



普通高等教育“十二五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU "12·5" GUIHUA JIAOCAI

冶金工程数学模型及 应用基础

张延玲 编著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

013045560

TF02
06



普通高等教育“十二五”规划

冶金工程数学模型及 应用基础

张延玲 编著



TF02
06

北京

冶金工业出版社

2013



北航

C1653780

内 容 简 介

本书在简要、系统地叙述冶金学原理的基础上,分析讨论了如何结合数学、热力学、反应动力学、凝固理论、流体力学等知识建立数学模型,如何利用数学模型解决实际问题。书中还引用了包括作者自身研究成果在内的、大量国内外公开发表的关于冶金工程数学模型的研究和应用实例。本书基础知识体系系统、理论联系实践密切,同时具有一定的前沿性。

本书可作为冶金类高等院校冶金工程学科高年级本科生、研究生的选修教材,也可作为冶金企业从事技术研发人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

冶金工程数学模型及应用基础/张延玲编著. —北京:冶金工业出版社, 2013.5

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5024-6244-4

I. ①冶… II. ①张… III. ①冶金工业—数学模型—高等学校—教材 IV. ①TF02

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 081498 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjcs@cnmip.com.cn

责任编辑 常国平 美术编辑 李 新 版式设计 孙跃红

责任校对 王永欣 责任印制 张祺鑫

ISBN 978-7-5024-6244-4

冶金工业出版社出版发行; 各地新华书店经销; 北京百善印刷厂印刷

2013 年 5 月第 1 版, 2013 年 5 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 13.75 印张; 332 千字; 210 页

28.00 元

冶金工业出版社投稿电话: (010)64027932 投稿邮箱: tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社发行部 电话: (010)64044283 传真: (010)64027893

冶金书店 地址: 北京东四西大街 46 号(100010) 电话: (010)65289081(兼传真)

(本书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

近几十年来,世界冶金工业获得了空前大发展,这无疑得益于冶金学科基础理论的深入发展和基础知识的不断更新。同时,在各国冶金工作者的努力下,当代科学技术如近代数学的成就、计算机的发展和应用、材料科学的长足进步等逐渐渗透到冶金学科,使冶金学科的基础理论获得了更为系统、深入的发展和更新。马克思曾经说过:“当数学还未进入一门学科,那么这门学科还不是真正意义上的科学”。从另一个角度可理解为,数学在一门学科中的应用程度基本上可以代表该学科的发展程度。冶金生产过程中近年来越来越多的领域能够借助于数学语言进行描述、模拟、仿真和优化,也充分证明了冶金学科的高度发展。

数值模拟与仿真的本质可理解为利用数学模型进行实验研究,其“工具”是各种数学公式,“材料”是各种信息,而其“核心”为合理的数学模型。本书重点介绍了冶金过程中各种常见的数学模型,并附有近十年来公开发表的应用实例,以便读者理解的同时掌握本领域的前沿发展状况。第1章作为全书导言,首先介绍了模型的概念、与原型的区别及其在工程开发中的地位和作用,在此基础上引出数学模型的定义和特点;第2章首先介绍了冶金工业的发展历史及当前钢铁工业的现状和特点,在此基础上重点描述了冶金学科各分支理论的发展历史及研究领域;第3章概况性地叙述了冶金生产过程中几种常见的数学模型;第4~7章分别详细叙述了冶金热力学模型、冶金动力学模型、凝固过程相关数学模型、冶金过程湍流模型的模型结构、建立思路、相关基础理论及最新应用实例等。本书可作为冶金类高等院校高年级本科生、研究生的选修教材,也可以作为与冶金相关的科技工作者的参考资料。

本书在撰写过程中重点参阅了李士琦教授等著的《冶金系统工程》、郭汉杰教授编著的《冶金物理化学教程》、李文超教授主编的《冶金与材料物理化学》、萧泽强教授等著的《冶金过程单元过程和现象的研究》、干勇教授等著的《连续铸钢过程数学物理模拟》及胡汉起教授主编的《金属凝固原理》等参考书与教材。应用实例重点参阅了近十年来公开发表在《Metallurgical and Materials Transaction B》、《ISIJ International》、《Steel Research International》及《北京科技大学学报》等冶金领域高水平期刊的文献。其中,第4章冶金热力学模

