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)}+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & n\text{ 为偶数}\end{cases} \tag{1.13}$$

和

$$R=X_{(n)}-X_{(1)} \tag{1.14}$$

分别称为样本**中位数**和样本**极差**. 它们也是常用统计量.

1.1.3　计算器的使用

应用中,可用计算器方便地计算出某些常用统计量的值. 常见的学生计算器型号有北雁 CZ-118B、学考 XK-80、三帝 DDD118B、天雁 TY-82MS、信康 SC-82MS、海进 HJ-82MSC 等. 下面分功能介绍如何使用各种计算器计算某些统计量的值.

(1) 进入统计计算状态

类型 1:按 $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 并选择 1 进入统计计算状态,屏幕上出现 STAT.

类型 2:按 $\boxed{\text{MODE}}$ 选择 2 进入统计计算功能状态,屏幕上出现 SD.

类型 3:按 $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{ON/C}}$ 进入统计计算状态,屏幕上出现 STAT.

类型 4:按 $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{AC}}$ 进入统计计算状态,屏幕上出现 SD.

类型 5:按 $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{AC}}$ 进入统计计算状态,屏幕上出现 SD.

(2) 输入数据(或样本观测值)$x_1,x_2,\cdots,x_n$

类型 1:输入 x_1 $\boxed{\text{DATA}}$ x_2 $\boxed{\text{DATA}}$ $\cdots x_n$ $\boxed{\text{DATA}}$ 即可.

类型 2:输入 x_1 $\boxed{\text{DT}}$ x_2 $\boxed{\text{DT}}$ $\cdots x_n$ $\boxed{\text{DT}}$ 即可.

若某个数字 x_i 重复多次出现，则可一次输入多个，其方法是

类型 1：输入 x_i $\boxed{\times}$ 重复次数 $\boxed{\text{DATA}}$.

类型 2：输入 x_i $\boxed{\text{Shift}}\boxed{,}$（即 $\boxed{;}$）重复次数 $\boxed{\text{DT}}$.

(3) 清除某个错误数据

如果输入过程中发现某个数字 x_i 输入错误，则可通过下列方法清除：

类型 1：输入 x_i $\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\text{DATA}}$（即 $\boxed{\text{CD}}$）.

类型 2：输入 x_i $\boxed{\text{Shift}}\boxed{\text{DT}}$（即 $\boxed{\text{CL}}$）.

类型 3：输入 x_i $\boxed{\text{Inv}}\boxed{\text{DATA}}$（即 $\boxed{\text{CD}}$）.

(4) 获取统计量的值

类型 1：按 $\boxed{\text{RCL}}\boxed{\overline{x}}\boxed{=}$ 获得样本均值 $\overline{x}$；

按 $\boxed{\text{RCL}}\boxed{S_x}\boxed{=}$ 获得样本标准差 s.

类型 2：按 $\boxed{\text{Shift}}\boxed{\overline{x}}\boxed{=}$ 获得样本均值 $\overline{x}$；

按 $\boxed{\text{Shift}}\boxed{\sigma_{n-1}}\boxed{=}$ 获得样本标准差 s.

类型 3：按 $\boxed{\text{Inv}}\boxed{\overline{x}}\boxed{=}$ 获得样本均值 $\overline{x}$；

按 $\boxed{\text{Inv}}\boxed{\sigma_{n-1}}\boxed{=}$ 获得样本标准差 s.

其他统计量按相应的键名类似获得，其中 $\boxed{\sigma_x}$（或 $\boxed{\sigma_n}$）代表样本二阶中心矩的平方根 $\sqrt{m_2}$.

(5) 清空统计数据

一般计算器都有统计数据记忆功能，如果不进行清空操作，则在下次统计（哪怕重新开机）时计算器会将以前记忆的数据与新输入的数据合并成一组进行统计计算. 因此，在统计一组新数据时常需要清空以前输入的数据，为新一组数据的统计计算做好准备. 其方法是

类型 1：按 $\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\text{DEL}}\boxed{=}$.

类型 2：按 $\boxed{\text{Shift}}\boxed{\text{AC}}\boxed{=}$.

类型 3：按 $\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\text{ON/C}}$.

类型 4：按 $\boxed{\text{Inv}}\boxed{\text{AC}}$.

这时屏幕上 STAT（或 SD）消失，以前输入的数据全部被清除.

当然，上述列举的操作方法并不是全部，不同计算器有不同的操作方法，也许

是某两种类型的组合. 随着科技的发展,计算器也在不断更新,功能也越来越强,其操作方法也在不断改进. 因此,具体的操作方法应以厂家提供的说明书为准.

