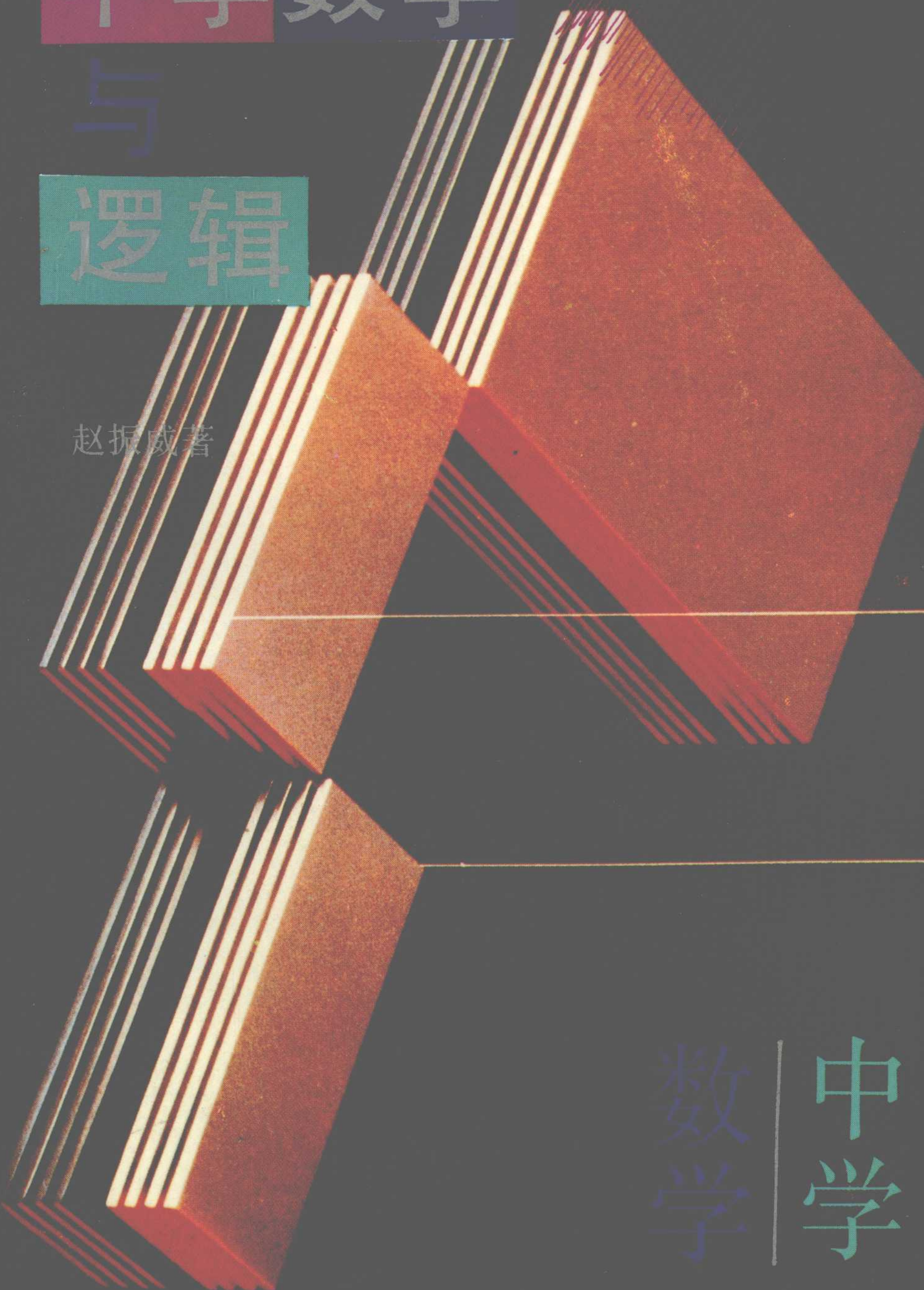
中学数学与逻辑

赵振威著



中学数学

中学数学与逻辑

中学数学与逻辑

(苏)新登字第003号

中学数学与逻辑

(修订本)

