

新编

奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主编：冯士腾

# 高中 数学

下册

展开思想的翅膀

活跃在奥林匹克广场上

为了明天的成功

哪怕今天摸爬滚打

让我们手挽手

深控智慧的力量

奋斗——前进

这里是练兵的战场



科学技术文献出版社

◇新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

# 高中数学

(下册)

主编 冯士腾  
编者 冯士腾 李方烈  
付小平 祝厚元  
彭 林 王小丹  
李 彬 印志建

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

## 图书在版编目(CIP)数据

高中数学(上、下册)/冯士腾主编.-北京:科学技术文献出版社,1999.3

(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)

ISBN 7-5023-3224-3

I. 高… II. 冯… III. 数学课-高中-教学参考资料  
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38981 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大  
楼 B 段/100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑汽车站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953

图 书 编 务 部 电 话:(010)62878310, (010)62877791, (010)62877789

图 书 发 行 部 电 话:(010)68515544-2945, (010)68514035, (010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544-2172

图 书 发 行 部 传 真:(010)68514035

图 书 编 务 部 传 真:(010)62878317

E-mail: stdph@istic. ac. cn

策 划 编 辑:王亚琪 王 琦

责 任 编 辑:蒋 驰

责 任 校 对:梁文彦

责 任 出 版:周永京

封 面 设 计:孟朝阳

发 行 者:新华书店北京发行所

印 刷 者:三河市富华印刷厂

版 ( 印 ) 次:1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

开 本:850 × 1168 32 开

字 数:294 千

印 张:11

印 数:1—10000 册

定 价:26.00 元 (上册 12.00 元 下册 14.00 元)

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

(京)新登字 130 号

### 内 容 简 介

本书是以高中数学知识为主线,为高中数学课外活动编写的教材。

全书分为上下两册,每册又分为基础篇与提高篇。基础篇内容与高中数学教材同步,与课堂教学实际联系密切,并适当补充了参加高考及数学竞赛的必备知识。提高篇以高中数学教学大纲为依据,内容覆盖了高中数学竞赛的主要内容。通过对典型例题的分析,向学生介绍了数学竞赛中常用的数学思想方法,以及其在解题中灵活、多变的应用,以帮助学生提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为数学竞赛辅导读物,也可供教师、高考学生、高中学生参考阅读。

## 科学技术文献出版社 向广大读者致意

---

科学技术文献出版社成立于1973年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

## 前 言

近些年来,世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来,不断取得优异成绩。1997年,我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第37届世界数学奥林匹克竞赛,6名选手均获金牌,并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动,不但为国家争得了荣誉,也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生学习完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容,在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩,同时为了配合目前中小学素质教育,我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师,编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师,全部来自于教学第一线,具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验,在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上,博采众家之长,形成了本丛书独具特色的风格和特点:

(1)学科门类齐全。全套丛书共18分册,涵盖数学、物理、化学、生物、计算机5个学科,跨越小学、初中、高中三个阶段,是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度,选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题,进行重点讲解,旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要,选择针对性强的专题,以点带面,重点讲解。

(3)科学准确,结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排,内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题,分析透彻,注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三,力求使学生在理解的基础上,学会灵活运用。

(4)新颖独特,趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣,例题讲解富有启发性,注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上,全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领,各分册除对基础知识进行系统讲解外,还配备有一定数量的练习,并附有提示及答案,供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益,能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处,欢迎读者批评指正。

## 新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

### 主要作者简介

- 吴文虎** 中国计算机学会普及委员会主任  
国际信息学奥林匹克中国队总教练  
清华大学计算机系教授
- 吕品** 全国计算机教材审查委员会委员  
北京信息学奥林匹克学校副校长  
中学高级教师
- 刘尧** 北京教育学院化学教研室主任、教授
- 陆禾** 北京14中化学特级教师  
北京市有突出贡献的专家
- 黄儒兰** 北京教育局化学教研室主任  
中学特级教师
- 冯士腾** 北京宣武区教育学会秘书长  
中学特级教师
- 李方烈** 北京宣武区中学数学教研室主任  
中学特级教师
- 赵欣如** 北京师范大学生物系教授  
中国生物奥林匹克竞赛委员会委员
- 曹保义** 北京师范大学二附中副校长  
生物教研组组长  
中学高级教师

- 高建军** 湖南长沙一中生物教研组组长  
中学高级教师
- 石长地** 首都师范大学研究生处教师  
数学奥林匹克专业研究生毕业  
教育学硕士
- 贺贤孝** 辽宁师范大学数学系教授  
辽宁数学教育学会副会长
- 杨 骞** 辽宁师范大学数学系副教授  
大连市奥林匹克学校校长
- 由 峻** 北京市宣武区中学教研室主任
- 秦家达** 北京市 66 中物理教研组组长  
中学高级教师
- 高玉镶** 北京师范大学附中物理高级教师
- 马凌风** 北京市 15 中物理教研组组长  
中学高级教师
- 王健子** 北京市 15 中物理高级教师