型基础及应用实例部分,应用实例一、二、三分别参考了以下文献:(1) Metallurgical and Materials Transactions B, 2003, 34(6): 853~859; (2) ISIJ International, 2003, 43(9): 1301~1308; (3) ISIJ International, 2004, 44(6): 1006~1015。第5章冶金动力学模型基础及应用实例部分,应用实例一、二、三分别参考了以下文献:(1) 钢冶金过程动力学. 北京: 冶金工业出版社, 2001; (2) ISIJ International, 1996, 36(10): 1229~1236; (3) ISIJ International, 2002, 42(8): 809~815。第6章凝固过程相关数学模型基础应用实例部分,应用实例一、二分别参考了以下文献:(1) 连续铸钢过程数学物理模拟. 北京: 冶金工业出版社, 2001; (2) 北京科技大学学报, 2011, 33(9): 1091~1098。第7章冶金过程湍流模型基础及应用实例部分,应用实例一、二、三分别参考了以下文献:(1) ISIJ International, 2010, 50(3): 331~348; (2) 赵飞, 张延玲, 等. 超音速射流流场中湍流模型的研究. 北京科技大学学报. 已录用, 待发表; (3) Metallurgical and Materials Transactions B, 2010, 41(B): 636~644。在此一并向上述作者及出版社、期刊编委等致以诚挚的谢意。

本书在编写过程中得到所在课题组的研究生魏文洁、刘洋、田冬东、郭文明、安卓卿、朱伶枫等的大力帮助和支持,在此一并表示感谢。

由于作者水平所限,书中难免不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编著者

2013年1月于北京科技大学

目 录

1 数学模型的基本概念和定义	1
1.1 模型的基本概念	1
1.2 各类模型在工程开发中的应用	2
1.2.1 模型的分类	2
1.2.2 模型在系统开发中的作用	3
1.3 数学模型	4
1.3.1 数学模型的定义及特点	4
1.3.2 数学模型的分类	5
1.3.3 数学模型的建立和使用	7
1.4 模拟和仿真	8
本章小结	10
思考题	10
参考文献	10
2 冶金工业及冶金学科的发展	11
2.1 冶金发展历史概述	11
2.2 钢铁工业的大发展	12
2.3 冶金学科发展概况	15
2.3.1 化学冶金	16
2.3.2 冶金反应热力学	16
2.3.3 冶金反应动力学	16
2.3.4 宏观反应动力学	16
2.3.5 冶金反应工程学	18
2.3.6 时空多尺度的概念及其在冶金学中的应用	20
本章小结	24
思考题	24
参考文献	24
3 冶金工程常见数学模型简述	25
3.1 衡算模型	25
3.2 冶金热力学模型	27
3.3 冶金动力学模型	27
3.4 单元操作模型	27
3.4.1 水冷模	28

3.4.2 金属模	29
3.5 冶金反应工程模型	31
3.6 过程系统模型	32
3.6.1 过程系统模型分类	32
3.6.2 过程系统模型结构	32
3.6.3 系统优化	33
3.7 最优化模型	33
3.7.1 最优化问题形式	34
3.7.2 最优化问题分类	34
3.7.3 线性规划问题分析	34
3.7.4 非线性规划问题	38
3.7.5 线性规划问题的类型及其在冶金中的应用	38
3.8 经验模型	40
3.8.1 数理统计的基本概念及常用知识	40
3.8.2 统计分析模型举例	42
本章小结	46
思考题	46
参考文献	47
4 冶金热力学模型基础及应用实例	48
4.1 冶金热力学基础回顾	48
4.1.1 吉布斯自由能	49
4.1.2 标准吉布斯自由能	50
4.1.3 多元多相反应平衡	52
4.2 活度	52
4.2.1 拉乌尔定律	53
4.2.2 亨利定律	53
4.2.3 活度及活度系数的提出	53
4.2.4 活度标准态	54
4.2.5 活度之间的转换	54
4.3 铁液/钢液中组元活度计算	55
4.3.1 Wagner 模型	55
4.3.2 Wagner 模型使用的局限	57
4.3.3 UIP 模型的提出	57
4.4 炉渣组元活度计算	57
4.4.1 分子理论模型	58
4.4.2 完全离子理论模型	58
4.5 渣容量计算	59
4.5.1 渣的硫容量	60
4.5.2 渣的磷酸盐容量	61