赵振威 著

责任编辑 何震邦

出版发行:江苏教育出版社

(南京中央路165号,邮政编码:210009)

经 销:江苏省新华书店

印 刷:常熟市印刷二厂

(常熟市大义镇,邮政编码 215557)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.625 插页 2 字数 210,900

1992年2月第2版 1992年2月第1次印刷

印数 1—2,000 册

ISBN 7—5343—1445—3

G·1282 定价:2.80元

再版说明

本书第一版写于1978年初。十余年来，中学数学教学改革深入发展，教学大纲和教材内容日趋完善，加强了基础知识教学和基本技能训练，重视了能力的培养，教学的整体要求稳步提高。这些变化，对逻辑提出了更为广泛的要求。

数学的基础知识，包括数学的概念、数学的命题和数学的方法三个方面的内容。数学的基本技能，一般指与基础知识相关的计算、论证、画图和识图等方面的技能。数学的能力，主要是运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用数学知识分析和解决实际问题的能力。数学的知识、技能和能力，是以一定的逻辑结构为网络，密切联系着的统一整体。从某种意义上说，掌握一定的逻辑知识，对于教好、学好中学数学，具有重要的指导意义。

鉴于上述考虑，修订时增补了与现行中学数学教材密切联系的逻辑知识，对于定义方式、关系命题、复合命题、充要条件、公理化方法、演绎推理的形式和规则等方面的内容，都进行了相应的充实和调整，为了深入浅出地阐明有关问题，在具体展开时，还适当渗透数理逻辑的一些初步知识。

为帮助读者深切地体会逻辑对数学的指导作用，加强本书的应用性和可读性，修订时将绪论单独成章，深入讨论了数学的对象和特点；在其他各章中，结合中学数学内容，在理论和实践的结合上，指出逻辑知识在发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程中的各种具体应用，以逻辑方法为指导，有重点地总结解答数学问题的若干规律，从根本上提高分析和解决问题的能力。

考虑到逻辑知识的教法问题在中学数学教学法的有关著作中已作详细研究，为了节省篇幅，削枝强干，在修订时删去了这方面的内容。

此外，修订时还注意把书中的某些名词术语，与现行的形式逻辑著作相统一。

赵振威

1990年9月于虞山

前　言

形式逻辑是一门关于思维形式和规律的科学。它的基本规律，是我们正确思维的最起码要求。毛泽东同志曾号召我们要学一点逻辑，并明确提出关于逻辑思维的基本要求：概念要明确，判断要恰当，推理要合乎逻辑，证明要有说服力。

逻辑思维的这些基本要求，对于中学数学教学是十分必要的。教学中，无论是讲述数学概念，推导数学公式，还是证明数学定理，解答数学习题，都需要运用形式逻辑的各种思维形式，遵守思维基本规律。学生中间出现的概念模糊不清，判断缺少根据，解题不得要领，证明逻辑混乱等等现象，也是和缺少逻辑知识密切相关的。因此，学一点逻辑，对于加强数学基础知识教学，提高学生分析问题、解决问题的能力，是很有帮助的。

本书试图以唯物辩证法作指导，从中学数学教学的实际需要出发，介绍一些数学中常用的逻辑知识。全书包括三个部分：绪论中分析了数学的抽象性特点，阐述了形式逻辑在数学中的积极作用；第一章至第五章，根据逻辑思维的基本要求，对思维形式(概念、判断、推理、证明)和思维基本规律(同一律、矛盾律、排中律、充足理由律)作比较系统的介绍，并结合中学数学教学中的有关问题，作了比较详细的讨论；结束语，运用一分为二的观点，指出形式逻辑的局限性，并进一步阐明学习和运用形式逻辑必须以唯物辩证法作指导。每章都附有一定数量的练习题，供读者练习思考。

