国际奥林匹克数学竞赛

北京西城区数学奥校编写组　编

初中数学选讲及自测题

（第一册）

中国广播电视出版社

国际奥林匹克数学竞赛

初中数学选讲及自测题

第 一 册

北京西城区数学奥校编写组

中国广播电视出版社

（京）新登字097号

国际奥林匹克数学竞赛
初中数学选讲及自测题
第一册
北京西城区奥校编写组　编
中国广播电视出版社出版发行
（北京复外广播电影电视部灰楼　邮政编码100866）
北京大兴沙窝店印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米　32开　7.625印张　162（千）字
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—10100册　定价4.60元
ISBN　7—5043—2019-1/G·751

前　言

在中学数学教学中，开拓第二课堂的工作受到普遍重视，组织数学竞赛活动已成为推动这项工作的重要一环。

为使初中学生开阔视野，启迪思维，发展智力，提高能力，推动数学奥林匹克活动的开展，多年来，北京市西城区广泛开展初中教学竞赛辅导讲座活动，并取得了较好的成绩。

为了提高竞赛辅导讲座的质量，我们组织多年从事讲课辅导的教练员，编写了《国际奥林匹克数学竞赛初中数学选讲及自测题》一书，分三册出版，供初中三个年级使用。本书为一册。全书基本上概括了初中数学重要基础知识，基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围的知识作了系统归纳，并特别着重于数学思维能力、数学思想方法和解题方法、解题能力的训练。

书中每个专题，首先概括知识要点，然后选择典型题目进行分析，强调解题思路的分析和揭示解题规律，最后附有本专题的自测题及其答案，意在使读者了解竞赛的要求，提高分析问题和解决问题的能力，掌握驾驭知识的主动权，从而为参加竞赛活动打下良好的基础。

参加本书编写工作的有罗小伟、陈娴、王永俊、张鸿菊、陶文中、郑康、金宝铮、李岗、欧阳东方、李松文和郑廉等同志。

在编写过程中，曾得到茅瑾同志的大力支持，特在此表示谢意。

编　者

1991年10月北京

目　录

第一讲　整数与整除

本讲涉及的有关整数及整数的整除性问题，是数论中最基本的问题，也是近些年来国内外数学竞赛中常出现的内容之一。中学课本中某些章节对此问题虽有涉及，但不够系统。本讲将在初一学生能接受的范围内，较系统的给出一些基础知识，并通过例题给出一些常用的解题方法与技巧。这些内容对培养学生的逻辑思维和推理能力是十分有益的。

一、内容提要

1. 十进整数的表示方法

（1）正整数可以用0，1，2，…，9十个数码中的一个或若干个，可重复的一个排列表示。如$\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$表示一个$n+1$位整数，其中$a_i$是0，1，2，…，9中的某个数字，$i=n$，$n-1$，…1，0。$a_n\neq 0$。

（2）$n+1$位整数$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$，可以用一个多项式表示，即

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

（3）某些特殊表示

① 为了突出个位数字，整数可以表示为$10x+y$，其中x是一个正整数，y是0，1，…，9中的一个数码。

② 某些有规律重复排列数码的整数，可以有如下的表示：

$$\underbrace{\overline{aa\cdots aa}}_{n\text{个}a} = a(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$

$$= \frac{a}{9}\underbrace{99\cdots 99}_{n\text{个}9} = \frac{a}{9}(10^n-1)$$

$$\underbrace{\overline{abab\cdots ab}}_{n\text{个}\overline{ab}} = \overline{ab}(10^{2(n-1)}+10^{2(n-2)}+\cdots+10^2+1)$$

2. 有关整数整除的概念和性质

（1）整数的带余除法

a，b是两个整数，则必存在唯一的一对整数q，r，使得$b=aq+r$，$0\leqslant r<|a|$成立，称为a，b的带余除法。r叫做b除以a的最小非负剩余。

若$r=0$，则称a整除b，或称b被a整除，记作$a|b$。a叫做b的约数或因数，b叫做a的倍数。显然，0是任何整数的倍数，± 1是任何整数的约数，任何整数是其自身的约数和倍数。