4.5.3 渣的氯容量	61
4.5.4 渣的钒容量	62
4.6 几种典型溶液的热力学特征	63
4.6.1 理想溶液	64
4.6.2 实际溶液	64
4.6.3 稀溶液	65
4.6.4 正规溶液	65
4.7 应用实例	66
4.7.1 选择性氧化和选择性还原	66
4.7.2 应用实例一: Mn-Fe-C 熔体中氮的热力学	70
4.7.3 应用实例二: 锰和铝在 Fe-Ni 和 Fe-Cr 合金中脱氧平衡的热力学	78
4.7.4 应用实例三: 钢中 Mn/Si 脱氧夹杂物热力学计算和实验研究	90
本章小结	104
思考题	104
参考文献	105
5 冶金动力学模型基础及应用实例	107
5.1 冶金反应动力学模型基础及常用处理方法	107
5.1.1 冶金反应动力学特点	107
5.1.2 宏观反应动力学常用处理方法	108
5.2 气固反应动力学模型基础	110
5.2.1 未反应核模型基础: 单独控速	110
5.2.2 未反应核模型的应用扩展	117
5.3 气液反应动力学模型	117
5.3.1 气泡冶金过程动力学模型	117
5.3.2 真空冶金过程脱气动力学模型	122
5.4 液液反应动力学模型基础	123
5.5 应用实例	126
5.5.1 应用实例一: VD 过程脱硫动力学模型	127
5.5.2 应用实例二: 真空吸脱气法用于铁水同时脱碳和脱氮	129
5.5.3 应用实例三: 铜对高温下不锈钢熔体脱碳动力学的影响	135
本章小结	141
思考题	141
参考文献	141
6 凝固过程相关数学模型基础	143
6.1 凝固过程的传热	143
6.1.1 凝固过程的传热特点	143
6.1.2 凝固过程传热方式	145
6.2 凝固过程中液态金属的流动	146

6.2.1 完全液相区内的金属流动	146
6.2.2 枝晶间液态金属的流动	146
6.3 凝固过程中的传质	148
6.3.1 溶质平衡与控制方程	148
6.3.2 枝晶间液态金属流动情况下的溶质浓度分布	148
6.4 金属凝固微观组织模拟	152
6.4.1 金属凝固组织形成过程的数学模型	152
6.4.2 凝固组织形成过程的数值模拟方法	155
6.5 应用实例	156
6.5.1 应用实例一: 连铸结晶器内钢液凝固传热数学模型	156
6.5.2 应用实例二: 22CrMoH 连铸坯微观组织及合金元素影响的数值模拟	161
本章小结	171
思考题	171
参考文献	171
7 冶金过程湍流模型基础及应用实例	173
7.1 流体的物理性质	173
7.1.1 密度	173
7.1.2 压缩性	174
7.1.3 黏性	174
7.1.4 导热性和导热系数	174
7.1.5 扩散性与扩散系数	175
7.1.6 表面张力	175
7.2 基本物理定律	175
7.2.1 质量守恒定律	175
7.2.2 牛顿第二定律	176
7.2.3 热力学第一定律	177
7.2.4 流体运动的基本方程	178
7.2.5 流体运动控制方程	179
7.3 冶金过程传输现象及相关数学模型	179
7.3.1 湍流流动的数学描述	179
7.3.2 湍流模型	181
7.3.3 壁面函数	183
7.4 应用实例	184
7.4.1 应用实例一: 连铸中间包操作的数值模拟研究	184
7.4.2 应用实例二: 超声速射流流场中湍流模型的研究	188
7.4.3 应用实例三: 炼钢温度下超声速氧枪射流行为的计算流体动力学模拟	198
本章小结	208
思考题	208
参考文献	209