南京大学莫绍揆教授审阅了本书初稿，对笔者以热忱帮助，恳

心指导，提出了极有价值的修改意见。陆明德、毛振濬、黄瑞清等同志，也提出了很多宝贵的建议。在此谨致诚挚的感谢。

由于笔者水平有限，缺点、错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

作者

1978 年 3 月

目录

第一章 绪论

§1 数学的对象

数学，由于实践活动的需要，在古代便已经产生了，现在已发展成为一门分支众多、体系庞大、用途极广的科学。

由于数学在发展过程中不断取得新的成就，内容愈来愈丰富，人们关于数学的对象的认识，也在不断地深化和更新。

19 世纪下半叶，恩格斯对数学的对象给出了如下的定义："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料"。同时指出："但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线、a 和 b 与 x 和 y，即常数和变数"。(«反杜林论»)

恩格斯的上述定义，对于以代数、几何与分析为主体的早期数学，确实是很恰当的概括，曾被数学界广为接受，并认为是一个精辟的科学论断。然而，20 世纪数学的发展，显得有必要对恩格斯所作的定义加以补充和发挥。

本世纪 50 年代，苏联数学家 А.Д. 亚历山大洛夫在其«数学概观»中写道："在恩格斯写«反杜林论»的时候，即在 1876—1877 年，非欧几何学和多维空间几何学刚刚在数学家之间得到承认，群论刚刚形成，集合论刚刚产生，而数理逻辑仅仅萌芽。所以可以理解，数学发展的新阶段的特点不能由恩格斯详尽地描述出来；但虽然如此，我们在他的论断中也可以找到对于理解这些特点的指

示。”

事实上，恩格斯在《自然辩证法》中还有关于数学的更具有普遍性的论断，他指出：“数学是数量的科学”。我国数学界曾就这一提法进行讨论。著名数学家关肇直查考了“数量”一词的德文原文(Quantitat)，主张将译文改为“数学是量的科学”，并于 1957 年建议把数学定义为“研究现实世界中量的关系的科学”。当时，虽有非议，觉得“量”的概念不太确定，但许多数学工作者都赞同这个定义，并且认为，这里所说的量，既包括来源于现实世界空间形式和数量关系的量，又包括通过数学思维合理地推导出来的或构想出来的一切可能的量、想象的量(如虚数等)；对于量的关系，则应包括量的变化、以及各种量变之间的关系。

“数学是量的科学”或“数学是研究量的关系的科学”，看来是对数学的对象的一种较为恰当的概括。但在我国数学界，渐渐地有更多的人提出了不同意见，认为把数学的研究对象都归结为量和量的关系，未免过于笼统，未必是一种好的定义。也有人提出由于把空间形式淹没在量的概念之中，以致难以突出空间形式的重要性，使中学和大学的几何课程没有得到应有的重视。不少学者认为，不如仍然引用恩格斯的论断：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”，只要对空间形式和数量关系作广义的解释就可以了。目前，《全日制中学数学教学大纲》在谈到数学的对象时，还是引用恩格斯的这个定义。

近几年来，我国数理逻辑学家胡世华首先指出，恩格斯在《自然辩证法》一书中，还有一个值得重视的提法，即“数学——一种研究思想事物(虽然它们是现实的摹写)的抽象的科学”。把数学的研究对象看作一种思想事物，这对数学的性质和特点是一种很好的刻画，抓住了数学的本质特征。数学的对象已是经过人的思维加工的思想实体，一种人对自然界的概括和认识，然而它仍具有客观性。

现在，关于数学的对象仍存在多种说法，这方面的讨论还在继续进行。例如，法国的布尔巴基(Bourbaki)学派认为："数学，至少纯粹数学，是研究抽象结构的理论"；苏联的一些学者提出，数学的研究对象是"客观世界和主观世界的数量关系和结构关系"；最近，我国数学家丁石孙教授认为："数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系"；等等。看来这些看法都是从各个不同的侧面，对数学的对象作了较好的概括，在本质上是不矛盾的。

§2 数学的特点

在我国，直至80年代，一些著作或文章，在谈到数学的特征时，一般仍引用苏联名著《数学——它的内容、方法和意义》中的提法，把数学的特点归结为三性：抽象性、精确性和应用的广泛性，只是在具体解释上，比原著更趋合理。