若$r\neq 0$，则称a不能整除b，或称b不被a整除，记作$a\nmid b$。

（2）质数与合数：如果正整数n有并且仅有两个不同的正约数，则称n为质数，也叫素数。如果n有多于两个不同的正约数，则称n为合数。显然，1既不是质数也不是合数。

（3）最大公约数：a_1，a_2，…，a_n都是正整数，（n是大于1的整数）且$d|a_1$，$d|a_2$，…，$d|a_n$，则称d为a_1，a_2，…，a_n的公约数。所有公约数中的最大者称为a_1，a_2，…，a_n的最大公约数。记作$(a_1, a_2, \cdots a_n)=d$。

当$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$时，称$a_1$，$a_2$，…，$a_n$互质。

（4）最小公倍数：a_1，a_2，…，a_n，m都是正整数，（n是大于1的整数）且$a_1|m$，$a_2|m$，…，$a_n|m$，则m叫做a_1，a_2，…，a_n的公倍数，m中的最小者叫做a_1，a_2，…，a_n的最小公倍数。记作$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=m$。

（5）最大公约数和最小公倍数的主要性质

① $d=(a_1, a_2, \cdots a_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_n}{d}\right)=1$

② a，b为正整数，则$(a, b)\cdot[a, b]=a\cdot b$

③ 若$(a_1, a_2, \cdots a_n)=d$，$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=m$，$K$为正整数，$C$是$a_1$，$a_2$，…，$a_n$的正公约数，则

$$(Ka_1, Ka_2, \cdots, Ka_n)=dK;$$

$$[Ka_1, Ka_2, \cdots, Ka_n]=mK$$

$$\left(\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}, \cdots, \frac{a_n}{c}\right)=\frac{d}{c};$$

$$\left[\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}, \cdots, \frac{a_n}{c}\right]=\frac{m}{c}.$$

④ 若正整数a，$b(a>b)$，且$a=bq+r$，q，r为正整数$(0<r<b)$，则$(a, b)=(b, r)$。

（6）算术基本定理：任何大于1的整数要么是素数，要

么是若干个素数的乘积，如果不考虑素因数的顺序，大于1的整数的素因数分解式是唯一的。即n是大于1的整数，p_1，p_2，…，p_k是素数，（k自然数）$n=p_1\cdot p_2\cdots p_k$是唯一的。如果把相同的素因数写成幂的形式，则为

$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，($p_1$，$p_2$，…$p_k$是不同的素数，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_k$是正整数，$k$正整数）称为$n$的标准分解式。

由此可推出n有$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$个不同的约数。

（7）整除的性质

① 若$a|b$，且$b|a$，则$a=\pm b$。

② 若$a|b$，$b|c$，则$a|c$。

③ 若$a|b$，那么对任意整数k有$a|kb$。

④ 若$a|b$，$a|c$，那么对任意整数k，l有$a|(kb+lc$。)

⑤ 若$m|ab$，且$(m,a)=1$，则$m|b$。

⑥ 若$a|c$，$b|c$且$(a,b)=1$，则$ab|c$。

⑦ 若$a|m$，$b|m$，则$[a,b]|m$。

⑧ 若p是质数，且$p|a\cdot b$，则$p|a$或$p|b$。

⑨ 记$1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n=n!$、则$n!\,|k(k+1)\cdots(k+n-1)$，$n$，$k$为正整数。

（8）自然数N，及整值解析式$f(n)$的某些整除特性

设$n+1$位自然数$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$，$a_0$，$a_1$，…，$a_n$是0，1，2，…，9中的数码，且$a_n\neq0$，则

①$2(或5)|a_0\Longleftrightarrow2(或5)|N$。

②$4(或25)|\overline{a_1a_0}\Longleftrightarrow4(或25)|N$。

③$8(或125)|\overline{a_2a_1a_0}\Longleftrightarrow8(或125)|N$。

④$3(或9)|(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)\Longleftrightarrow3(或9)|N$

⑤$11|(a_n-a_{n-1}+a_{n-2}\cdots\cdots\pm a_0)\Longleftrightarrow 11|N$（$n$为偶数取$+a_0$，$n$为奇数取$-a_0$）.

