科学计算及其软件教学丛书／石钟慈主编

运筹学基础

孙文瑜　朱德通　徐成贤　◎著

科学出版社

科学计算及其软件教学丛书

运筹学基础

孙文瑜　朱德通　徐成贤　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为《科学计算及其软件教学丛书》之一，系统地介绍了运筹学所研究的主要内容，包括线性规划、非线性规划、运输问题和分配问题、网络优化、整数规划、动态规划、目标规划、对策论、决策分析、存储论、遗传算法、预测预报与时间序列处理．全书共 13 章，分别描述了求解这些问题的实用方法，每章结尾都配有一定数量的习题，有些章节还给出了调用 MATLAB 程序进行求解的例子．本书通俗易懂，理论、算法与应用兼顾，是一本运筹学的入门性教材．

本书可用作信息与计算科学、数学与应用数学、管理、金融、经济、工程等相关专业的本科生教材或教学参考书，也可用作有关专业的研究生和 MBA 学生教材，同时可供管理人员和工程技术人员自学、参考．

图书在版编目（CIP）数据

运筹学基础/孙文瑜，朱德通，徐成贤著．—北京：科学出版社，2013
（科学计算及其软件教学丛书）
ISBN 978-7-03-037515-5

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①孙… ②朱… ③徐… Ⅲ. ①运筹学 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 103635 号

责任编辑：李鹏奇 王 静／责任校对：张小霞
责任印制：阎 磊／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2013 年 6 月第一次印刷 印张：22 1/2
字数：436 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《科学计算及其软件教学丛书》序

随着国民经济的快速发展，科学和技术研究中提出的计算问题越来越多，越来越复杂. 计算机及其应用软件的迅猛发展为这些计算问题的解决创造了良好的条件，而培养一大批以数学和计算机为主要工具，研究各类问题在计算机上求解的数学方法及计算机应用软件的专业人才也越来越迫切.

1998 年前后，教育部着手对大学数学专业进行调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹与控制专业合并，成立了“信息与计算科学专业”. 该专业成立之初，在培养目标、指导思想、课程设置、教学规范等方面存在不少争议，教材建设也众说纷纭. 科学出版社的编辑曾多次找我，就该专业的教材建设问题与我有过多次的讨论. 2005 年 11 月在大连理工大学召开的第九届全国高校计算数学年会上，还专门讨论了教材编写工作，并成立了编委会. 在会上，编委会就教材编写的定位和特色等问题进行了讨论并达成了共识. 按照教育部数学与统计学教学指导委员会起草的“信息与计算科学专业教学规范”的要求，决定邀请部分高校教学经验丰富的教师编写一套教材，定名为“科学计算及其软件教学丛书”. 该丛书涵盖信息与计算科学专业的大部分核心课程，偏重计算数学及应用软件. 丛书主要面向研究与教学型、教学型大学信息与计算科学专业的本科生和研究生. 为此，科学出版社曾调研了国内不同层次的上百所学校，听取了广大教师的意见和建议. 这套丛书将于今年秋季问世，第一批包括《小波分析》、《数值逼近》等十余本教材. 选材上强调科学性、系统性，内容力求深入浅出，简明扼要.

丛书的编委和各位作者为丛书的出版做了大量的工作，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望这套丛书能为信息与计算科学专业教学的发展起到积极的推动作用，也相信丛书在各方面的支持与帮助下会越出越好.

石钟慈

2007 年 7 月

前　言

运筹学 (Operations Research, OR) 是用定量的模型和定量的方法来分析和预测需要决策的系统的性态，从而为管理和决策提供科学的、合理的、量化的依据. 对于复杂的系统，运筹学通过简化和变换，用数值的方法处理系统的经过简化的近似表示. 因此，运筹学总是建立和采用简化的、合理的模型，利用测量的和计算的数据，运用数学方法和计算机程序，求得复杂系统的最优运行方案. 自第二次世界大战以来，运筹学这门学科已经得到了长足的发展. 现在，运筹学在科学、工程、国防、交通、管理、经济、金融、计算机等领域都有广泛的应用. 为了培养复合型和应用型人才，许多高校理科、工科、管理科学、经济与金融等学科都把运筹学开设为一门必修或选修课程.

