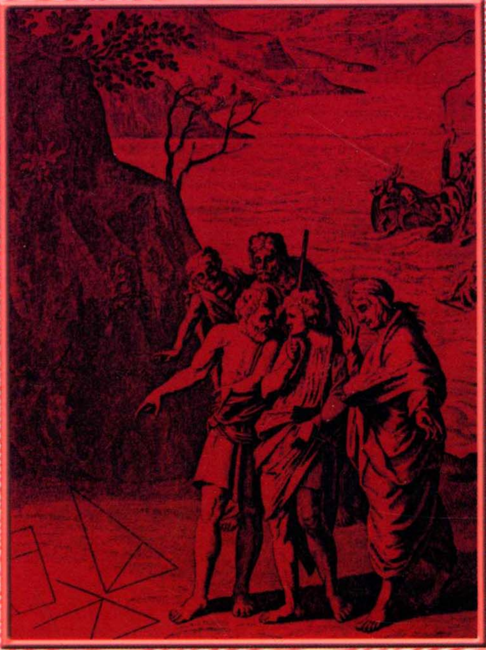
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理

——从无限集谈起



谢彦麟 编著

◎集的势及其运算

◎有序集的序型及其运算

◎康托集的奇特性质

◎皮亚诺曲线

◎分球奇论

HITP

哈爾濱工業

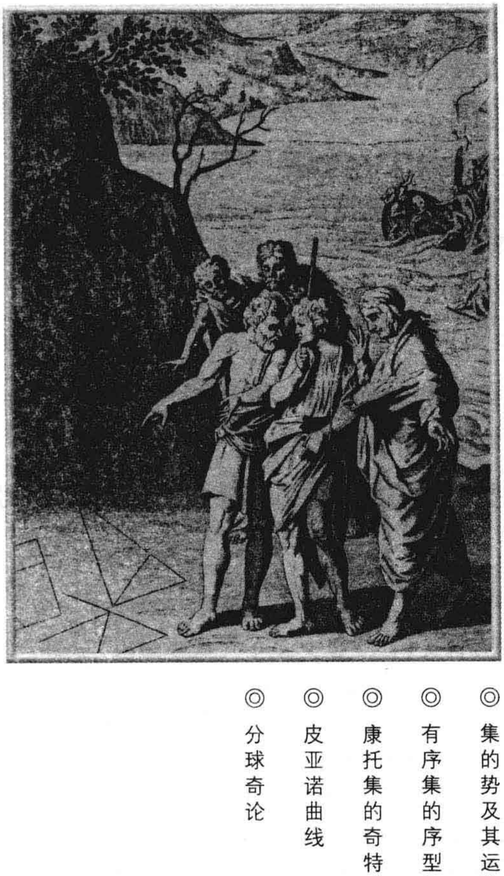
HARBIN INSTITUTE OF

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理

——从无限集谈起

谢彦麟 编著



◎集的势及其运算

◎有序集的序型及其运算

◎康托集的奇特性质

◎皮亚诺曲线

◎分球奇论

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理，综述了无限集区别于有限集的种种怪事。主要综述了无限集之势及其运算；有序集之序型及其运算；康托集之奇特性质；更怪的是皮亚诺曲线；最怪的是两个“分球奇论”。

本书适合大、中学生和数学教师以及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理：从无限集谈起/谢彦麟编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3723-4

Ⅰ.①皮… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①集论-普及读物. Ⅳ.①O144-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 167608 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 4.75 字数 66 千字
版　　次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3723-4
定　　价 18.00 元

前言

本书综述无限集区别于有限集之种种怪事.主要综述无限集之势及其运算;有序集之序型及其运算;良序集之序数都与有限集不同之怪;康托(Cantor)集之奇特性质;更怪的是线段[0,1]可连续映射成充满正方形的连续曲线(皮亚诺(Peano)曲线),见文献[1];最怪的是两个"分球奇论":(见文献[2])一个球 S 可分成两部分 M,N,再把 M 拆开有限部分可分别移动重新拼成球 S,对 N 也一样,即一个球 S 可拆开重组成两个与 S 一样的球;对于球面也有出乎想象的怪事.且这两奇论都可用数学严密证明.这是笔者一生沉醉于数学海洋遇到最怪之事.本书最后两章详细论述皮亚诺曲线与分球奇论.