⑥7（或11，或13）$|\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}-\overline{a_2a_1a_0}|\Longleftrightarrow$7（或11，或13）$|N$。

"割尾"判别法：设$N=10x+y$，x为正整数，y是N的个位数字。

①$(10k-1)|(x+ky)\Longleftrightarrow(10k-1)|N$。（$k$为正整数）.

②$(10k+1)|(x-ky)\Longleftrightarrow(10k+1)|N$。（$k$正整数）

③$17|(x-5y)\Longleftrightarrow 17|N$，$7|(x-2y)\Longleftrightarrow 7|N$。

a，b为整数，因为

$a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.（$n$自然数）

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.（$n$正奇数）

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$。（$n$正偶数）

则$(a-b)|(a^n-b^n)$.（n自然数，$a\neq b$）

$(a+b)|(a^n+b^n)$。（n正奇数，$a\neq -b$）

$(a+b)|(a^n-b^n)$。（n正偶数，$a\neq -b$）

（9）奇数与偶数：能被2整除的整数叫偶数，记作$2n$（n整数），否则叫奇数，记作$2n+1$（n整数）.奇数与偶数有下列性质：

①奇数＋奇数＝偶数；②偶数＋偶数＝偶数；

③奇数＋偶数＝奇数；④奇数×奇数＝奇数；

⑤偶数×偶数＝偶数；⑥奇数×偶数＝偶数；

⑦偶数个奇数的和是偶数；

⑧奇数个奇数的和是奇数；

⑨任意个偶数的和是偶数；

⑩奇数的正整数次幂是奇数。

(10) 完全平方数：如果一个数是一个整数的完全平方，则称此数是完全平方数。完全平方数有下列性质：

①任何完全平方数的个位数字只能是0，1，4，5，6，9中的一个；即个位数字是2,3,7,8的整数，肯定不是完全平方数。

②奇完全平方数的十位数字一定是偶数。

③奇完全平方数减一是8的倍数。

④偶完全平方数是4的倍数。

⑤完全平方数有奇数个不同的约数。

二、范例

例1 A是任意一个百位数字比个位数字至少大2的三位数，B是A的数码反序排列的三位数，C是$A-B$的三个数码反序排列的三位数。求证$A-B+C=1089$。

分析：如果取$A=825$，则$B=528$，那么$A-B=297$，则$C=792$。验证$A-B+C=297+792=1089$。而A可以取很多满足题意的三位数，如何一一验证呢？如果我们用a，b,c表示A的三位数码，问题就容易解决了。

证明：设$A=\overline{abc}$，a,b,c是$0,1,2,\cdots 9$中的数码，且$a-c\geqslant 2$，$c\neq 0$。

则$A=100a+10b+c$，$B=100c+10b+a$

$A-B=100(a-c)-(a-c)=100(a-c)-100+100-(a-c)=100(a-c-1)+9\times10+[10-(a-c)]$

$\therefore C=100[10-(a-c)]+9\times10+(a-c-1)$

$\therefore A-B+C=100[(a-c-1)+10-(a-c)]+18\times10++[10-(a-c)+(a-c-1)]=900+180+9=1089$。证毕。

例2 如果一个自然数恰好等于它的各位数码之和的13倍，试求出所有这样的自然数。

解：(1) 显然一位数不满足题目条件.

(2) 考虑两位数$\overline{ab}=10a+b=13(a+b)$，

即$3a+12b=0$，仅当a，b同时为0时才成立，但$a\neq0$，所以两位数不满足题意.