基础篇

# 目 录

## 基础篇

☞	第一讲	不等式的解法及其应用 .....	(277)
☞	第二讲	不等式的证明方法和技巧 .....	(297)
☞	第三讲	数列与递推 .....	(319)
☞	第四讲	数学归纳法 .....	(342)
☞	第五讲	解复数问题的基本思路 .....	(360)
☞	第六讲	排列、组合应用题的常见模型 .....	(388)
☞	第七讲	圆锥曲线的定义及其应用 .....	(400)
☞	第八讲	直线与圆锥曲线 .....	(420)
☞	第九讲	曲线的对称问题 .....	(440)
☞	第十讲	曲线系 .....	(458)
☞	第十一讲	极坐标及其应用 .....	(472)
☞	第十二讲	参数方程及其应用 .....	(489)
☞	第十三讲	解析几何中的最值问题 .....	(511)
☞	第十四讲	怎样解应用问题 .....	(547)

## 提高篇

第十五讲	几何不等式	(563)
第十六讲	数列的性质	(575)
第十七讲	无限下推法	(587)
第十八讲	复数方法	(592)
第十九讲	有重复的排列与组合	(601)
第二十讲	圆排列	(609)

## 第一讲 不等式的解法及其应用

不等式的解法及证明都是基于对实数理论及不等式性质的正确合理的应用. 这些理论和性质主要有

1. 若  $a, b \in R$ , 则

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0; \quad \textcircled{1}$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0; \quad \textcircled{2}$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0; \quad \textcircled{3}$$

以及

正数的相反数是负数, 反之亦然; ④

正数与正数之积是正数; ⑤

负数与负数之积是正数; ⑥

正数与负数之积是负数. ⑦

2.

$$a > b \Leftrightarrow b < a; \quad \textcircled{8}$$

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c; \quad \textcircled{9}$$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c; \quad \textcircled{10}$$

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc; \quad \textcircled{11}$$

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc; \quad \textcircled{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + d; \quad \textcircled{13}$$

$$\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bd; \quad \textcircled{14}$$

$$a > b > 0, n \in N \Rightarrow a^n > b^n; \quad \textcircled{15}$$

$$a > b > 0, n \in N \text{ 且 } n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}. \quad \textcircled{16}$$

或

3. 若  $a > 0, x \in R$ , 则

$$x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a;$$

$$x^2 > a^2 \Leftrightarrow |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a;$$

$$4. \quad |a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

在此基础上,不等式的主要解法有

$$5. \text{ 若 } \left. \begin{array}{l} ax \vee b \\ a > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \vee b;$$

6. 若  $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \cdots > x_n$ , 则不等式

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \vee 0;$$

可用区间法(或称根轴法、穿线法)求解.

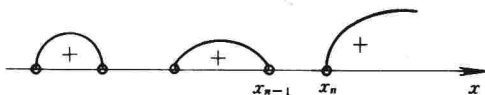


图 1-1

如图 1-1, 法则是在数轴上标出不等式的诸根(零点), 但不计重根, 然后从最右区间数起, 隔一个跳一个, 这些区间内, 不等式为正, 其余区间为负. 由于数轴上仅标出零点(若无因式“ $x$ ”, 则该“数轴”上不要将“0”标出!)亦称“根”, 故称此轴为“根”轴. 其中符号“ $\vee$ ”表示“ $>$ ”, “ $\geq$ ”, “ $<$ ”, “ $\leq$ ”之一.(注意最高次项系数须为正数)

7. 分式不等式、二次不等式, 皆可使用区间法(但必须先转化成“6”的形式).

8. 在解更复杂的不等式时, 应注意在不等式所含诸函数的公共定义域中求解不等式, 否则可能扩大或缩小解集.

9. 若有可能, 不要放弃图解法解不等式.

【例 1】不等式  $\sqrt{4 - x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$  的解集是( )

(A)  $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

(B)  $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$

$$(C) \{x \mid -2 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$$

$$(D) \{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq \sqrt{3}\}$$

分析：因为不等式左边包含  $\sqrt{4-x^2}$ 、 $\frac{|x|}{x}$ ，故不等式的解集应是这两个函数公共定义域的子集：

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ x \neq 0, \\ \sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 0, \\ \sqrt{4-x^2} \geq -1, \\ x > 0; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 0, \\ \sqrt{4-x^2} \leq 1, \\ x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$  解集是  $[-\sqrt{3}, 0)$  或  $(0, 2]$  故选 B.