作　者

◎

目录

第1章 集的势及其运算

有限集与其真子集不能对等，即它们的所有元素不能有一一对应之关系. 但无限集——正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 与其真子集 $\{n+1,n+2,n+3,\cdots\}$ 有一一对应关系，这只要对 $a=1,2,3,\cdots$，令 a 与 $a+n$ 对应即可. 又如矩形 $[0,a]\times[0,b]$（以 x 轴线段 $[0,a]$ 及 y 轴线段 $[0,b]$ 为两边所得矩形，视为点集），令其每一点 (x,y) 映射成 $(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$，则这矩形与其真子集 $[0,\frac{1}{2}a]\times[0,\frac{1}{2}b]$ 所有点一一对应. 实际上面积不同的两矩形都对等，其实我们放大、缩小地图相比时已司空见惯，也就见怪不怪了.

实际上任何无限集 S 都可以与其真子集对等，这是无限的特征（最平常的怪事）：取 S 的可列子集

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

S 的真子集 $S'=S\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 令 M 中元素 a_k 映射为 a_{k+n}，而 $S\setminus M$ 中元素不变，则可见 S 与 S' 对等.

称所有互相对等之集有同一个“势”，于是每个集有一个势. 本书把所有可列集（可排成一序列之集，又称可数集），如不大于一整数的所有整数，不小于一整数的所有整数，整数集 **Z** 可排成

$$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

有理数集 **Q** 可排成

$$\{0,1,-1,2,-2,3,\frac{1}{3},-3,-\frac{1}{3},4,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},-4,$$

$$-\frac{3}{2},-\frac{2}{3},-\frac{1}{4},5,\frac{1}{5},-5,-\frac{1}{5},6,\frac{5}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{1}{6},$$

$$-6,-\frac{5}{2},-\frac{4}{3},-\frac{3}{4},-\frac{2}{5},-\frac{1}{6},\cdots\} \tag{1.1}$$

视正、负整数分母为1，逐次排分子分母和为2，3，4，5，6，7，…的既约分数.

有理数的任何无限子集 S（把 S 中所有数按上式次序排列[①]，实际上可列集的任何无限子集亦是可列集）之势记为 a. 有 n 个元素的有限集（显然互相对等）的势记为 n. 故“势”就是有限集的元素个数在一切集的推广. 由前述它与长度、面积、体积等“测度”无关（点集不一定有测度）.

在分析、几何中视 $+\infty$ 为比一切正数大的唯一的“数”，即只有一个 $+\infty$. 正整数趋向 $+\infty$ 与正实数趋向的 $+\infty$ 是一样的.

但无限集中尚有其势不是 a 的“不可列集”. $[0,1)$ 中所有实数组成的集便是不可列集，证之如下：

若 $[0,1)$ 内所有实数的集是可列集，把它们用无限小数（对有限小数，在其末位后无限补0）记之为

① 集 **Q** 在数轴上处处稠密却与孤立点集 **Z** 对等. 这又是一怪.

$$x_1 = 0.\,a_{11}a_{12}\cdots a_{1k}\cdots = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{1j}}{10^j}$$

$$x_2 = 0.\,a_{21}a_{22}\cdots a_{2k}\cdots$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0.\,a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nk}\cdots$$

$$\vdots$$

现取[0,1)中无限小数

$$x = 0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

使对任何正整数 n,有

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{当 } a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{当 } a_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

则 x 与任一 x_n 的第 n 位数字不同,又 x 的所有各位小数数字不是0,9(在 x_n 与 x 中不会出现

$$0.\,b_1b_2\cdots b_{k-1}b_k00\cdots = 0.\,b_1b_2\cdots b_{k-1}(b_k-1)999\cdots$$

因 $\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\frac{9}{10^j} = \frac{1}{10^k}$),故 x 不等于任何 x_n. 这与原假设[0,1)中所有实数可列在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中矛盾.