运筹学包含的分支众多，本书覆盖了运筹学研究的主要内容，包括: 线性规划、非线性规划、运输问题和分配问题、网络优化、整数规划、动态规划、目标规划、对策论、决策分析、存储论、遗传算法、预测预报与时间序列处理. 作为运筹学领域的一本入门性教材，本书力求简明扼要，通俗易懂，尽量避免难度较大的数学证明. 全书各章以实际问题为背景，通过例题的描述和求解来说明基本思想、理论和具体方法. 本书对大部分内容提供了算法，有些还给出了调用 MATLAB 程序进行求解的例子. 每章结尾都配有一定数量的习题，供读者练习. 本书可供信息与计算科学、数学与应用数学、管理、金融、经济、工程等相关专业本科生作为教材或教学参考书，也可供有关专业的研究生和 MBA 学生作为教材，同时可供管理人员和工程技术人员自学、参考.

尽管本书作者多年来一直从事运筹优化的研究和教学，但限于水平和时间，书中难免有不妥和疏漏之处，欢迎读者批评指正.

孙文瑜 (南京师范大学)
朱德通 (上海师范大学)
徐成贤 (西安交通大学)
2012 年 6 月 15 日

目　　录

《科学计算及其软件教学丛书》序
前言
第 1 章　线性规划及单纯形法 …… 1
1.1　线性规划问题 …… 1
1.2　图解法 …… 3
1.3　线性规划的标准形 …… 4
1.4　线性规划的几何意义与性质 …… 7
1.5　单纯形法 …… 13
1.5.1　基本可行解 …… 13
1.5.2　最优性检验 …… 15
1.6　单纯形表 …… 19
1.7　初始基本可行解 …… 24
1.8　调用单纯形法的 MATLAB 程序解线性规划 …… 32
习题 1 …… 32
第 2 章　线性规划的对偶理论与对偶单纯形法 …… 36
2.1　线性规划的对偶问题 …… 36
2.2　对偶性定理 …… 44
2.3　对偶单纯形法 …… 47
*2.4　解线性规划的内点法简介 …… 52
习题 2 …… 56
第 3 章　非线性规划 …… 59
3.1　基本概念 …… 59
3.2　最优性条件 …… 64
3.3　线性搜索方法 …… 68
3.3.1　确定初始搜索区间的进退法 …… 70
3.3.2　二分法 …… 71
3.3.3　0.618 法 …… 71
3.3.4　不精确线性搜索的 Goldstein 准则 …… 75
3.4　最速下降法和共轭梯度法 …… 77
3.4.1　最速下降法 …… 77

3.4.2 共轭梯度法 ········ 80
3.4.3 调用 MATALB 程序求解非线性规划: 共轭梯度法 ········ 83
3.5 牛顿法 ········ 84
3.6 拉格朗日方法 ········ 87
3.7 KKT 方法 ········ 89
3.8 等式约束二次规划 ········ 91
3.8.1 变量消去法 ········ 92
3.8.2 拉格朗日方法 ········ 95
3.9 不等式约束二次规划 ········ 97
3.9.1 不等式约束二次规划 ········ 97
3.9.2 调用 MATLAB 程序求解二次规划 ········ 103
3.10 二次罚函数方法 ········ 104
3.11 增广 Lagrange 乘子法 ········ 106
3.12 使用 MATLAB 程序求解一般约束优化问题 ········ 108
习题 3 ········ 109
第 4 章 运输问题和分配问题 ········ 112
4.1 运输问题 ········ 112
4.1.1 基本可行解和西北角法则 ········ 115
4.1.2 应用对偶方法求运输问题的最优解 ········ 120
4.1.3 不平衡运输问题 ········ 126
4.1.4 使用 MATLAB 程序求解运输问题 ········ 127
4.2 分配问题 ········ 128
4.2.1 分配问题的数学模型 ········ 129
4.2.2 匈牙利算法 ········ 130
4.2.3 非标准形分配模型的标准化 ········ 134
4.3 转运问题 ········ 135
习题 4 ········ 137
第 5 章 网络优化 ········ 141
5.1 基本网络概念 ········ 141
5.2 最短路问题的算法 ········ 145
5.3 最大流问题 ········ 147
5.4 网络计划技术 (统筹方法) ········ 154
5.4.1 计划网络图 (或工程网络图) ········ 154
5.4.2 关键路线法 (CPM) 和时间参数计算 ········ 157
5.4.3 计划评审技术 ········ 160