(3) 考虑三位数$\overline{abc}=100a+10b+c=13(a+b+c)$，

即$87a=3b+12c$。因为b，c是小于10的非负整数，所以$3b+12c\leqslant27+108=135$。

即$87a\leqslant135$，所以a只能为1。

则$3b+12c=87$，化成$c=\dfrac{87-3b}{12}=7+\dfrac{1-b}{4}$，

所以 $\begin{cases}b=1\\c=7\end{cases}$ $\begin{cases}b=5\\c=6\end{cases}$ $\begin{cases}b=9\\c=5\end{cases}$

可知117，156，195满足题目条件。

(4) 考虑四位数$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=13(a+b+c+d)$，

即$987a+87b=3c+12d$。因为a是小于10的正整数，b，c，d为小于10的非负整数。

则$987a+87b\geqslant987$，$3c+12d\leqslant135$，

所以$987a+87b\neq 3c+12d$，即任何四位数不能满足题目条件。同理，任何四位以上的自然数都不能满足题目条件。

即满足题目条件的自然数只有117，156，195三个。

说明：没有明确位数的自然数的各位数字问题，常常按一位数，两位数，三位数，…，逐一讨论。

例3 一个六位数，当用2,3,4,5,6分别乘它得到的数还是由原来六个数码构成，仅仅是改变了原来数码的顺序，求这个六位数。

解：设这个六位数是$n=\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$，分三步解决此题。

（1）如果首位a_5是2以上的数，那么$6n$就是七位数，所以$a_5=1$。由此可推出：$2n,3n,4n,5n,6n$五个六位数的首位都不能是0,1，并且是五个不同的数字。如果它们中某两个六位数的首位相同，那么其中大数与小数的差的首位就是0，而这个差又恰是$n,2n,3n,4n,5n$中的一个数，因此是不可能的。

所以$2n,3n,4n,5n,6n$这五个六位数的首位数字和$a_5=1$是组成n的六个不同的数码，且其中没有0，这六个不同的数码的不同顺序的排列恰好构成了$n,2n,3n,4n,5n,6n$六个数。

（2）分析a_0是什么数。首先a_0不能是偶数，否则$5n$的个位是0；a_0也不能是5，否则$2n$的个位是0；因此a_0只能是3,7,9三数之一。如果$a_0=3$，从$3\times2=6,3\times3=9,3\times4=12$，$3\times5=15$，$3\times6=18$，说明$2n,3n,4n,5n,6n$的个位数中没有1与(1)得出的结论矛盾。同样，$a_0=9$。$2n$，$3n$，$4n,5n$，$6n$的个位数码中也都没有1。因此，经验证$a_0$可以为7，且仅能为7。并由$7\times2=14,7\times3=21,7\times4=28$，$7\times5=35$，$7\times6=42$可

知，如果这个六位数存在，一定是由7,4,1,8,5,2构成。

（3）现在已经知道$n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n$都是由7,4,1,8,5,2的不同顺序排列构成，那么六个六位数中是否会有两个同一位上的数码相同呢？这是不可能的。因为，如果两个六位数同一位上的数码相同呢，那么大数与小数的差中，该位数码一定是0或9，而这个差也是$n, 2n, \cdots, 5n$中的一个，构成的数字是没有0或9的。

明确了六个六位数同一位上的数码都不一样，这就找到了求答案的捷径。$n+2n+3n+4n+5n+6n=21n$，六个六位数相加时，每位数相加都是$7+4+1+8+5+2=27$，所以

$21n=2999997$，所以$n=\dfrac{2999997}{21}=142857$。

说明：一些题目的解题过程，不易用数学式子表达时，常用这种叙述的方式表达分析推理的过程。

例4 已知$a>b$，且$a=bq+r\,(0<r<b)$，a,b,q,r均为正整数，求证$(a,\ b)=(b,r)$。

证明：设$(a,\ b)=d$，则$d|a$，且$d|b$。又因$a=bq+r$，则$d|r$，所以d是b,r的公约数，由此可知，$(b,r)\geqslant d$。

假设$(b,r)=e>d$，则$e|b$，且$e|r$。因$a=bq+r$，则$e|a$，所以e是a，b的公约数，由此可知，$(a,\ b)\geqslant e$，即$d\geqslant e$与$e>d$相矛盾。