本书把[0,1)内所有实数的集之势记为 c①.

势为 c 的点集尚有:

由[0,1)(点集)的势为 c,作可逆变换(一一对应)$t = \tan\frac{\pi}{2}x$ 把[0,1)变成$[0, +\infty)$;作可逆变换 $t = \tan\frac{-\pi}{2}x$ 把[0,1)变成$(-\infty, 0]$,故(去掉点0,势不

① 现一般文献把此势用专门的希伯来文字母 $\aleph$ 表示(译为 aleph(阿列夫)),而把可列集之势记为 $\aleph_0$. 亦有文献如[2],[3]中用英文小写字母表示,但[2]中把可列集之势记为 d.

变[①])集 $\mathbf{R}^+$,$\mathbf{R}^-$ 的势为 c;

由$(0,1)$势为 c,作可逆变换 $t=\tan(\pi(x-\frac{1}{2}))$把$(0,1)$变成$(-\infty,+\infty)$,故实数集 $\mathbf{R}$ 的势为 c;

对任何 $\alpha,\beta\in\mathbf{R},\alpha<\beta$,作可逆变换 $t=\alpha(1-x)+\beta x$ 把$[0,1)$变成区间$[\alpha,\beta)$,再添上、去掉一点知,任何开、闭、半开闭区间的势为 c.

如同有限集的元素个数,两集之势亦可比较大小:设集 M,N 之势分别为 m,n,若集 N 的一真子集与集 M 对等,且集 M 的任何子集不与集 N 对等,则称 $m<n$,$n>m$. 显然上述 $a<c$. 可以证明,任何两集之势 m,n,在三式 $m<n,m=n,m>n$ 中必有且只有一式成立.

文献[2],[3]证明,任何非空集 S 的所有子集组成之集的势必大于 S 的势. 故没有最大的势. 不可列集之势未必是 c.

至今未见有集,其势 s 在 a 与 c 之间,即 $a<s<c$. 康托认为这样的集不存在. 此猜想称为“连续统(有限或无限区间)假设”. 多年未能证明. 20 世纪 60 年代证明了,在集论公理体系(颇为抽象)下,不可能证明连续统假设,即连续统假设与集论所有公理独立. 笔者对此大为不解,亦未找极为抽象且非本行的“集论”、“数学基础”专著解读弄清这个问题. 如果连续统假设不成立,难道就不可找出反例吗? 可以增加一些公理来证明连续统假设吗? 平行公理及欧氏几何完全适用于实际生活. 但确实不可能绝对准确地用实践来验证平行公理,故还有否定欧几里得平行公理的“非欧几

① 下文证,在无限集 S 中添上或除去有限个元素后其势不变.

何”,据说它在天文宏观测量方面有所应用. 但连续统假设究竟与平行公理不同吧? 是否还可以搞出另一个集论体系呢?

类似于正整数加法,下面讨论并集之势. 但结果有与正整数加法颇为不同之怪.

例1　无限集 S 与有限集的并集、差集的势与 S 的势相同,即在无限集添上、除去有限个元素,其势不变.(S 为有限集时显然结论不成立)

证　由本章第二段之论述知对差集情形结论成立. 在并集情形,不妨设 S 与有限集 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 不相交(无共同元素),否则在有限集内去掉这些共同元素,若余下为空集则结论更显然. 在 S 取可列集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots\}$. 令 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 分别对应于 S 中的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,每个(并集中的)a_k 对应于 S 中的 a_{k+n}. 其余元素对应于其本身,则集 $S\cup\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 与 S 的所有元素一一对应.