5.4.4 计划网络图的优化 ······ 161
5.4.5 资源的合理利用 ······ 161
5.4.6 最优成本工期 ······ 161
习题 5 ······ 164
第 6 章 整数规划 ······ 167
6.1 问题的提出 ······ 167
6.2 幺模性 ······ 169
6.3 分枝定界法 ······ 171
6.3.1 分枝定界法 ······ 171
6.3.2 调用 MATLAB 中分枝定界法解 0-1 整数规划 ······ 176
第 7 章 动态规划 ······ 178
7.1 动态规划的基本原理 ······ 178
7.1.1 动态规划的基本概念 ······ 179
7.1.2 动态规划的解法 ······ 181
7.1.3 动态规划的最优性原理和最优性定理 ······ 184
7.2 动态规划模型问题 ······ 184
7.3 生产与存储问题 ······ 186
7.4 复合系统工作可靠性问题 ······ 189
7.5 不确定性的采购问题 ······ 192
7.6 背包问题 ······ 194
习题 7 ······ 198
第 8 章 目标规划 ······ 201
8.1 线性目标规划的基本概念与数学模型 ······ 201
8.1.1 目标规划的基本概念 ······ 202
8.1.2 目标规划的数学模型 ······ 205
8.2 线性目标规划的图解法 ······ 206
8.3 线性目标规划的单纯形法 ······ 209
习题 8 ······ 215
第 9 章 对策论 ······ 217
9.1 对策论的基本概念和二人零和对策 ······ 217
9.2 混合策略 ······ 223
9.3 矩阵对策的解法 ······ 229
9.3.1 (2×2) 对策的等式组解法 ······ 229
9.3.2 $(2\times n)$ 和 $(m\times2)$ 对策的图解法 ······ 230
*9.4 用线性规划方法解 $m\times n$ 对策 ······ 234

习题 9 ························ 239
第 10 章 决策分析 ························ 241
10.1 随机型决策方法 ························ 241
10.1.1 基本概念 ························ 241
10.1.2 最优期望益损值决策准则 ························ 243
10.1.3 决策树法 ························ 244
10.2 不确定型决策 ························ 247
10.2.1 最大最小准则 (Max–Min 准则, 小中取大准则) ························ 248
10.2.2 最大最大准则 (Max–Max 准则, 大中取大准则) ························ 249
10.2.3 等可能性准则 (Laplace 准则) ························ 249
10.2.4 折衷值准则 ························ 250
10.2.5 后悔值准则 (Min–Max 准则) ························ 251
10.3 马尔可夫分析法 ························ 252
10.3.1 马尔可夫链 ························ 252
10.3.2 马尔可夫分析法 ························ 254
习题 10 ························ 257
第 11 章 存储论 ························ 259
11.1 存储系统的基本概念 ························ 259
11.1.1 存储系统 ························ 259
11.1.2 存储总费用 ························ 260
11.1.3 存储策略 ························ 260
11.1.4 目标函数 ························ 260
11.2 确定性存储模型 ························ 261
11.2.1 经济订货批量模型 ························ 261
11.2.2 生产批量模型 ························ 264
11.2.3 允许缺货的经济批量模型 ························ 267
*11.3 随机存储模型 ························ 270
11.3.1 单周期随机型模型 ························ 270
11.3.2 多周期随机型存储模型 ························ 275
习题 11 ························ 277
第 12 章 遗传算法 ························ 280
12.1 遗传算法简介 ························ 280
12.2 遗传算法的基本格式 ························ 285
12.2.1 染色体编码和解码方法 ························ 287

