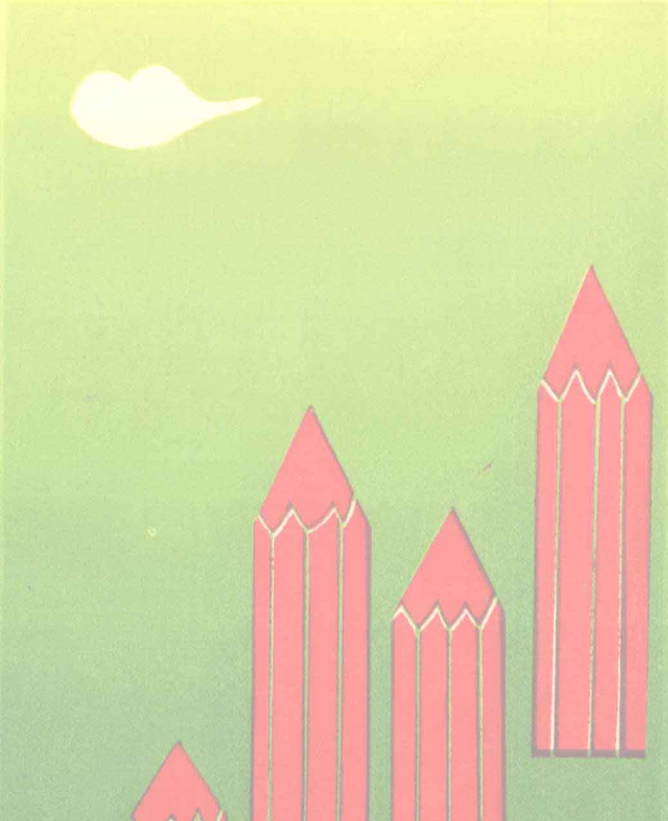
中学数学速解法



张中华　编

华中师范大学出版社

中学数学速解法

张 中 华 编

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书向中学生介绍了快速记忆和修正数学公式的基本方法.系统地介绍了提高数学解题速度所必备的一些知识、技巧和方法.从各种试题中选入了约500道作为例、习题.全部给出了详细的解答.可使读者切身体会到数学解题捷径之存在。

经验表明.掌握本书所述方法的学生.在各种数学考试中.大约可节约30%到50%的时间。

本书适合初中生、高中生阅读.对中学数学教师具有一定的参考价值。

鄂新登字11号

中学数学速解法

张中华 编

*

华中师范大学出版社发行

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所经销

武汉市汉桥印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 字数 100千字

1991年12月第1版 1992年4月第2次印刷

ISBN 7-5622-0788-7/G·269

印数: 10001-20000 定价: 2.10元

前　　言

各级各类的数学考试，题目越来越多，份量越来越重。解题能力差、速度慢的学生往往做不完全部试题，考不出应有的成绩。

本书以中学数学为对象，以辩证法为指导，运用逻辑与直觉，分析与推理，共性与个性的关系，对数学完美和谐的形式作了较为详细的分析。

她告诉读者，怎样轻松而有效地记忆数学公式；如何正确地评价自己得出的结果；怎样选择正确的结论；怎样才能尽快地找到解决数学问题的途径。

本书对中学数学中（非几何）的对称进行了详细的研究，对数学中广泛存在的对称性问题的一般解法，作了较全面的探讨。这些都是快速解决数学问题必不可少的。

本书从历年高考、中考的试题中选入了大量的例题和习题，全部给出了详细的解答，通过这些例、习题的解法的阅读，可以感到数学解题确实存在着不少捷径。

记不住数学公式影响解题速度是大部分中学生感到苦恼的事，这本书对如何写出和矫正数学公式进行了详细的分析，对中学生有一定的帮助。

本书绝大部分内容是作者二十几年数学学习的经验总结。在取材时，力求实用可行，为一般水平的学生所接受，而不求全面精深，因此，难免挂一漏万，但是作者相信，本书对各类中学数学考试的学生提高解题速度，节约30%以上的时间是有可能的。

本书是为初中生，高中生学习数学和应考而写的，对中学数学教师具有一定的参考价值。

编者

目　　录

第一章　基本方法

§1.1　特值法

数学中讨论的对象，绝大部分是在一定的范围内（即某集合内）变化的. 例如：三角形可以是锐角的、直角的或钝角的三角形，也可以是等腰的、等边的甚至可以是某个特定的三角形；实数 x，既可以为有理数，又可以为无理数、为整数、为正数、为负数、为零、为 1……等等. 为了讨论问题的方便，我们常常把一个在大范围（或全集）内变化的对象限定在一个比较小的范围（或子集）内变化，有时甚至让它固定起来（即取为集合中的某元素），这种方法我们称为**特值法**.