例2　有限个可列集之并集仍是可列集,势不变,与有限集不同.

证　设 k 个可列集

$$A_1=\{a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots\}$$
$$A_2=\{a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots\}$$
$$\vdots$$
$$A_k=\{a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn},\cdots\}$$

则它们的并集的所有元素可列成

$$\{a_{11},a_{21},\cdots,a_{k1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{k2},\cdots,$$
$$a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{kn},\cdots\}$$

再在其中有重复者只保留一个,且 A_1 的元素要保留,于是余下不只有限个元素,故为可列集.

例 3 任何无限集 S 与可列集 A 之并集、差集的势与 S 的势相同.

证 先考察 $S\cup A$. 易见在无限集 S 内可取可列子集 M. 不妨设集 S 与 A 不相交. 因集 M 与集 $M\cup A$ 对等,可令它们的所有元素一一对应. 再令集 $S\setminus M$ 的所有元素对应于其本身. 于是集 S 与集 $S\cup A$ 所有元素一一对应,故集 S 与集 $S\cup A$ 的势相同.

再考察 $S\setminus A$. 不妨设 $A\subset S$. 因 $S\setminus A$ 非空,可在其内取元素 b_1,$A\cup\{b_1\}$ 仍为可列集,$S\setminus(A\cup\{b_1\})$ 非空,可在此非空集内再取元素 b_2,继续类似取 $b_3,b_4,\cdots\in S\setminus A$,得可列集 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)\in S\setminus A$.

因集 $A\cup B$ 与集 B 对等,可令它们的元素一一对应. 再令 $S\setminus\{A\cup B\}$ 的元素对应于其本身,则得集 S 与集 $S\setminus A$ 的元素一一对应,故其势相同.

全体无理数的集为实数集 $\mathbf{R}$(势为 c)与有理数集 $\mathbf{Q}$(势为 a)之差集,故全体无理数的集的势为 c.

例 4 有限个势为 c 的集两两不相交,则它们的并集势为 c.

证 设两两不相交的集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 势为 c,可令它们分别与区间(视为点集)$[0,1),[1,2),\cdots,[n-1,n)$对等. 于是 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的并集与区间$[0,n)$对等,故势为 c.

例 5 可列个势为 c 的集 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$两两不相交,则它们的并集势为 c.

与上例同样可证.

上两例的命题中可去掉两两不相交条件,结论亦成立,但证明时要再用伯恩斯坦(Bernstein)定理,略.

下面讨论势的乘法,它与正整数乘法亦有颇为不

同之怪.

设集 S_1, S_2 的势分别为 s_1, s_2，定义 A 与 B 的积集为二元组集

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

则称 $A \times B$ 之势 s 为势 s_1 与 s_2 之积. 记为 $s = s_1 s_2$.

如果两集 A', B' 分别与集 A, B 对等，易见积集 $A' \times B'$ 与 $A \times B$ 对等，故 $s_1 \times s_2$ 只与 s_1, s_2 有关，与 A, B 无关. 定义是合理的.

易见积集 $S_1 \times S_2$ 与 $S_2 \times S_1$ 对等，故 $s_1 s_2 = s_2 s_1$，势的乘法适合交换律.

例如正方形 $[0,1] \times [0,1]$（以 x 轴的区间 $[0,1]$ 及 y 轴的区间 $[0,1]$ 为两邻边的正方形闭域）可视为线段 $[0,1]$ 与线段 $[0,1]$ 的积集.

两有限集 $A = \{1,2,3,4\}$ 与 $B = \{1,2\}$ 的积集

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

集 A, B 及积集 $A \times B$ 的势分别为 $4, 2, 8$. $4 \times 2 = 8$. 故两势之积可视为正整数乘法的推广.

