代數學

卷上

教育部審定

中學校用

共和國教科書

代數學

卷上

商務印書館出版

教育部審定批詞

中學校共和國教科書

代數學

此書頗簡單明曉。准作爲中學校用教科書。

Republican Series
ALGEBRA
For Middle Schools
Approved by the Board of Education
Commercial Press, Ltd.

中華民國二年九月初版
中華民國十年六月二十四版

（共和國教科書 代數學 二冊）（中學校用）
（卷上軟布/紙面每冊定價大洋陸/伍角半）
（外埠酌加運費匯費）

編纂者 紹興駱師曾
校訂者 紹興壽孝天
發行者 商務印書館
印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館
總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館
分售處 北京天津保定奉天吉林龍江濟南東昌太原開封洛陽西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶達縣福州廣州潮州香港桂林梧州雲南貴陽張家口新嘉坡 商務印書分館

中華民國二年十月七日稟部註册十一月四日領到文字第一百十八號執照

編輯大意

一本書備中學校代數學教科之用。

一按中學校課程標準。代數之教科。始於第一學年。至第三學年而畢。每年與算術幾何。同時並授。是三年內代數所佔之時間。適得數學全科之半。本書之分量。卽依此標準以定之。庶教材與時間。適相應而便於誦習。

一本書分爲上下兩卷。上卷至二次方程而止。應用最廣。下卷自高次方程以上。理論稍深。惟中學程度。應以普通代數爲範圍。故闡發處無不力求簡易。其繁賾深奧之理論。應屬於高等代數者。仍不預爲侵越。

一代數學來自歐西。各種譯名。證以西文。可免歧誤。然若另編中西對照表。未免多費翻檢之時刻。今於名詞初見之處。卽用西文原名。附註於後。舉目可得。似於學者更爲便利。

一文字排列之位置。與編輯宏恉。本屬無涉。然適宜與否。於閱者之感覺。亦非毫無關係。試以一貫之算式。而分列於左右兩葉。以一氣之文字。而跨排於前後兩面。則披閱之時。必有感其不便者。本書仍照算術教科書之例。凡單數各面。篇幅終止之處。亦爲文字終止之處。無非爲閱者圖其便利而已。

中學校教科書

代數學上卷目次

第一篇　緒論……1-11

第一章　定義及符號……1－3

第二章　代數式　問題一　問題二……3－6

第三章　正數及負數　問題三……7－11

第二篇　整式……12-30

第一章　加法　問題四……12－14

第二章　減法　問題五……14－16

第三章　括號　問題六……16－17

第四章　乘法　問題七……18－24

第五章　除法　問題八……25－30

第三篇　一次方程式……31-54

第一章　一元一次方程式　問題九……31－35

第二章　一元一次方程式應用問題

問題十……35－41

第三章　聯立一次方程式　問題十一

問題十二……42－50

第四章　聯立一次方程式應用問題

問題十三……50－54

第四篇　因數……55-74
第一章　因數分解法　問題十四　問題十五
問題十六　問題十七……55-63
第二章　最高公因數　問題十八……64-70
第三章　最低公倍數　問題十九……71-74
第五篇　分數式……75-98
第一章　公數變化　問題二十……75-78
第二章　分數加減　問題二十一……79-82
第三章　分數乘除　問題二十二……82-85
第四章　分數雜定理　問題二十三……86-89
第五章　續一次方程式　問題二十四……90-98
第六篇　二次方程式……99-136
第一章　一元二次方程式　問題二十五
問題二十六　問題二十七……99-111
第二章　二次方程式雜論　問題二十八……111-114
第三章　高次方程式　問題二十九……115-118
第四章　聯立二次方程式　問題三十……118-129
第五章　二次方程式應用問題
問題三十一……130-136
上卷答數……1-8

中學校教科書
代數學上卷

第一篇　緒論

第一章　定義及符號

1. 代數學 *Algebra* 爲數學之一科。亦如算術。以研究數之性質及運算者也。惟算術僅用有定值之數字如 1, 2, 3 … 以表數。而代數學則兼用無定值之小羅馬字母 $a, b, c \cdots x, y, z$ 以表之。間亦有用大羅馬字母 $A, B, C \cdots X, Y, Z$ 及小希臘字母 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 者。但在同一演算之中。則同文字所代之值。仍始終同一。

例如算術題云。大小二數之和爲74。其差爲16。求二數。

依法解之。大數$=(74+16)\div 2=45$. 小數$=(74-16)\div 2=29$.