特值法大致可分为**定值法**、**限域法**、**特殊化法**（即**定性法**）. 由于特值法使我们考虑的对象的范围缩小了，具体化、明确化了，因而往往很容易解决问题，因此特值法是我们解决数学问题的捷径之一.

例 1　填空：已知 $x+\dfrac{9}{y}=3$，$y+\dfrac{1}{z}=3$，

则 $z+\dfrac{1}{x}=$________.

分析　由已知条件可知，x，y，z 被两个方程制约，显然不确定，不妨用特值法解.

令 $x=-6$，$y=1$，$z=\frac{1}{2}$，显然满足已知条件，这时，$z+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$，故应填$\frac{1}{3}$.

[练习 1]　已知：$6x^2+12y^2=17xy$，则 $\dfrac{x}{y-\dfrac{x}{1-\dfrac{y}{x}}}=$ ________.

[练习 2]　当$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$时，式子$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值为 ________.

例 2（选择题）

若 $a\geqslant 1$，那么方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解之和为（　　）

(A)$\sqrt{a}-1$；(B)$\frac{\sqrt{a}-1}{2}$；(C)$\frac{\sqrt{a-1}}{2}$；(D)$\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$.

分析　a 虽然为已知数，但它可以在 $a\geqslant 1$ 内变化，直接解出 x 来很不容易，用特值法解十分简单.

令 $a=3$，则原方程变为：

$$\sqrt{3-\sqrt{3+x}}=x.$$

由观察可知：$x=1$ 是方程一根，又因为 $x\geqslant 0$，故这个方程的所有实根之和$\geqslant 1$. 但 $a=3$ 时，四个备选答案为：

(A)$\sqrt{3}-1<1$；　　(B)$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<1$；

(C)$\frac{\sqrt{3-1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$；　(D)$\frac{\sqrt{4\times 3-3}-1}{2}=1$.

故选(D).

注意：$a=1$ 时，也可观察出 $x=0$ 这一根，但这时四个备选答案都为 0，无法判断.

另外，方程左边关于 x 单调减，右边关于 x 单调增，故此方程至多有一个实根. 故只须验证四个备选答案谁适合方程就行了.

[练习 3] 若 $abc=1$，则 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$的值是(　　)

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 2.

[练习 4] 如果 $a>b>c>0$，$p=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，$q=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$r=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. 那么乘积 pq，pr，qr，q^2，r^2 中最大的一个是(　　).

(A) pq；　(B) pr；　(C) qr；　(D) q^2；　(E) r^2.

例 1、例 2 的解法都是将在某范围内变化的量，确定在某一个特定的值上，这种方法我们称为**定值法**.

例 3　a、b、c 是三角形的三条边，则方程

$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$.　　(　　)

(A)有两个不等实根；　(B)有两相等实根；

(C)无实根；　(D)有根 $x=-1$.

如果将“三角形”限定在“等边三角形”的范围内，那么很容易得出答案.

令 $a=b=c$，则原方程变为 $b^2(x^2+x+1)=0$ 方程无实根. 故选(C).

象这样，将在一定范围内变化的对象，限制在某一特定的较小的范围内变化的方法，我们称之为**限域法**.

[练习 5] 若 a、b、c 为正实数，且 $a^2+b^2=c^2$，那么 a^3+b^3 和 c^3 的大小关系应是(　　).

(A)$a^3+b^3<c^3$；　(B)$a^3+b^3=c^3$；　(C)$a^3+b^3>c^3$.

例 4　判断公式 $\cos(x+y)=\sin x\sin y-\cos x\cos y$ 的正误.