1 数学模型的基本概念和定义

本章概要：本章首先介绍了模型的概念、与原型区别及其在工程开发中的地位和作用。在此基础上引出数学模型的定义和特点。最后分析了工程实践中经常用到的模拟与仿真的研究方法，与建立和使用数学模型的区别与联系。

数学模型是模型的一种，与其他模型相比，其特殊之处在于所使用的工具是各种数学公式和符号，“制作材料”是各种信息。因此，数学模型使用起来更为灵活方便、成本低、风险小。

随着科学技术的迅速发展，数学模型越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中。电气工程师利用数学模型实现生产过程的有效控制，气象工作者根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立数学模型，进而得到准确的天气预报。对于广大科学技术和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间的一座必不可少的桥梁。尤其是对于某些难以实施的实际问题，如重大自然灾害、产品的生产和销售预测等，以及现实中无法观测、不易观测或实验成本过高的问题，数学模型的建立和使用显得尤为重要。

1.1 模型的基本概念

模型是人类描述和认识世界广泛应用的工具，实际上每一个人都在利用模型帮助自己理解世界和描述世界，在工程技术中尤为如此。模型通常和模型工程联系在一起。“工程”一词的直接含义是“造物”，故“模型工程”是指讨论如何构造模型的一般原理，目前还隶属于“系统工程”的范畴。

简单来讲，模型是现实或想象中原型的一个表示，若模型建立的过程复杂，甚至与原型一样，就失去了利用模型的意义，故模型往往比原型简单得多，但又要求在使用其预测和解释时有足够的精确度。原型往往要涉及非常多的因素（变量），但是确定现象的本质的因素是非常有限的，故有人认为工程模型应有 3 个主要特征：

- (1) 工程模型是原型的抽象或模仿。
- (2) 工程模型由分析问题有关的因素所构成。
- (3) 工程模型能表明这些有关因素之间的关系。

有许多人对模型有误解，认为越复杂越好，实际上模型应该简单、简明，因为越简明的模型使用起来越方便。必须指出，构造模型是一项科学、是一项工程、是一项技巧，同时也是一门艺术，应用时应恰到好处。

1.2 各类模型在工程开发中的应用

1.2.1 模型的分类

不同的作者依照不同的角度将模型加以分类，下面是几种常见的分类形式。

如 A：

- (1) 基本的分类：1) 实际模型；2) 思考模型。
- (2) 根据再现性和精度的不同，可分为：1) 完全模型；2) 不完全模型；3) 近似模型。
- (3) 根据模型结构分类：1) 启发式模型；2) 模拟模型；3) 图形模型；4) 逻辑模型；5) 数学模型。
- (4) 根据变量特征分类：1) 确定型模型；2) 概率型模型。
- (5) 按分析对象分类：1) 过程模型；2) 状态变量模型；3) 性能模型；4) 可靠性模型；5) 时间模型；6) 费用模型；7) 人的行为模型；8) 生态模型。
- (6) 一般的分类：1) 描述模型；2) 图形模型；3) 数学模型；4) 电子计算机模型；5) 物理模型；6) 硬件模型；7) 软件模型。

如 B：

- (1) 按模型的形式分：1) 图像模型；2) 模拟模型；3) 数学模型；4) 概念模型。
- (2) 按变量性质分：1) 确定型模型；2) 随机型模型。
- (3) 按学科分类，如图 1-1 所示。