对势 a, c 及有限集的势 n 有下列奇怪结论.

例 6　$na = an = a$.

证　因交换律成立，证 $na = a$ 即可. 设可列集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$，有限集 $N = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$.

把积集 $A \times N$ 的所有元素排成

$$\begin{array}{c}
b_1 a_1, b_1 a_2, \cdots, b_1 a_k, \cdots \\
b_2 a_1, b_2 a_2, \cdots, b_2 a_k, \cdots \\
\vdots \\
b_n a_1, b_n a_2, \cdots, b_n a_k, \cdots
\end{array}$$

与前面证有限个可列集之并集的势为 a 一样，同样可

证此积集为可列集,势为 a.

例 7 $ac = ca = c$.

证 $ac = c$. 设可列集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,集 C 势为 c. 对任一正整数 n,取区间 $[n, n+1)$(由前述势为 c)与集 $\{(a_n, y) \mid y \in C\}$(显然势为 c)对等. 于是积集

$$A \times C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(a_n, x) \mid x \in C\}$$

与区间并集

$$[1,2) \cup [2,3) \cup \cdots \cup [n, n+1) \cup \cdots = [1, +\infty)$$

对等,后者势亦为 c.

例 8 $nc = cn = c$(与前式同样可证).

与正整数一样,对任何势 s 定义 s 的 n 次幂(n 为正整数)

$$s^n = \underbrace{ss\cdots s}_{n个}$$

($s^2 = ss, s^3 = s^2 s, s^4 = s^3 s, s^n$ 亦可视为 n 个势为 c 的集 S 的积集 $S \times S \times \cdots \times S$ 之势.)

对上述 s 与 S,定义 s^a 为积集(以 S 的元素序列为元素)

$$S \times S \times \cdots \times S \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_1 \in S, x_2 \in S, \cdots, x_n \in S, \cdots\}$$

的势.

对势之幂亦有与正整数之幂不同之怪.

例 9 $a^2 = aa = a$.

证 不妨设可列集 $A = \mathbf{Z}^+$,则积集 $A \times A$ 所有元素可排成

$$(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (1,n), \cdots$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), \cdots, (2,n), \cdots$$

$$\vdots$$
$$(k,1),(k,2),(k,3),\cdots,(k,n),\cdots$$
$$\vdots$$

所有元素又可排成一列

$(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),\cdots,(1,n),(2,n-1),(3,n-2),\cdots,(n,1),\cdots$

(先排左上角元素,再排从右上到左下第一斜线(倾斜45°),再排第2斜线、第3斜线、…、第 n 斜线、…)故 $A\times A$ 仍为可列集,$a^2=aa=a$.

于是

$$a^3=a^2a=aa=a,a^4=a^3a=aa=a$$

继续同样证得(n 为正整数,实际即按归纳法)

$$a^n=a$$

设可列个可列集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相交(亦可去掉),易见其并集与 $A_1\times A_1$ 对等. 故从 $aa=a$ 知,可列个可列集之并集仍为可列集.

例10 $2^a=c$.

证 不妨取只含2个元素之集为$\{0,1\}$. 可列个集$\{0,1\}$之积集为

$$P=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\mid a_1=0,1;\\ a_2=0,1;\cdots;a_n=0,1;\cdots\}$$

它对等于所有2进制无限小数

$$(0.a_1a_2\cdots a_n\cdots)_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$$

(左边最后附标2表示2进制)的集. 在积集及无限小数集除去"从某位数字起以后全为1"者(使相等的

$(0.a_1a_2\cdots a_{k-1}0111\cdots)_2=(0.a_1a_2\cdots a_{k-1}1000\cdots)_2$[①] 只保留后者). 于是在无限小数集内无相等重复者,故组成区间$[0,1)$的所有实数集,势为 c. 设所除去的无限小数在积集 P 的相应元素组成集 M,则 $P\backslash M$ 对等于实数集$[0,1)$——不可列集. 于是不可列集 $P\backslash M$ 势为 c,添上(显然)可列集 M 得出原集 P 的势亦为 c. 于是 $2^a=c$.