又有算術題云。大小二數之和爲36。其差爲6。求二數。

依法解之。大數$=(36+6)\div 2=21$. 小數$=(36-6)\div 2=15$.

而在代數題。則云 x 與 y 之和爲 a。其差爲 b。求二數。

依同理解之。$x=(a+b)\div 2$.　$y=(a-b)\div 2$.

此答數內若以74代其 a。以16代其 b。則得 $x=45$.　$y=29$.

若以36代其 a。以6代其 b。則又得 $x=21$.　$y=15$.

是 a, b 可代任何數。x, y 可得任何答。皆無定值也。惟若解 x 時。旣以74代 a。解 y 時。忽又以36代 a。此則不可耳。

2. 符號 *Sign* 代數學中表加減乘除演算之符號。用 $+, -, \times, \div$。與算術全然相同。而表二數關係之符號。則用**等號** *Sign of equality* $=$ 及**不等號** *Sign of inequality* $>$ $<$。如

$a=b$ 謂 a 等於 b。　$a \gtrless b$ 或 $a \neq b$ 謂 a 不等於 b。

$a>b$ 謂 a 大於 b。　$a \geq b$ 謂 a 大於或等於 b。

$a<b$ 謂 a 小於 b。　$a \leq b$ 謂 a 小於或等於 b。

〔注意〕 文字與文字或數字之間.其乘號可省.或用點以代之.惟數字與數字之間.則乘號決不可省.例如 $a \times b$ 可作爲 ab 或 $a \cdot b$.至若 3×4 則不能作爲 34.然亦可作爲 $3 \cdot 4$.但其點須置於正中.以免與小數點相混.又除號常如分數之式表之.如 $a \div b$ 常作 $\frac{a}{b}$.

3. 積 *Product*, **因數** *Factor*, **係數** *Coefficient* 二以上之數相乘所得之結果。曰此等數之**連乘積** *Continued product* 或單曰**積**。而各數曰其積之**因數**。將積之因數分爲二組。則此組與彼組互稱爲**係數**。而係數爲數字者。特稱曰**數係數** *Numerical coefficient.*

例如 $3abx$ 爲 $3 \times a \times b \times x$ 之積。其 $3, a, b, x$ 各爲此積之因數。3 與 abx 及 $3a$ 與 bx 及 $3ab$ 與 x 皆互爲係數。而 3 爲 abx 之數係數。

4. 乘冪 *Power* 同因數自乘幾次所得之積。曰此因數之**乘冪**。例如 aa, aaa 皆爲 a 之乘冪。而第一曰 a 之**二乘冪**或**平方** *Square*。可記爲 a^2；第二曰 a 之**三乘冪**或**立方** *Cube*。可記爲 a^3。餘可類推。此 a 之右肩所記之數字。卽以表所乘之次數者。曰**指數** *Exponent* 或 *Index*。

〔注意一〕文字之左旁無數係數及右肩無指數者.當視作有單位一爲其係數及指數.例如 a 當視作 $1a^1$.

〔注意二〕係數與指數切勿混視.如言 $3a$ 而設 $a=4$. 則 $3a=3\times4=12$. 若言 a^3 而設 $a=4$. 則 $a^3=4\times4\times4=64$. 二者絕不相同.

5. **乘根** *Root*　某數之二乘冪爲 a。則某數曰 a 之**二乘根**或**平方根** *Square root*。以 $\sqrt[2]{a}$ 或 $\sqrt{a}$ 表之。某數之三乘冪爲 a。則某數曰 a 之**三乘根**或**立方根** *Cube root*。以 $\sqrt[3]{a}$ 表之。餘可類推。此符號 $\sqrt{\ }$ 曰**根號** *Radix*。根號左肩所記之小數字曰**根指數** *Index of root*。

例如 3 之二乘冪爲 9。則 3 爲 9 之二乘根即 $\sqrt{9}$。又 2 之三乘冪爲 8。則 2 爲 8 之三乘根即 $\sqrt[3]{8}$。

根數不能精密求之者曰**不盡根** *Surd* 或**無理數** *Irrational number*。對於此而稱通常無根號之數曰**有理數** *Rational number*。