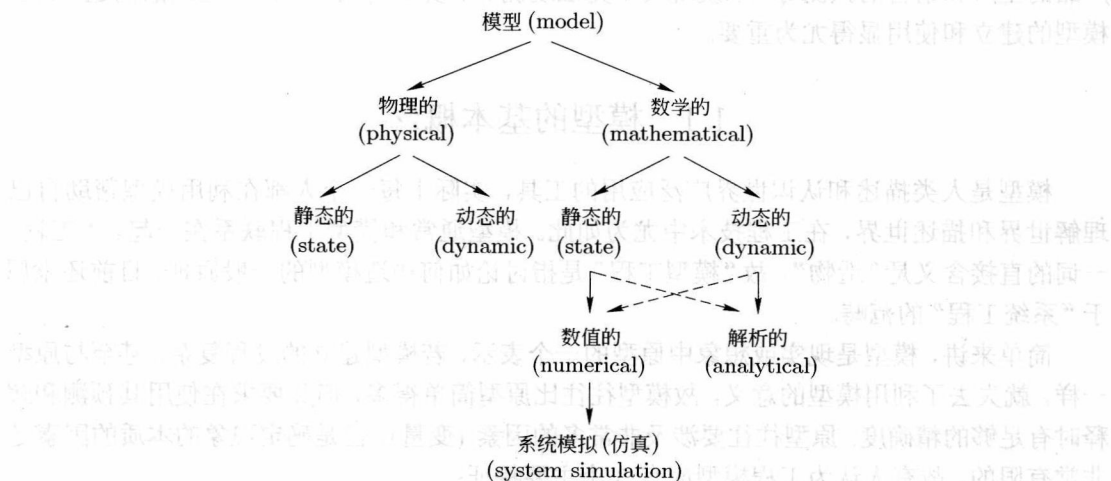


图 1-1 按学科分类的模型分布

如 C：

- (1) 原样模型 (样机)；
- (2) 相似模型；
- (3) 图形模型；

- | | |
|---|--------|
| 1) 图画 —— 示形 | } 不严格图 |
| 2) 草图 —— 示意 | |
| 3) 框图 —— 部分之间, 或部分与整体之间的联系 | |
| 4) 图论图 —— 无向量图: $G(V, E)$
有向量图: $G(V, A)$
有标量图: $G(V, A)$ | } 严格图 |
| 5) 逻辑图 | |
| 6) 工程图 | |

(4) 用数学符号和数学公式来表达系统的结构或过程, 以往常把数学化与科学化的概念看做是等同的。其实, 由于工程开发问题的复杂性、模糊性、无样本性和信息的不充分性, 因此在系统开发中, 数学形式不是追求的目标, 而是具体化过程中的一个手段。

1.2.2 模型在系统开发中的作用

模型并无真假之分。一般来讲, 模型都是假的、伪造的。模型的价值在于其适用性和有效性。工程实体与各类模型的关系如图 1-2 所示。

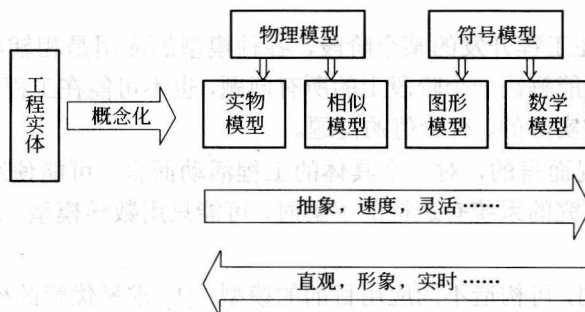


图 1-2 工程实体与各类模型的关系

在工程开发的循环过程中, 各类模型的地位如图 1-3 所示。

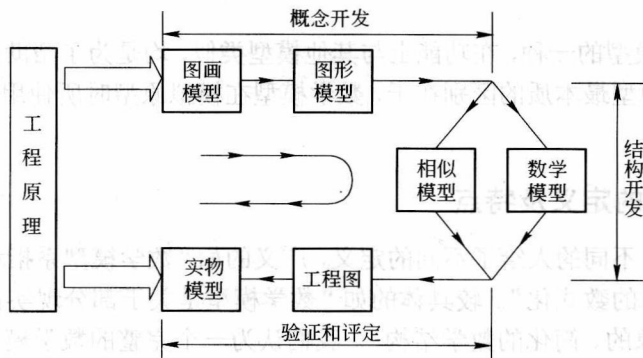


图 1-3 各类模型在工程开发循环过程中的地位

对于一个一般的工程开发过程中的某个阶段,各类模型的使用情况如图 1-4 所示。从工程开发的相应位置上引一小段线,这个水平线与各三角形的交线长度,半定量地表征着这个阶段上使用各种模型的分量的比例。