解 限定 x，y 是锐角，则 $0<x+y<\pi$，当 x，y 增加时，$\sin x\sin y$ 增加，$\cos x\cos y$ 减少，因而 $\sin x\sin y-\cos x\cos y$ 增加，但 $\cos(x+y)$减少，两边性质不符，故公式有误.

习题 1. 1

1. 如果 $a\in R$，且 $a^2+a<0$，那么 a，a^2，$-a$，$-a^2$ 的大小关系是(　　)

   (A)$a^2>a>-a^2>-a$；　　(B)$-a>a^2>-a^2>a$；

   (C)$-a>a^2>a>-a^2$；　　(D)$a^2>-a>a>-a^2$.

2. 已知：$x>0$，$y>0$，且 $x+y\leqslant 4$，则下列不等式中恒能成立的是(　　).

   (A)$\dfrac{1}{x+y}\leqslant\dfrac{1}{4}$；　　(B)$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 1$；

   (C)$\sqrt{xy}\geqslant 2$；　　(D)$\dfrac{1}{xy}\geqslant 1$.

3. a、b 满足 $0<a<b<1$，下列不等式正确的是(　　)

   (A)$a^a<a^b$；　(B)$b^a<b^b$；　(C)$a^a<b^a$；　(D)$b^b<a^b$

4. 若 $a>0$，$b>0$，则恒成立的不等式是(　　).

   (A)$\dfrac{2ab}{a+b}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$；　　(B)$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$；

   (C)$\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$；　　(D)$\sqrt{ab}<\dfrac{2ab}{a+b}<\dfrac{a+b}{2}$.

5. 设实数 a 满足 $0<a<\dfrac{1}{2}$，又令 $F=1-a^2$，$G=1+a^2$，$H=\dfrac{1}{1-a}$，$T=\dfrac{1}{1+a}$，那么它们的大小关系应当是(　　).

   (A) $G>F>H>T$；　　(B) $G>F>T>H$；

   (C) $T>H>G>F$；　　(C) $H>G>F>T$.

6. a、b、c、d、m、n 均为正数，$T=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，

$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{m}}$，则(　　)

(A)$T>Q$；(B)$T\geqslant Q$；(C)$T<Q$；(D)$T\leqslant Q$.

7. 设 a，b，c，d 均为正数，$a>b$，$c>d$，$a+b>c+d$，$ab=cd$，那么 a，b，c，d 之间的大小关系是(　　).

(A) $a>b>c>d$；　　(B) $a>c>b>d$；

(C) $c>a>d>b$；　　(D) $a>c>d>b$.

8. 设 $a\geqslant b\geqslant c$，$x\geqslant y\geqslant z$，$x+y+z=0$，那么 $ax+by+cz$ 的值必是(　　).

(A)正数，(B)非负数，(C)负数，(D)非正数

9. 若 $a\in R$，且对于一切实数 x 都有 $ax^2+ax+a+3>0$，那么 a 值的范围应当是(　　).

(A)$a>0$；　　(B)$a\geqslant 0$；

(C)$a<-4$；　　(D)$a<-4$ 或 $a\geqslant 0$.

10. 设复数 $z=a+bi(a,b\in R$，且 $b\neq 0)$，则 $|z^2|$、$|z|^2$、z^2 的关系是(　　)

(A)$|z^2|=|z|^2=z^2$；　　(B)$|z^2|=|z|^2=z^2$；

(C)$|z^2|\neq|z|^2=z^2$；　　(D)互不相等.

11. 复数 $1-\cos\theta+i\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$的幅角主值应为(　　)

(A)$\dfrac{\theta}{2}$；　　(B)$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$；

(C)$\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$；　　(D)$\dfrac{5\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$.

12. 若 α，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则必有(　　).

(A) $\cos(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$；

(B) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$；

(C) $\cos(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$；

(D) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

13. 若 a，b，c，d 为实数，且 c、d 不同时为零，则 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 为实数的充要条件是(　　)

(A) b，d 同时为 0；　　(B) $ac+bd=0$；

(C) $bc-ad=0$；　　(D) $bc+ad=0$.

14. 设 z_1，z_2 为复数，$|z_1|+|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，则 $|z_1-z_2|$ 的值是(　　)

(A) $\sqrt{3}$；(B) $\sqrt{2}$；(C) 2；(D) $2\sqrt{2}$；(E) 0.