例 11 $a^a=c$.

证 不妨取可列集为正整数集 $\mathbf{Z}^+$,则可列个 $\mathbf{Z}^+$ 的积集为所有正整数列

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)(a_1\in\mathbf{Z}^+,a_2\in\mathbf{Z}^+,\cdots,a_n\in\mathbf{Z}^+,\cdots) \tag{1.2}$$

组成之集(势为 a^a). 只要证此集之势为 c.

对任一正整数列(1.2),取 2 进制无限小数

$$(0.1\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第a_1位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第a_1+a_2位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第a_1+a_2+a_3位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第a_1+a_2+\cdots+a_n位}}{101}\cdots)_2$$

与其对应. 此无限小数不会从任一位数字起以后全为 1(因易见 $a_1+a_2+\cdots+a_n\to+\infty$).

反之对$[0,1)$内任一无限小数(从任一位数字起不得全为 1)

$$0.1\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第b_1位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第b_2位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第b_3位}}{101}\ \cdots\ \underset{\substack{\uparrow\\ 第b_n位\cdots\cdots}}{101}\ \cdots$$

令 $a_1=b_1,a_2=b_2-b_1$(即 $b_2=a_1+a_2$),$a_3=b_3-b_2$

---

① 因$\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+3}}+\cdots=\frac{1}{2^k}$,即$(0.\underbrace{00\cdots00}_{k个}111\cdots)_2=(0.\underbrace{00\cdots01}_{k个})_2$.

(即 $b_3=a_1+a_2+a_3$), …, $a_n=b_n-b_{n-1}$ (即 $b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$). 故反之可得唯一的数列(1.2)对应于这无限小数. 于是所有正整数列的集与[0,1)内所有实数的集对等. 后者势为 c,前者亦然.

例 12 $c^n=c$.

证 由上段证明,可取势为 c 的集为所有正整数列的集 Q. n 个集 Q 之积集 $\underbrace{Q\times Q\times\cdots\times Q}_{n个}$ 的所有元素可表为

$$((a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k},\cdots),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2k},\cdots),\cdots,(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots)) \qquad (1.3)$$

(内层括号表数列,其中各数均为正整数). 对积集的每一元素(1.2),令其对应于正整数列

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk},\cdots)$$

反之任一正整数列,可改按上式表示其各项附标,从而易见必为积集的唯一元素的对应正整数列. 于是积集 $\underbrace{Q\times Q\times\cdots\times Q}_{n个}$ 与所有正整数列的集 Q 对等,即 $c^n=c$.

于是闭区间[0,1]与正方形闭域[0,1]×[0,1],正方体闭域[0,1]×[0,1]×[0,1], n 维空间的正方体闭域 $\underbrace{[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{n个}$ 对等;全直线、全平面、全三维空间、全 n 维空间对等. 确怪!

例 13 $c^a=c$.

证 与上段取同样的集 Q,则可列个集 Q 的积集 $Q\times Q\times\cdots\times Q\times\cdots$ 的所有元素可表为

$$((a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k},\cdots),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2k},\cdots),\cdots,(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots),\cdots)$$

对积集中每一元素(1.3),令其对应于正整数列

$$(a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},\cdots,a_{1k},\\ a_{2(k-1)},a_{3(k-2)},\cdots,a_{k1},\cdots)$$

于是与上段类似可证 $c^a=c$.

于是闭区间[0,1]与(无限维)希尔伯特(D. Hilbert)空间的“砖形”$[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{3}]\times\cdots\times[0,\frac{1}{n}]\times\cdots$①对等. 全直线与全希尔伯特空间对等.

---

① 边长无限缩小,是为了其上的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$与原点的距离$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}<+\infty$.