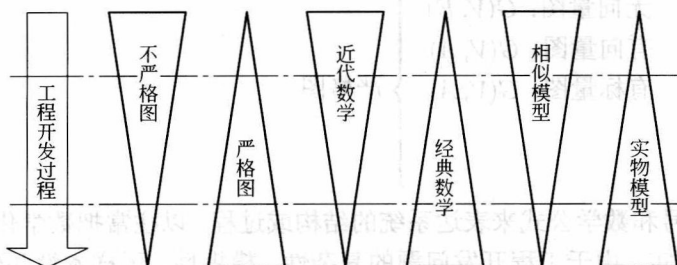


图 1-4 各类模型在工程开发的不同阶段的使用情况

由图 1-4 可以看出,在工程开发的初始阶段,以不严格图、近代数学、相似模型为主,它表明在工程的展开阶段,特别需要新的思想和概念,需要一种开拓性的精神。而在工程开发的收尾阶段,严格图、经典数学、实物模型是工具,这时特别强调降低不确定性和各种工程技术手段的相互联系。

图 1-4 还反映出在工程开发的某个阶段,各种模型的应用是相辅相成的,只有主次之分,某一种模型既不可能解决一个阶段上的所有问题,也不可能在工程开展的始终只使用一种模型,这是一个非常实际的、有价值的问题。

以上是就一般情况而言的,对一个具体的工程活动而言,可能使用某几种或只用一种模型,特别是在对可研究的系统有透彻的了解时,可能只用数学模型,或数学模型加上工程图。

按系统的目标不同,可构造不同应用目的的模型:(1) 求最优解的模型;(2) 分析系统行为的模型;(3) 检定系统未来状态的模型。或为:(1) 描述性的模型——机理模型;(2) 控制模型。

1.3 数学模型

数学模型也是模型的一种,在功能上与其他模型类似,均是为了帮助人们更好地理解 and 认识原型。与其他模型最本质的区别在于,数学模型在模拟原型时所使用的材料不同,它所用的是“数学语言”。

1.3.1 数学模型的定义及特点

对于数学模型,不同的人给了不同的定义,广义的如“数学模型系指利用数学语言来构造的模型”或“现象的数式化”。较具体的如“数学模型是关于部分现实世界和为某种特殊目的而作的一个抽象的、简化的数学结构”。我们认为一个完整的数学模型可描述为:对于现实中的一个特定对象,为了一个特定目的,根据其特有的内在规律,根据需要做出必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构。

简而言之,数学模型的实质主要包括以下 3 个方面:

- (1) 有一个原型;
- (2) 为了某种目的;
- (3) 用数学语言来构造。

科学发展史表明,没有哪一门学科的历史发展是从它的逻辑基础上建立起来的。相反地,一门学科的逻辑基础,往往是在它的发展后期才能完成。

人们致力于研究模型的主要原因是可以避免或减少对现实世界做昂贵的、不希望的或不可能的实验。当前数学模型的应用非常广泛,几乎没有一个领域中见不到它的身影,其原因是明显的:

- (1) 高度的抽象性。包含了更多的理解和经验,可用精练的语言来处理问题。
- (2) 明确性。可以精确地用公式来表达人们的想法,从而减少了某些暗含的假定。
- (3) 适应性。有大量的定理可供选用,可用于多种用途,甚至不同的实际问题。
- (4) 可以处理变量众多、关系复杂的问题。
- (5) 高精度。在有意义的范围内。
- (6) 灵活性。易于修改参数或计算关系。
- (7) 可通过计算求解,获得直观上难以得到的认识。
- (8) 速度快。
- (9) 成本低。
- (10) 可使用高速电子计算机。

所以,尽管数学模型往往缺乏直观性、形象性和实时感,但由于其优点很多,因此是人们普遍应用的有效手段。常说的模型化指的就是建立数学模型。

应该强调的是,不要把数学模型和电子计算机等同起来,虽然许多数学模型要用到电子计算机,甚至有不少模型没有电子计算机就无法实现。

另一点要强调的是,并非越复杂的数学模型越好,我们的工作仍是在简单明了的精度之间寻求最佳的决策。

1.3.2 数学模型的分类

数学模型种类繁多,从事不同工作的人习惯于从不同的角度、概念来加以分类。表 1-1 和表 1-2 分别描述了两种数学模型的综合分类系统,图 1-5 也显示了这种数学现象的分类。