说明：本题是单选题，若用排除法淘汰错误答案，做起来，更简便：

令  $x = -2$ ，由原不等式将导致  $-1 \geq 0$  的矛盾，故 A、C 错；又显然  $0 < x \leq 2$  显然是不等式的解集的一部分，但 D 中却不包含它，故 D 也应排除，因而肯定 B 对。

【例 2】解不等式

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0.$$

解： $\because$  原不等式即

$$(x+1)(x-1)(x-3) > 0,$$

由区间法

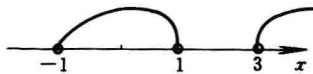


图 1-2

可见解集为  $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

**例 3** 解不等式

$$\frac{1}{4} < \left| \frac{x}{2} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

**分析:** 有关绝对值的不等式的解法, 一般是找零点分区间, 分别讨论. 但若充分利用绝对值的几何意义, 可大大简化计算.

**解:** 原不等式即

$$\frac{1}{2} < |x - 2| < 1.$$

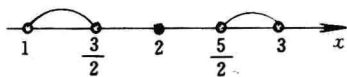


图 1-3

表示  $x$  到点 2 的距离小于 1 且大于  $\frac{1}{2}$ , 如图可见解集为

$$\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 2\right).$$

**例 4** 解不等式

$$\sqrt{2x+5} > x+1$$

**分析:** 本题可以分类讨论, 在函数的定义域中求解不等式, 但若运用图像法可更简便.

**解:** 先解方程、不等式组

$$\begin{cases} \sqrt{2x+5} = x+1, \\ 2x+5 \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5=x^2+2x+1 \\ x \geq -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2.$$

$\therefore$  不等式对应曲线  $y = \sqrt{2x+5}$  在直线  $y = x+1$  上方部分, 故  $x \in \left[-\frac{5}{2}, 2\right]$ .

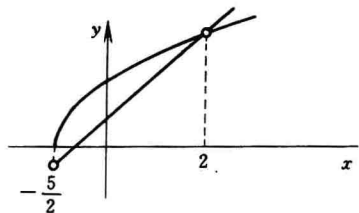


图 1-4

**【例 5】** 解不等式

$$\log_3(x-1) \leq \log_9(2x-1).$$

**解:** 原不等式的解, 等价于以下不等式组的解.

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ (x-1)^2 \leq 2x-1, \end{cases}$$

$$(\because \log_3(x-1) = \log_9(x-1)^2)$$

解之, 得原不等式的解是  $(1, 2+\sqrt{2}]$ .

**【例 6】** 已知  $a > 0, a \neq 1$ , 解关于  $x$  的不等式

$$a^{x^4-2x^2} > \left(\frac{1}{a}\right)^{a^2}.$$

**解:** (i) 当  $a > 1$  时

$$\therefore a^{x^4-2x^2} > a^{-a^2},$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + a^2 > 0,$$

$$\text{而 } x^4 - 2x^2 + a^2 = (x^2 - 1)^2 + (a^2 - 1),$$

由于  $a > 1$ , 而恒为正, 故  $x \in \mathbb{R}$ ;

(ii) 当  $0 < a < 1$  时,

$$a^{x^4-2x^2} > a^{-a^2},$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + a^2 < 0,$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a^2} < x^2 < 1 + \sqrt{1-a^2}$$



$$\therefore x \in \left( -\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}, -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} \right) \\ \cup \left( \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}, \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} \right).$$

【例 7】 设  $|k| \leq 2$ , 关于  $x$  的不等式

$$2x - 1 > k(x^2 - 1) \quad (1)$$

恒成立, 求  $x$  的范围.

解: 设  $f(k) = (x^2 - 1)k - (2x - 1)$ ,

则 (1) 式即  $f(k) < 0$ .

(i) 当  $|x| > 1$  时,  $f(k)$  是一次增函数, 为使  $|k| \leq 2$ ,  $f(k) < 0$ , 其充要条件是

$$f(2) < 0,$$

即

$$2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0,$$

解得

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

注意这是在  $|x| > 1$  的前提下解的, 故

$$1 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) 当  $|x| < 1$  时,  $f(k)$  是一次减函数, 当  $|k| \leq 2$ , 为使  $f(k) < 0$ , 其充要条件是

$$f(-2) < 0,$$

即

$$-2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0,$$

解得

$$x < \frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \text{ 或 } x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2},$$

注意到这是在  $|x| < 1$  前提下求解的, 故

$$\frac{-1+\sqrt{7}}{2} < x < 1.$$