1.2 基本分布

本节介绍在数理统计中常用的几个基本分布. 为此,先引进分位数定义.

定义 1.2.1 设 X 为随机变量,则称满足

$$P\{X \geqslant v_\alpha\} = \alpha \tag{1.15}$$

的 v_α 为 X 的**上侧 α 分位数**,简称为**(上侧)分位数**.

1.2.1 标准正态分布

标准正态分布 $N(0,1)$是构造其他分布的基础,其密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.16}$$

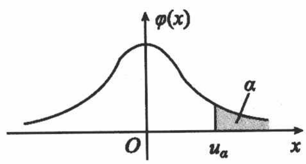

图 1.1　上侧分位数 u_α

它的图形关于 y 轴对称(图 1.1).

本书附表 3 给出了标准正态分布函数的取值情况. 对于数 $\alpha(0<\alpha<1)$,通过查表,可求出满足等式

$$P\{X \geqslant u_\alpha\} = \int_{u_\alpha}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \alpha \tag{1.17}$$

的上侧分位数 u_α(显然 $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$). 当 $\alpha = 0.025$ 时,可查得 $u_{0.025} = 1.96$.

1.2.2 χ^2 分布

定理 1.2.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量,且都服从标准正态分布 $N(0,1)$,则它们的平方和

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{1.18}$$

的分布密度是

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

其中 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$为**伽马函数**①在$\frac{n}{2}$处的值.这种分布称为**自由度为 n 的 χ^2 分布**,记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

证 由式(1.18)知 $\chi^2\geqslant 0$,所以当 $x\leqslant 0$ 时,$f_{\chi^2}(x)=0$.

下面用归纳法证明在 $x>0$ 时结论也成立.

当 $n=1$ 时,由随机变量函数的分布知 $\chi_1^2=X_1^2$ 的分布函数为

$$F_{\chi_1^2}(x)=P\{\chi_1^2\leqslant x\}=P\{X_1^2\leqslant x\}$$
$$=P\{|X_1|\leqslant\sqrt{x}\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

所以

$$f_{\chi_1^2}(x)=\frac{d}{dx}F_{\chi_1^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

设 $n=k$ 时式(1.19)成立,即 $\chi_k^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2$ 的密度为

$$f_{\chi_k^2}(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

则由卷积公式知当 $n=k+1$ 时,$\chi^2=(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2)+X_{k+1}^2$ 的密度为

$$f_{\chi^2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\chi_k^2}(t)f_{\chi_1^2}(x-t)dt$$
$$=\int_0^x\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{k}{2}-1}(x-t)^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{x-t}{2}}dt$$
$$\xlongequal{\frac{t}{x}=u}\frac{x^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du$$

其中

$$\int_0^1u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du=B\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

---

① 伽马(gamma)函数是由反常积分

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx\quad(p>0)$$

定义的函数.该函数具有性质

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\quad\Gamma(1)=1,\quad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

是**贝塔函数** $B(p,q)$[①] 在点 $\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的值，将其代入，则有

$$f_{\chi^2}(x)=\frac{x^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}x^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

即 $n=k+1$ 时式(1.19)也成立. 故由归纳法知对任意的正整数 n，式(1.19)均成立.

根据定义(1.18)，我们容易求得 χ^2 分布的期望和方差分别为

$$E\chi^2=n,\quad D\chi^2=2n \tag{1.20}$$

事实上，我们有

$$E\chi^2=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\sum_{i=1}^{n}DX_i=n$$

$$\begin{aligned}D\chi^2&=D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[EX_i^4-(EX_i^2)^2\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx-1\right]=\sum_{i=1}^{n}(3-1)=2n\end{aligned}$$

利用卷积公式，我们还可以证明 χ^2 分布具有下面的性质(见习题 1.3).

性质（χ^2 分布的可加性）　如果 X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim\chi^2(n_1),\quad Y\sim\chi^2(n_2)$$

则它们的和也服从 χ^2 分布，即

$$X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2) \tag{1.21}$$

图 1.2 给出了 $n=1,5,15$ 时 χ^2 分布的密度曲线.

本书附表 5 中，对不同的 n 及 $\alpha(0<\alpha<1)$，给出了满足等式

$$P\{\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f_{\chi^2}(x)dx=\alpha \tag{1.22}$$

的**上侧分位数 $\chi_\alpha^2(n)$**(图 1.3).

例如，当 $n=10,\alpha=0.05$ 时，可以查得 $\chi_{0.05}^2(10)=18.31$.

---

① 贝塔函数是由反常积分

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

定义的函数. 该函数具有性质

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(p>0,q>0)$$