12.2.2 适应度计算 …… 290
12.2.3 算法参数的选取 …… 292
12.2.4 算法的终止准则 …… 293
12.3 遗传运算 …… 295
12.3.1 选择运算 …… 295
12.3.2 交叉运算 …… 299
12.3.3 变异运算 …… 303
12.4 遗传算法的基本收敛理论 …… 305
12.5 使用 MATLAB 中的遗传算法程序求解约束优化 …… 307
第 13 章　预测预报与时间序列处理方法 …… 308
13.1 预测预报的一些基本概念 …… 308
13.2 移动平均预报模型 …… 313
13.3 指数平滑预报模型 …… 317
13.4 季节型时间序列预报的分解模型 …… 323
13.5 回归预报模型 …… 327
13.6 复合预报模型 …… 333
13.7 蒙特卡罗模拟 …… 339
参考文献 …… 346

第 1 章　线性规划及单纯形法

线性规划 (Linear Programming, LP) 是运筹学中的一个重要分支, 它的研究起步较早, 理论上比较成熟, 方法非常有效, 应用十分广泛.

早在 20 世纪 30 年代, 苏联科学家康托洛维奇 (Kantorovich) 首先提出了线性规划的模型. 1947 年, 美国科学家 George Dantzig 提出了解线性规划的单纯形法, 奠定了线性规划理论和算法的基石. 1984 年, 美国贝尔实验室的研究员 Karmarkar 提出了解线性规划的多项式时间算法 —— 内点法, 进一步发展了解线性规划的数值方法. 几十年来, 线性规划的研究和应用取得了重大进展. 现在, 工程和管理科学中成千上万或数十万个决策变量和约束条件的线性规划问题能够被迅速求解, 线性规划已经成为科学工程研究以及现代化管理的重要手段.

1.1　线性规划问题

在生产管理和经济活动中, 很多问题都可以归结为线性规划问题. 一类是如何合理使用有限资源, 以获得最大效益的线性规划问题.

例 1.1.1　*某工厂生产甲、乙两种产品, 生产这两种产品要消耗 A, B 两种原料. 生产每吨产品所需的 A, B 两种原料量见表 1.1.1. 现该厂每周所能得到 A, B 两种原料分别为 160 吨和 150 吨. 已知该厂生产的每吨甲、乙两种产品的利润分别为 3 千元和 1 千元. 问该厂应如何安排两种产品的产量才能使每周获得的利润最大?*

表 1.1.1

原料 \ 产品	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲	乙	
A 原料/吨	3	2	160
B 原料/吨	5	1	150

建立模型　设该厂每周生产甲种产品的产量为 x_1(吨), 乙种产品的产量为 x_2(吨), 则每周能获得的利润总额为 $z = 3x_1 + x_2$(千元). 但产量的大小受到 A, B 两种原料量的限制, 即 x_1, x_2 要满足以下一组不等式约束条件:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 160, \\ 5x_1 + x_2 \leqslant 150. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

此外, x_1, x_2 还应该是非负数,

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{1.1.2}$$

因此, x_1, x_2 应该在满足资源约束条件 (1.1.1) 和非负约束条件 (1.1.2) 下, 使利润 z 取最大值:

$$\max \quad z = 3x_1 + x_2. \tag{1.1.3}$$

这样, 我们得到了该问题的线性规划模型如下:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 160, \qquad (l_1) \\ & 5x_1 + x_2 \leqslant 150, \qquad (l_2) \\ & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{array} \tag{1.1.4}$$

另一类线性规划问题是为了达到一定的目标, 如何组织安排以使得消耗的资源为最少.

例 1.1.2　某公司在生产中共需要 A, B 两种材料至少 350 千克, 其中 A 种材料至少需要 100 千克. 加工每千克 A 种材料需要 2 个小时, 加工每千克 B 种材料需要 1 个小时, 而公司共有 600 个加工小时. 另外, 已知每千克 A 种材料的价格为 2 千元, 每千克 B 种材料的价格为 3 千元. 试问在满足生产需要的条件下, 在公司加工能力范围内, 如何购买 A, B 两种材料, 使购进成本最低?

建立模型　设 x_1, x_2 分别为购进的 A 种材料和 B 种材料的千克数. 依题意可得如下线性规划模型:

$$\begin{array}{ll} \min & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \geqslant 350, \\ & x_1 \geqslant 100, \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 600, \\ & x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{array} \tag{1.1.5}$$

大量的运输问题都可写成线性规划问题的形式, 下面是一般的运输问题.