表 1-1 数学模型综合分类系统 I

分类方法	分 类
数学结构	图的; 非分析的; 分析的
问题的性质	确定的; 不确定的
	静态的; 动态的
	连续的; 离散的
	分明的; 不分明的
解的形式	解析的; 数值的
算法应用	第一类工程数学
	第二类工程数学
应用	系统的描述和理解
	控制

表 1-2 数学模型综合分类系统 II

分类方法	分 类
按变量形式	确定型模型；随机型模型
	连续型模型；离散型模型
	分明型模型；模糊型模型
按变量之间的关系	代数模型
	微分方程模型；积分方程模型
	概率统计模型
	逻辑关系模型
按解法	解析解法模型
	数值法模型
按用途	科学研究用模型
	工程技术用模型
	管理用模型

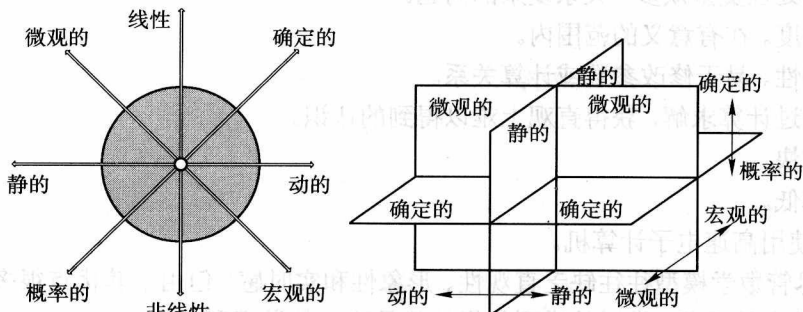


图 1-5 数学现象的分类

所谓的分析的数学模型，是指用无穷小量来研究函数的方法，即大家都熟悉的微分方程、积分方程、偏微分方程、积分变换和级数等。

非分析的数学模型包括代数的和几何的形式。代数的最初含义是变换表达式和解代数方程，用符号来表示变量和常量及对他们进行运算，而近来代数不仅扩大到矢量，以至到集合、群等极为广泛的、有价值的领域。而几何所研究的各种量的空间关系，也远远扩大到广泛的、抽象的空间。由于代数模型计算上的成熟和方便，其使用是十分广泛的。

图的模型，在工程开发中也为一类广泛应用的形式，如框图、树图、信号流程图、网络等。在数学分支上，图论也为一个古老而又十分年轻的领域。

近年来，在工程开发中常把来自物理对象的经典工程数学称为第一类工程数学，它主要指常微分方程、积分方程、积分变换方程、变分、偏微分方程、矩阵等数学分支；而将运筹、统计数理逻辑、集合、图论等近代数学所组成的离散数学称为第二类工程数学。冶金工程专业的学生、研究生和科技工作者，大都对第二类工程数学较为陌生。

问题的确定性和不确定性、连续性和离散性、分明性和不分明性、静态和动态的区别要从问题的本质、变量的本身特征来区分，要把问题的性质和求解方法区分开来。例如，连续性的问题可用离散的差分方法求解，确定性的问题可用不确定的蒙特卡洛法求解，反之的例子也有不少。

对问题的不确定性还要进一步区分：统计不确定性和现实不确定性，对统计不确定性只

能认识而不能改变；对现实不确定性虽然也是用统计不确定性来计量，但是通过多测取数据，或控制某些变量可以限制其不确定性。

解的形式由其特征而决定，特别是某种情况下有些问题的解析解根本不存在。

模型的使用目的对模型的构造有决定性的影响。当科学研究中重点是针对现象的理解时，多用描述型模型；工程开发过程中多为描述型和控制型模型两者结合使用；管理科学中则更多地使用控制模型或优化模型。

1.3.3 数学模型的建立和使用

在试图解释世界或控制一个系统目标时，建立模型是必要的，可以认为任何科学理解都是模型。所以从最纯粹的理论到最实用的科学工作都应懂得怎样建立和使用数学模型。问题的难点在于了解和学会如何往来于现实世界和数学世界之间。