15. 已知 a，b，c，d 互不相等，试化简：

$$f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

及

$$g(x)=\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

§1.2　特性法

大家知道，任何事物都具有它的一些独特的性质，以区别于其它事物. 数学中讨论的对象，如图形、式子、概念等，它们各有自己独特的性质，灵活地考察和运用它们的各种性质，对解决一些数学问题，可以收到意想不到的效果.

数学中用得较多的特性有：奇偶性，单调性，周期性，对称性等.

例 1　设 $f(x)=a+bx\text{ctg}2x+d\cos\dfrac{\pi x}{2}$，其中 a，b，c 都是常数，若 $f(1)=20$，则 $f(-1)=$ ________.

解　只须指出 $f(x)$ 为偶函数，即知 $f(-1)=f(1)=20$.

例 2　若 $f(-x^3)+f(x^3)=kx$，$x\in R$，试求常数 k.

解 注意到 $f(-x^3)+f(x^3)$关于 x 为偶的，因而 kx 也应为偶的，故 kx 既奇又偶. 必有 $k=0$(因为 $k(-x)=kx$，$k\in R$)

[练习 1] 若 $f(x)=ax^7+b\sqrt[3]{x}+15$，其中 a，b 为常数，且 $f(3)=7$，求 $f(-3)$.

[练习 2] (选择题)$\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}=$ ________

(*A*) $\cos\theta$；(*B*) $-\cos\theta$；(*C*) $\sin\theta$；(*D*) $-\sin\theta$

例 3 在实数范围内，解方程

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=4-x.$$

分析 对此方程，若用一般去根号的方法，将得一个六次方程. 若注意方程两端的单调性，此方程就易解了.

显然方程的实根 x 必须满足 $-2\leqslant x\leqslant 4$. 方程左边的 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$ 当 x 在 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 内增加时，其值也增大，即在 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$ 单调增加. 而方程右边的 $4-x$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 内是单调减的. 象这种一增、一减的两个式子，至多只有一次相等的机会.

解 由观察知道：$x=2$ 是方程之一实根. 若 $x>2$，则左边>2，右边<2. 若 $x<2(x\geqslant -2)$，则左边<2，右边>2，总之，$x=2$ 是方程的唯一实根.

[练习 3] 解方程：$\sin x+x=0$.

[练习 4] 解方程：$\sqrt{7x-3}+\sqrt{x-1}=2$.

[练习 5] 解方程：$\sin x+\operatorname{tg}x=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. $\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

例 4 (选择题)化简式子：

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$=(\quad)$

(*A*) $\frac{-2b}{(a-b)(a-c)}$;　　(*B*) $\frac{-2a}{(b-c)(b-a)}$;

(*C*) $\frac{-2c}{(c-a)(c-b)}$;　　(*D*) 0.

分析　要化简的式子关于字母 a、b、c 是完全对称的，即任意调换两个或三个字母的位置，结果不变．由于化简是恒等变形，这种对称性将永远保留，因此，化简的结果也应具有对称性．显然，备选答案中，只有(*D*)具有对称性，故应选(*D*).

例 5　试求$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$的值.

分析　$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$和$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$具有某种对称性，可以转化为对称性问题来解.

解　设 $a=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$，$b=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$，则

$$\begin{cases}a^3+b^3=40,\\ ab=2.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+b^3+3ab(a+b)\\&=40+6(a+b).\end{aligned}$$

因此 $a+b$ 是方程 $x^3-6x-40=0$ 的实根．由观察知 $x=4$ 是方程之一根，故方程左边可分解，变为

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0.$$

易知 $x=4$ 是方程的唯一实根．因此，$a+b=4$，这就是欲求的值.

[练习 6]　在$\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，证明：(1)$a=b\cos C+c\cos B$；(2)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，

则 $\cos A+\cos B+\cos C>1$.

［练习 7］（选择题）$\sin(\alpha-\beta)=($　　$)$.