例 1.1.3 (运输问题)　要把某种货物从 m 个工厂 $A_1,\cdots,A_m$ 运到 n 个商店 $B_1,\cdots,B_n$, 各工厂库存量分别为 $a_1,\cdots,a_m$, 各商店需求量分别为 $b_1,\cdots,b_n$, 这里假设 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, 即该货物的库存总量大于等于其需求总量. 已知从工厂 A_i 到商店 B_j 每单位货物的运费为 c_{ij}. 现在需要确定该货物从 A_i 到 B_j 的运输量 x_{ij} $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$, 使在满足供求关系条件下, 总的运费最少.

建立模型 依题意, 该问题的约束条件为:

(1) 从 $A_1, \cdots, A_m$ 运到 B_j 的货物总量为 b_j,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

(2) 从 A_i 运到 $B_1, \cdots, B_n$ 的货物总量不超过 a_i,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

(3) 运输量 x_{ij} 非负,

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n.$$

于是, 该问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

上面建立的几个模型都是线性规划模型. 在线性规划模型中, 目标函数是变量的线性函数, 约束条件是变量的线性等式或不等式.

1.2 图 解 法

对于两个变量的线性规划问题, 用图解法求解是非常有效和简单的. 我们以例 1.1.1 中建模得到的线性规划问题为例来说明图解法.

例 1.2.1

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + x_2, \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 160, \qquad (l_1) \\
& 5x_1 + x_2 \leqslant 150, \qquad (l_2) \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

解 这一问题的可行域为图 1.2.1 所示的多边形 $OABC$, 我们还需要在可行域中找到点 (x_1, x_2) 使目标函数值 $z = 3x_1 + x_2$ 极大. 为此, 我们过原点作虚线

EF: $3x_1+x_2=0$, 它的斜率为 -3, 当 z 的值从 0 增加时, 虚线 EF 向右侧移动且平行于它本身. 当移动到 $B(20,50)$ 时, 再移动就与可行域不相交了. 于是 $B(20,50)$ 是最优解, 最优值为 $z=3\times 20+50=110$. □

例 1.2.2

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=3x_1-2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 3, && (l_1)\\
& -2x_1+x_2\leqslant 2, && (l_2)\\
& 4x_1+x_2\leqslant 16, && (l_3)\\
& x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

解　这一问题的可行域为图 1.2.2 所示的多边形 $ABCDE$, 要在可行域中找到点 (x_1,x_2) 使目标函数值 $z=3x_1-2x_2$ 极小. 为此, 我们过原点作虚线 HK: $3x_1-2x_2=0$, 当虚线 HK 平行向左移动时, 目标函数 z 的值减少. 当移动到 $A(1,\ 4)$ 时得到虚线 MN, 再移动就与可行域不相交了. 于是 $A(1,\ 4)$ 为最优解, 相应的最优值为 $z=3\times 1-2\times 4=-5$. □

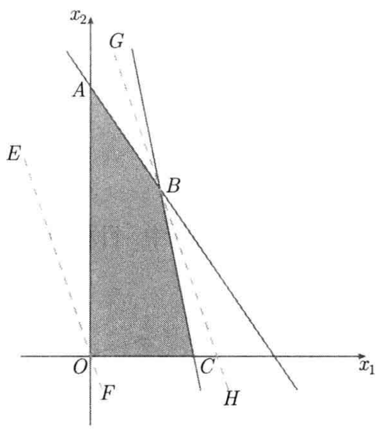

图 1.2.1

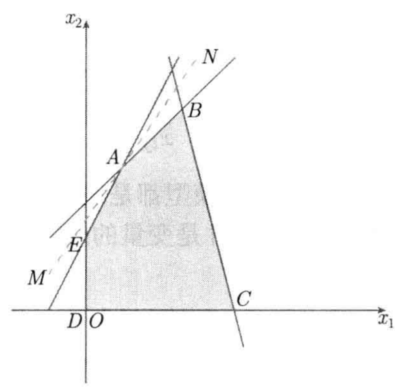

图 1.2.2

上述例子告诉我们图解法的步骤为

1. 画出可行域;
2. 作目标函数的等值线;
3. 确定最优解和最优目标函数值.