通常一个完整的数学模型的建立主要包括以下几个步骤：

(1) 形成问题：了解实际背景，明确建模目的，搜集有关信息，掌握对象特征，最终要形成一个比较清晰的“问题”。

(2) 假设与简化：针对问题特点和建模目的，作出合理的、简化的假设。“合理”要求模型必须能够反映现实世界中人们最关心的那部分特征，而“简化”又要求所建立的模型应该简明、实用、可操作性强，从而能够满足一定的普适性。这需要研究者在合理与简化之间作出有效折中。

(3) 建立模型：用数学的语言、符号来描述问题，这里需要研究者充分发挥想象力、多使用类比方法，同时尽量使用简单的数学工具，在工程技术学科中尤为如此。这里反映了研究者把一个实际问题转化为数学问题的能力。

(4) 模型的检验与评价：模型建立之后，需要返回到现实世界，利用现实世界的实际现象和数据对模型的合理性和适用性进行检验与评价。例如对结果的误差分析、统计分析、模型对数据的稳定性分析等。

(5) 模型的改进：若模型精度不满足要求，需要对模型结构及参数进行调整，这需要多次往返于现实世界和数学世界之间，直到用数学语言描述的模型能够满足现实世界的需求。

(6) 模型求解：借助于各种数学方法、软件和计算机技术对模型进行求解、分析。由于实际问题的复杂性，多数模型必须借助于电子计算机才能求解，这也是数学模型的发展与计算机技术的发展密不可分的主要原因。

建立数学模型的全过程如图 1-6 所示。



图 1-6 建立数学模型的全过程

图 1-6 中的几个关键词解释如下：

表述：指的是把现实问题根据建模目的和信息“翻译”成数学问题；

求解：选择适当的数学方法求得数学模型的解答；

解释：将数学语言表述的解答“翻译”回现实对象；

验证：用现实对象的信息检验得到的解答。

1.4 模拟和仿真

需要指出的是，模拟（或仿真）与数值模拟在本质上是完全不同的。确切地讲，模拟是一种实验，为了弄清实际或设想中的一个系统的性质和各因素之间的关系，必须设计一个模拟系统，在实验中做定量的观察。而数值模拟指的是利用数学模型进行实验，根据数学模型给出的解答或表述去对现实对象进行分析和观察。

模拟是很花时间和很费钱的，而且设计和实现模拟也是很复杂和困难的事。另外，模拟试验的结果可能与实际问题有或大或小的差异，还须做进一步的检验和校正。尽管如此，模拟研究仍是广泛应用的，其原因有：

- (1) 实际问题难以实施，如重大自然灾害、产品的生产和销售的预测。
- (2) 检查某种方案的结果。
- (3) 观察某些不易直观理解的复杂观察。
- (4) 有危险的观察。
- (5) 无法重复的观察。
- (6) 成本过高的工作。
- (7) 证明理论。

需要强调的是，模拟是用模型做实验，在实验过程中需要多方位观察和分析。虽然用到的均为一系列数学公式，但模拟不是像公式求解那样致力于直接寻求特定变量之间的关系，而是通过设计实验逻辑程序，用实验来观察，从而导出各变量之间的关系，以达了解系统。

模拟和数值计算虽然都是在计算机上进行的，但本质和概念均不同。

例 针对某种商品，假定市场条件下商品的需求量 (Q)、供应量 (S) 与商品价格 (p) 均呈线性关系，其价格模型可表示为式 (1-1) 和式 (1-2)。

$$\begin{cases} Q = a - bp & (1-1a) \\ S = c + dp & (1-1b) \end{cases}$$

求解条件：

$$Q = S \quad (1-2)$$

其中， a, b, c, d 为系统结构参数。

(1) 从数学观点看来，是求解下列联立方程：

$$\begin{cases} Q = a - bp \\ S = c + dp \\ Q = S \end{cases}$$

求其解析解：

$$p^* = \frac{a - c}{b + d}$$

$$Q = S = a - bp^* = c + dp^*$$