（A）$\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$；（$B$）$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

（C）$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；（$D$）$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

［练习 8］（选择题）

$$\frac{b-c}{(a-b)(c-a)}+\frac{c-a}{(b-c)(a-b)}+\frac{a-b}{(c-a)(b-c)}$$
$$=(\quad).$$

（A）$\frac{2}{a-b}+\frac{2}{a-c}+\frac{2}{c-b}$；（$B$）$\frac{2}{b-a}+\frac{2}{c-a}+\frac{2}{c-b}$；

（C）$\frac{2}{b-a}+\frac{2}{c-a}+\frac{2}{a-c}$；（$D$）0.

总之，特性法，可以使我们在解决某些数学问题时，避难就易，较快地找到解决问题的方法.

习 题 1. 2

1. 设 $f(x)=kx+\frac{l}{x}-4(k,l\in R)$，已知 $f(2+\sqrt{3})=0$，试求 $f(\frac{1}{\sqrt{3}-2})$的值.

2. 已知 $f(x)=ax^4+bx^2-\frac{c}{x^2}-3x-2$，试比较 $f(\lg(\log_2 3))$ 与 $f(\lg(\log_3 2))$ 的大小.

3. 试求函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$的值域.

4. 解不等式$\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x+7}\leqslant 3$.

5. 求函数 $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值.

6. 已知：$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

§1.3 直觉法

所谓**直觉**，是指通过感觉器官和以往经验对事物的直接的认识，似乎可以不用或少用逻辑推理．数学中的直觉法，一般有观察法和图象法．直觉法对培养直觉能力，对数学学习有很大帮助．

例 1 解方程 $x+\sqrt{2x-1}=2$.

解 由观察知：$x=1$ 是方程一根，且当 $x>1$ 时，$x+\sqrt{2x-1}>1+\sqrt{2\times1-1}=2$，当 $x<1$ 时，$(x\geqslant\frac{1}{2})$ $x+\sqrt{2x-1}<2$．故 $x=1$ 是方程的唯一实根．

［练习 1］ 解方程 $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+7}=3$.

［练习 2］ 解方程 $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$.

［练习 3］ 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，解关于 x 的方程：

$$(\sin\theta)^x+(\cos\theta)^x=1.$$

［练习 4］ 解方程 $3^x+4^x=5^x$.

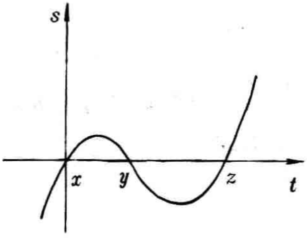
几乎所有数学问题都离不开观察，能观察出问题的性质、条件、结论之间的关系等对解决问题都是必不可少，有时甚至是关键的．

例 2 确定最大的实数 z，使得 $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=3$ 并且 x、y 是实数．

解 满足题设条件的 x、y、z 是各方程 $t^3-5t^2+3t+p=0$ $(p=-xyz)$ 的三个根．

令 $$S=t^3-5t^2+3t+p,$$

作出 $p=0$ 时的图象(如图,由根的对称性,不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$.)当 p 变动时,图象上下平行移动,从图象可以看出,当截距 p 变小时,z 值变大,当 $x=y$ 时,p 值取最小值,此时 z 取最大值,因此,最大的 z 由下列方程组确定:



$$\begin{cases}x=y,\\ x+y+z=5,\ xy+yz+zx=3.\end{cases}$$

$(x\leqslant y\leqslant z)$

解之得,$x=y=\dfrac{1}{3}$,$z=\dfrac{13}{3}$.

在例 2 中,利用函数 $S=t^3-5t^2+5t+p$ 的图象变动情况,使我们顺利地解决了问题. 而一般的解法,都要解比较复杂的一元二次不等式.

[练习 5] 设 x、y、z 都是实数,且满足

$$x+y+z=a,$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}\quad(a>0)$$

试证:$0\leqslant x$,y,$z\leqslant\dfrac{2}{3}a$.

[练习 6] 用图象法解方程 $x^3+\sin x=0$.

例 3 解不等式 $-3x^2+2x+1>0$.

解 函数 $y=-3x^2+2x+1$ 的图象是抛物线,开口向下,与 x 轴的两个交点就是方程 $-3x^2+2x+1=0$ 的两个根,即 $x=1$ 和 $x=-\dfrac{1}{3}$. 如图,从图象上可以看出,$-3x^2+2x+1>0$ 的解集是