1.3　线性规划的标准形

线性规划模型有各种不同的形式, 其一般形式为:

$$\begin{array}{lll} \text{目标函数:} & \min(\max) & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{约束条件:} & \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_1, \\ & & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_2, \\ & & \qquad\cdots\ \cdots \\ & & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_m, \\ & & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0. \end{array} \tag{1.3.1}$$

这里, $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 称为目标函数 (objective function), 设其值为 z, 其中 $c_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 称为价值系数 (cost coefficient), $c = (c_1, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 称为价值向量, $x_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 称为决策变量, 由系数 a_{ij} 组成的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为约束矩阵 (constraint matrix), 列向量 $b = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 称为右端向量, 条件 $x_j \geqslant 0\ (j = 1, \cdots, n)$ 称为非负约束条件. 约束条件记为 s.t. (subject to). 满足约束条件的变量 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为可行点或可行解, 所有可行点组成的集合为可行域 (feasible region). 达到目标函数最小值 (最大值) 的可行解称为该线性规划的最优解 (optimal solution), 相应的目标函数值称为最优目标函数值或最优值 (optimal value).

单纯形法 (simplex method) 是求解线性规划问题的重要方法. 单纯形法要求线性规划问题具有标准形式. 线性规划的标准形为

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \qquad\cdots\ \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots\ ,\ x_n \geqslant 0. \end{array} \tag{1.3.2}$$

上式简写为

$$\begin{array}{lll} \min & z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j & \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1, \cdots, m, \\ & x_j \geqslant 0, & j = 1, \cdots, n. \end{array} \tag{1.3.3}$$

采用矩阵向量的形式, 上述线性规划可表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

这个标准形有三个特点: 一是目标函数求极小; 二是约束条件为等式; 三是决策变量为非负. 下面, 我们常常把这样的标准形线性规划问题记为标准形 LP 问题 (或 LP 问题).

对于系数矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 我们假定 $m \leqslant n$ 且 A 是行满秩 ($\mathrm{rank}(A) = m$). 这是因为如果 A 不是行满秩, 则表示约束中有线性相关的方程, 通过删除线性相关的约束并不影响问题的可行域而使剩下的约束所形成的系数矩阵满秩. 如果 $m > n$, 则约束方程组或者不相容, 可行域为空集; 或者删除线性相关约束条件得到 $m \leqslant n$. 如果 $m = n$ 且 A 满秩, 则约束方程组有唯一解, 如果这个唯一解还满足变量的非负条件, 则它就是最优解, 否则就没有最优解. 因此, 只有当 $m < n$ 时, 才需要在无限多个满足约束方程的可行解中确定使目标函数取得最优的解. 另外, 我们要求约束的右端向量 $b \geqslant 0$, $b \in \mathbf{R}^m$.

实际中出现的任何线性规划问题都可以通过变换转换为线性规划的标准形.

1. 目标函数的转换

我们要求目标函数求极小. 如果原问题是求函数的极大化

$$\max \quad z = c^{\mathrm{T}} x,$$

则可通过两边乘以 -1, 等价地将其转换为极小化问题

$$\min \quad -z = -c^{\mathrm{T}} x,$$

反之亦然. 例如, 原问题是求 $z = 5x_1 - 5x_2 + 3x_3$ 的极大, 我们可将目标函数改为 $\bar{z} = -z = -5x_1 + 5x_2 - 3x_3$ 后求极小, 在求出最优解后, 再将最优目标函数值乘以 -1, 即得到原问题的最优函数值. 如果函数中有常数项, 删去常数项并不对最优解的确定产生任何影响, 只需在最优解确定后, 对目标函数的最优值加上删去的常数项, 即可得到原问题的最优目标函数值.

2. 约束条件的转换

(1) 我们通常要求右端项 $b \geqslant 0$. 对于不等式约束, 如果右端项是负的, 先用 -1 乘以不等式的两端并改变不等号的方向, 将其改成右端项非负的不等式. 例如将 $x_1 + x_2 \geqslant -1$ 改写成 $-x_1 - x_2 \leqslant 1$. 对于等式约束, 直接乘以 -1 即可.

(2) 如果某一约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p \leqslant b_i,$$