例如 $\sqrt{2}$ 無論求至何位皆不能適盡。即爲無理數。又如 x, a, 2 皆無根號。即爲有理數。

第二章　代數式

6. **代數式** *Algebraic expression*　或**單稱式** *Expression*。由數字,文字及符號集合而成者也。其式中因符號 + 或 − 而分離之部分皆曰**項** *Term*。

例如 $7xy+ab$, $3a+6b-4c$ 皆爲代數式。而 $7xy$ 及 ab 皆爲第一式之項, $3a$, $6b$, $4c$ 皆爲第二式之項。

7. 有理式 *Rational expression*, **無理式** *Irrational expression* 代數式之文字無一有根號者。曰**有理式**。反是曰**無理式**。

例如 $3ax+3y+5cz$ 爲有理式。$16a^2\sqrt[3]{xy}+15yz^3$ 爲無理式。

8. 整式 *Integral expression*, **分數式** *Fractional expression* 有理式中無文字以表除法之法數者。曰**整式**。反是則曰**分數式**。

例如 $3ac-7xy+9d$ 及 $\frac{a+b}{5}$ 皆爲整式。$\frac{a+cd-e}{b+3d}$ 爲分數式。

9. 獨項式 *Monomial expression*, **多項式** *Polynomial expression* 代數式僅含一項者曰**獨項式**。兼有多項者曰**多項式**。多項式從其項數而區別之。則曰**二項式** *Binomial expression*, **三項式** *Trinomial expression* 等等。

例如 $10a^3b^2c$, $\frac{3}{4}x^2y$ 皆爲獨項式。$3ab-c^2$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ 皆爲多項式。而 $3ab-c^2$ 爲二項式。$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ 爲三項式。

10. 等式 *Equality*, **不等式** *Inequality* 二式以等號 $=$ 聯之者曰**等式**。以不等號 $>$ 或 $<$ 聯之者曰**不等式**。

例如 $a+b=x+y$ 爲等式。$a+b>c+d$ 及 $a-d<c-b$ 爲不等式。

11. 括號 *Bracket* 有三種。如 (), {}, []。又有一種如 $\overline{\quad}$ 者曰**括線** *Vinculum*。凡括號內或括線下之式。當作一數觀

例如 $a-(b+c+d)$ 或 $a-\overline{b+c+d}$。謂將 b 加 c 再加 d 之和從 a 減去也。又如 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$。皆表 $2a$ 之平方根。至若 $\sqrt{}2a$。則謂 a 乘 $\sqrt{2}$。與 $\sqrt{(2a)}$ 異。又若 $\sqrt{}a+x$。則謂 $\sqrt{a}$ 加 x。與 $\sqrt{(a+x)}$ 異。

12. 用加減乘除之符號。指示代數式之運算。其次序亦如算術。先乘除而後加減。

例如$a+3bc-d\div e$。謂先以3乘b乘c而後行加法。次先以e除d而後行減法。故此式可作$a+(3bc)-(d\div e)$觀之。

13. 茲示用代數式表問題之例。

例　買麥m石。每石價4元米n石。每石價7元。其共價以式表之則如何。

4元$\times m+7$元$\times n=4m$元$+7n$元$=(4m+7n)$元。

問題一

1. a之平方加b之四倍。以c除之。其代數式如何。

2. 從x與y相乘積之五倍。減去a與b相加之立方。以代數式表之則如何。

3. a與b相乘積之三倍等於x。其式如何。

4. 從a之平方之六倍。減去c與d相加之立方。大於b加c加d。試以式表之。

5. 鉛筆m枝。其內有n枝每枝a文。其餘每枝b文。試以式表其共價。

6. 每斤a文之酒m斤。與b文之酒n斤混合。則成每斤幾文之酒。試以式表之。

14 代數式之文字。各依其所表之數計算之。其結果曰代數式之數值 *Numerical value*。或單曰值。

例 1. 設 $a=5, b=4, x=3, y=2$. 求 $\frac{3}{10}ab+7x^2-\frac{9}{4}ay^2+2b^3$ 之數值。

$$原式=\frac{3}{10}\times5\times4+7\times3^2-\frac{9}{4}\times5\times2^2+2\times4^3$$

$$=6+63-45+128=152.$$

例 2. 設 $p=9, r=6, k=4$. 求 $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{pr}{k^2}}+\sqrt{5p+3r+1}-\frac{2r^2}{9k}$ 之數值。

$$原式=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{54}{16}}+\sqrt{45+18+1}-\frac{72}{36}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+\sqrt{64}-2$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}+8-2=6\frac{1}{2}.$$