一、抽象性

任何一门科学，都具有抽象性的特征。但是，数学的抽象，在对象上、程度上都不同于其他自然科学*和社会科学的抽象。

首先，数学的抽象撇开对象的具体内容，仅仅保留空间形式或数量关系；这些形式和关系，已是一种形式化的思想材料，或者就象现代数学家所说的一种抽象结构。例如，世界上本来并没有"二次方程"，它是人们从现实世界数量关系中抽象出来的思想材料。没有人，就不会有自然数、方程式、函数和勾股定理，也就没有数学

* 当前有些科学家主张，数学不属自然科学。认为，现代科学一般包括五大基本部类：研究自然界运动规律的自然科学；研究社会运动规律的社会科学；研究思维运动规律的思维科学；研究三大领域（自然、社会、思维）共同具有的量的关系的数学；研究三大领域最一般规律的哲学。

的研究对象。与此相对照的是，没有人固然没有原子物理学，但原子还是客观地存在于人脑之外的现实中。

其次，数学的抽象是逐步发展的，它达到的抽象程度大大超过了自然科学中的一般抽象。从直接概括现实对象属性的抽象，到拓朴空间、一般代数系统、算法等等高水平的抽象，都是从简单到复杂、从具体到抽象这样不断深化的过程。也就是说，数学的抽象不仅表现在广度上，而且表现在不同层次的深度上。有人说数学具有高度抽象性或极端抽象性是不过分的。

二、精确性

数学的精确性，指的是数学具有逻辑的严密性和结论的确定性或可靠性。

数学的对象是形式化的思想材料，它的结论是否正确，一般不能像物理等实验学科那样，借助于可重复的实验来检验，而主要地要靠严格的逻辑推理来证明；而且，一旦由推理证明了结论，那么这个结论也就是正确的。

当然，逻辑的严密性不是绝对的，在数学中也不能事事处处都要求逻辑的严密性。例如，微积分刚建立时，逻辑上是很不严密的，然而其结论是正确的，获得了惊人的有效应用；直到后来，经过数学家很长时间的努力，才给微积分建立了比较严密的理论基础。类似微积分这样的事例在数学中还很多，不过逻辑上的不严密只能是暂时的（虽然可能上百年、上千年）。所以，数学与其他科学相比较，它还是以具有逻辑的严密性而著称。

三、应用的广泛性

数学的抽象性，保证了它的应用的广泛性。数学所研究的量及其关系，不只存在于某一特定的物质运动形态中，而是普遍存在于各种物质运动形态之中，因而它必然地能够应用于各种物质运

动形态的研究。

19世纪末，恩格斯在《自然辩证法》一书中，曾经总结过当时的数学应用："在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已是比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中＝0。"一百多年来，随着科学技术的飞速发展，数学的应用已迥异往昔。

例如，就当年应用"＝0"的生物学而论，现在已越来越多地需要数学。比如，指数函数可以描述示踪元素在机体内随时间的衰变；对数函数可以描述细胞、微生物的生长过程；极坐标系统可以描述鸟类、鱼类等的定向、定位的行为，还可以建立描述植物叶子、花瓣、叶脉形状的各种曲线方程；常微分方程组可以描述生物细胞体内各种液体流动及生物热传递和能量传递的过程。凡此种种，生动地说明了，一切科学技术原则上都可以用数学来解决有关的问题。

近几年来，不少学者对传统的"三性"进行商榷，提出了数学的语言性、优美性等特征。

四、语言性

数学之所以重要，就在于它是通用、精确、简约的科学语言。

作为知识体系的科学，必须用语言表达。最初是日常使用的生活语言；后来，为了精确和清晰，使用符号语言（如化学符号和化学方程式）、图形语言（如工程设计中的图纸）。但是，这些语言都只能在各自领域中发生作用。唯有数学语言，它是一切科学都使用的语言。马克思认为，一门科学只有在成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步。

人们在科学交往中，常常需要用最少、最明确的语言传递最大量、最准确的信息。数学语言没有含糊不清或者产生歧义的缺点；并且也是一种速记语言，一个公式胜过一打说明。正因于此，数学

语言是全世界人民使用最广泛的语言. 以至人们企图把勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 作为星际生物间通讯的语言.