所以$(b,\ r)=d$，即$(a,b)=(b,r)$。证毕。

例5 求(5767，4453)。

解：应用例4的结论得

$(5767,4453)=(4453,1314)=(1314,511)=(511,292)$
$=(292,219)=73$。

此法有如下写法，称做辗转相除法。

	5767	4453	1
	4453	3942	
3	1314	511	2
	1022	292	
1	292	219	1
	219	219	
3	73	0	

$\therefore (5767，4453)=73$

例6 两个正整数的和为1092，最小公倍数是3528，求此二数。

解：设两数分别为 x，y，且 $x\geqslant y$，并设 $x=ad$，$y=bd$。且 $(x,y)=d$，则 $(a,b)=1$。$[x,y]=a\cdot b\cdot d$。

$$\frac{[x,y]}{x+y}=\frac{abd}{(a+b)d}，即\frac{abd}{(a+b)d}=\frac{3528}{1092}=\frac{2^3\times3^3\times7^2}{2^3\times3\times7\times13}$$

$$\therefore \frac{abd}{(a+b)d}=\frac{42\times84}{13\times84}，$$ $\therefore (a,b)=1$，由此可推出 $(ab, a+b)=1$。（请读者自己证明）

$$\therefore \begin{cases} ab=42 \\ a+b=13 \\ d=84 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=6 \\ d=84 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7\times84=588 \\ y=6\times84=504 \end{cases}$$

例7 证明对任何正整数 n，$21n+4$ 与 $14n+3$ 互质。

证明：设 $(21n+4,14n+3)=d$

$$\because \left.\begin{array}{l} d\,|\,21n+4 \\ d\,|\,14n+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} d\,|\,k(14n+3)+l(21n+4) \\ (k,l\text{为任意整数}) \end{array}$$

取$k=3$，$l=-2$，于是得$d\,|\,3(14n+3)-2(21n+4)$，

即$d\,|\,1$，所以$d=1$。

即$21n+4$与$14n+3$互质。

例8 已知$x<y$，那么$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1990}$有多少组正整数解？

解：首先看一般情况，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$，$a$正整数有多少组正整数解？

$$\text{由}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}\Longrightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{a}\Longrightarrow xy-ax-ay=0$$

可知，此题是整数解问题，所以常用因式分解与因数分解的方法解决。为了把$xy-ax-ay=0$的左边分解因式，则两边同时加a^2，于是得

$xy-ax-ay+a^2=a^2$。分解因式后写成，

$(x-a)(y-a)=a^2$，是正整数解问题。显然，$x>a$，$y>a$，所以$(x-a)$，$(y-a)$是a^2的一对正约数。a^2有多少个不同的正约数，就有多少组正整数解。设a^2有m个不同的正约数，因为a^2是完全平方数，所以m是奇数。若$x=y$，则$x=2a$，$y=2a$是一组解，若$x<y$，则有$\frac{m-1}{2}$组正整数解。

此题$a=1990$，$a^2=1990^2=199^2\times5^2\times2^2$是标准分解式，所以$a^2$有$(2+1)(2+1)(2+1)=27$个不同的正约数，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1990}$；$x<y$时有13组正整数解。

例9 已知六位数$\overline{19x91y}$能被33整除，这样的六位数有多少个？

解：$\because 33|\overline{19x91y}$，$\therefore 3|\overline{19x91y}$，$11|\overline{19x91y}$

$\because 3|\overline{19x91y}$，$\therefore 3|(x+y+20)$，化简为$3|(x+y+2)$

$\because 11|\overline{19x91y}$，$\therefore 11|(y+9+9)-(x+1+1)$，经化简得$11|(y-x+15)$。

因x，y是小于10的非负整数，则$0\leqslant x+y\leqslant18$，$-9\leqslant y-x\leqslant9$。

所以$x+y=1, 4, 7, 10, 13, 16$。

$$y-x=6, -5.$$

当x, y为整数时，$x+y$与$y-x$同奇偶，则可组成六个方程组，即

(1) $\begin{cases}x+y=1\\y-x=-5\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x+y=7\\y-x=-5\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x+y=13\\y-x=-5\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x+y=4\\y-x=6\end{cases}$　(5) $\begin{cases}x+y=10\\y-x=6\end{cases}$　(6) $\begin{cases}x+y=16\\y-x=6\end{cases}$

经解答筛选，只有(2)，(3)，(5)三组有符合题意的解。因此，能被33整除的六位数$\overline{19x91y}$有三个。

例10 四位数$\overline{3a7b}$能被68整除，求这个四位数。