問　題　二

設 $a=2, b=3, c=1, d=0$. 求下各式之數值。

1. $3a+6c-4b+5d$.
2. $5a+3c-2b+6d$.
3. $ab+bc+ca-da$.
4. $2bc+3cd-4da+5ab$.
5. $abc+bcd+cda+dab$.
6. $a^2+b^2+c^2+d^3$.

設 $a=1, b=2, c=3, d=0$. 求下各式之數值。

7. $a^3+b^3+c^3+d^3$.
8. $3abc-b^2c-6a^3$.
9. $2c^2+2a^2+2b^2-4cb+6abcd$.
10. $125b^4c-9d^5+3abc^2d$.

設 $a=8, b=6, x=9, y=4$. 求下各式之數值。

11. $\sqrt[3]{bxy}-\frac{1}{8}b^3+\frac{8x^2}{by}$.
12. $\frac{5b^2y^3}{12a^2x}+\sqrt{\frac{ab^3}{3x}}-\sqrt[3]{\frac{x^4a}{b^2y^2}}$.

第三章　正數及負數

15. 正數及負數 *Positive number and Negative number*

算術中僅能從大數減小數。不能從小數減大數。而在代數學。則無論二數之大小如何。皆可以 $a-b$ 式表之。此式若 a 大於 b。固可得其數値。若 a 小於 b。則其所表者。爲另有一種意義之數値。玆示其例如下。

例. 某甲初年獲利500圓。次年損失270圓。則其資本之變化如何。又若初年損失500圓。次年獲利270圓。則如何。

以代數式表之。則

第一答記爲　500圓 $-$270圓 $=+$230圓。

第二答記爲　270圓 $-$500圓 $=-$230圓。

此第一式之$+$230圓。示資本增加230圓。第二式之$-$230圓示資本減少230圓。故 $+$230圓與 $-$230圓。雖同爲230圓。而一則示資本之增加卽利益。一則示資本之減少卽損失。二者有全相反對之意義也。

如上所附記 $+$ 或 $-$ 之符號。可以表示數量之正反對二種意義。由是推之。計算溫度。若以 $+$ 號表0度以上之度數。則可以 $-$ 號表0度以下之度數。計算年代。若以 $+$ 號表從今以後之年數。則可以 $-$ 號表從今以前之年數。故代數學之 $+$ $-$ 兩符號。除表加減外。又可用以表數之性質。而表數之性質時。其 $+$ 號曰**正號** *Positive sign*。$-$號曰**負號** *Negative sign*。附正號之數曰**正數**。附負號之數曰**負數**。

〔注意〕正數前之＋號.有時可略而不記.故凡一數之前無＋號或－號者.皆可作正數觀.又代數學中雖有多種符號.若單曰符號.則皆指正負號而言.至若云變其符號者.卽謂變正號爲負號及變負號爲正號也.

16. 絕對值 *Absolute value* 不論符號如何。但取其數値者。曰此數之**絕對値**或**純値**.

例如 $+5$ 與 -5.其絕對値同爲 5.

17. 數之大小 從一數減他數.其減數愈大者餘數愈小。今以正數負數示之。如

$$4-1>4-2>4-3>4-4>4-5>4-6>4-7.$$

卽 $$3>2>1>0>-1>-2>-3.$$

故正數皆大於0。其絕對値大者。其數愈大.負數皆小於0.其絕對値大者.其數愈小。

18. 正數及負數之和 正數 $+a$ 加正數 $+b$。其和爲正數。此易知者也。卽

$$+a+(+b)=a+b.$$

正數加負數.卽減去負數之絕對値之意。如

$$+5+(-3)=5-3=2,\qquad +5+(-7)=5-7=-2.$$

故正數 $+a$ 加負數 $-b$。其結果爲

$$+a+(-b)=a-b.$$

若 b 小於 a。其結果爲正數。大於 a。其結果爲負數。

負數 $-a$ 加正數 $+b$。等於正數 $+b$ 加負數 $-a$。卽

$$-a+(+b)=+b+(-a)=b-a.$$

若 a 小於 b.其結果爲正數.a 大於 b。其結果爲負數.