五、优美性

数学中包含美的思想是古希腊毕达哥拉斯最早提出的，19世纪以后不少数学家都提到数学美，当代美籍华裔数学家王浩在其著作《从数学到哲学》中明确地提出了数学优美性的特性. 书中对这一特征未作详细解释，一般的理解是：数学从表面上看好像是枯燥乏味的，然而它却具有一种隐蔽的、深邃的美，一种理性的美. 例如，数学定理的和谐美，数学推理的完全美，数学语言的简约美，数学构思的创新美，等等.

怎样理解数学的美？其涵意是什么？标准是什么？这些都是需要我们进一步探讨的课题. 有的数学家把数学和艺术联系起来，称"数学是创造性的艺术"；还说，数学家和艺术家一样地生活、思考和工作.

§3 中学数学与形式逻辑

上面，我们概略地讨论了数学的对象和特点. 不难看出，数学的研究对象，决定了数学的特点；数学的抽象性、精确性等特征，使形式逻辑在数学理论的发现、创造、整理和加工过程中，表现了一定的积极作用.

形式逻辑是一门关于思维的形式（概念、判断、推理、证明）及其规律（同一律、排中律、矛盾律、充足理由律）的科学，它要求思维过程的准确性和具有条理性. 这些要求，对于数学特别是初等数学是合理的、必要的. 首先，在数学理论的整理和加工中，无论是概念的表述，还是进行判断、推理，都需要运用形式逻辑的规则，遵循思维的基本规律. 第二，数学中的推理论证，能够使我们对数学

对象的考察从现实事物的个别的、偶然的状态中解脱出来，便于抓住数学问题的本质联系，从而使数学知识从一些个别的、特殊的经验事实上升到一般，具有普遍性，并把一些个别的、孤立的结果联系起来，使数学知识带上条理性，形成理论系统。第三，在数学理论的探索过程中，需要运用形式逻辑的各种方法(如分析和综合，抽象和概括，归纳和演绎，类比和假设等等)，需要从一定的概念出发，从刻划被考察对象的基本特性出发，运用逻辑推理，引出进一步的结论来。这样，逻辑推理又成为探求新结果的一个重要步骤。

恩格斯指出："初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样"。(«反杜林论»)从中学数学的内容来看，它所研究的数量关系，主要还是常量，它所讨论的空间形式，也是比较简单的。因此，在唯物辩证法的指导下，学一点逻辑知识，对于教好、学好中学数学是十分必要的。这将有助于我们正确地进行思维，在认识数学对象的过程中达到概念明确，判断恰当，推理合乎逻辑，证明有说服力；也有助于我们深刻理解数学本质，自觉掌握数学规律，提高分析问题和解决问题的能力。

第二章　数学概念

§1　概念的意义

概念是反映客观事物本质属性的思维形式.

事物有很多属性,其中有的是本质属性,有的是非本质属性. 本质属性是事物存在的根据,区分的标志;非本质属性是事物外在的属性,它对事物存在及其区别不起决定性的作用. 例如,圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合, 这是圆的本质属性. 至于圆的半径的长短,就不是圆的本质属性,而是非本质属性.

列宁指出:"概念来自本质, 而本质来自存在."(《黑格尔‹逻辑学›一书摘要》) 人们对客观事物的认识,一般是通过感觉、知觉和表象, 形成感性认识, 再经过分析、综合、抽象、概括等思维活动, 对丰富的感性材料进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工整理和改造制作,抓住事物的本质,事物的全体, 事物的内部联系,形成关于这一事物的概念.

例 1　关于点的概念. 几何学中点的概念, 是从现实世界中经过理想化抽象得来的. 日常生活中经常遇到的水点、雨点、万米长跑的起点、河流的交会点、某学校的所在地点等, 都可以作为"点"的现实原型. 这些例子中的点的物理性质各不相同, 大小也不一样,但它们有一个共同的特征,即各自占据着一定的位置. 几何学中的点,舍弃了事物的物理性质,更无大小可言, 仅仅表示位置,也就是纯属观念性的东西. 点是几何学中的基本元素,除了表示位置, 还有其他作用. 比如,点的集合可以构成直线、曲线, 也