負數$-a$加負數$-b$。卽表示減去各絕對值之意。故

$$-a+(-b)=-a-b.$$

此結果等於以各負數之絕對值和爲絕對值之負數明矣。故

$$-a+(-b)=-a-b=-(a+b).$$

由以上所得之結果。而得下之法則。

<u>一數加他數。卽將各數之正負號。視作加減號而算之。</u>

19. 正數及負數之差 正數$+a$減正數$+b$。其差必爲$a-b$。此易知者也。卽

$$+a-(+b)=a-b.$$

正數$+a$減負數$-b$。等於加負數之絕對值。卽

$$+a-(-b)=a+b.$$

何則。因$a+b$加$-b$而得被減數$+a$

同理。負數$-a$減負數$-b$。等於加負數$-b$之絕對值。卽

$$-a-(-b)=-a+b=b-a.$$

同理。負數$-a$減正數$+b$。其結果爲

$$-a-(+b)=-a-b.$$

由以上所得之結果。而得下之法則。

<u>從一數減他數。卽變減數之正負號視作加減號而算之。</u>

20. 正數及負數之積 以正數$+3$乘正數$+5$。卽爲$+5$自加三次之義。故 $5\times3=5+5+5=15.$

由是 $$(+a)\times(+b)=+ab.$$

同理。以正數$+3$乘負數-5。則

$$(-5)\times 3=(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5=-15=-(5\times 3).$$

由是 $$(-a)\times(+b)=-ab.$$

以負數-3乘正數$+5$。卽爲$+5$逐次減三次之意。故

$$5\times -3=-5-5-5=-15=-(5\times 3).$$

由是 $$(+a)\times(-b)=-ab.$$

同理。以負數-3乘負數-5。則

$$(-5)\times(-3)=-(-5)-(-5)-(-5)=5+5+5=15=5\times 3.$$

由是 $$(-a)\times(-b)=+ab.$$

由以上所得之結果。而得下之法則。

同符號之二數相乘。其積爲正。異符號之二數相乘。其積爲負。

21. 正數及負數之商 以正數除正數。其商必爲正數。此易知者也。故

$$(+ab)\div(+b)=+a.$$

以正數$+b$除負數$-ab$。其商爲負數$-a$。卽

$$(-ab)\div(+b)=-a.$$

何則。因以$+b$乘$-a$而得被除數$-ab$.

同理。以負數$-b$除正數$+ab$。其商爲負數$-a$。卽

$$(+ab)\div(-b)=-a.$$

同理。以負數$-b$除負數$-ab$。其商爲正數$+a$. 卽

$$(-ab)\div(-b)=+a$$

由以上所得之結果。而得下之法則。

同符號之二數相除。其商爲正。異符號之二數相除。其商爲負。

問　題　三

1. 試將下之諸數。順其大小排列之。

$-35,\quad 7,\quad -23,\quad 76,\quad -100,\quad -300,\quad 500.$

2. -6 加 32 得何數。

3. 15 減 21 得何數。

4. 14 減 -3 得何數。

5. -8 減 -15 得何數。

6. -4 加 -19 得何數。

7. 設 $a=7, b=4, c=11$. 求下二式之結果。

(I) $a^2b+bc^2-abc.$　　(II) $35ac-79b^2-c^3.$

8. 以 -11 乘 7 得何數.

9. 以 -17 乘 -9 得何數。

10. 求 -8 與 $+8$ 之積。

11. 以 -2 除 16 得何數。

12. 以 5 除 -100 得何數。

13. 設 $a=-2, b=4, c=-1, x=4, y=-5$. 求下三式之值。

(I) $5c^2y.$　　(II) $bxy\div a.$　　(III) $4bx+6cy.$

14. 設 $a=-4, b=2, c=5$. 求下二式之值。

(I) $a+(-b)+(-c).$　　(II) $-a-(-b)-(-c)-4.$