STML
大学生数学图书馆
STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY
3

拓扑学导论

□ V. A. Vassiliev 著
□ 盛立人 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

STML 大学生数学 STUDENT MATHEM

拓扑学导论

□ V. A. Vassiliev 著
□ 盛立人 译

TUOPUXUE DAOLUN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学导论 /（俄罗斯）瓦西里耶夫著；盛立人译 .
-- 北京 : 高等教育出版社，2013. 8
ISBN 978-7-04-037917-4

Ⅰ. ①拓… Ⅱ. ①瓦… ②盛… Ⅲ. ①拓扑 - 研究
Ⅳ. ① O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 160266 号

策划编辑 李 鹏 责任编辑 李 鹏 封面设计 赵 阳 版式设计 余 杨
责任校对 孟 玲 责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	889mm×1194mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	5	版　　次	2013 年 8 月第 1 版
字　　数	140 千字	印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	35.00 元

物 料 号 37917-00

《大学生数学图书馆》丛书序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学或邀请国外学者到中国访问的学者每年都有增长，这对中国的科学现代化大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了. 很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益. 高等教育出版社和美国国际出版社在征求海内外众多专家学者的意见的基础上，组织了《大学生数学图书馆》丛书，这套丛书选取海内外知名数学家编写的数学专题读物，每本书内容精炼，涵盖了相关主题的所有重要内容.

我们希望这套翻译书能够使我们的大学生从更多的角度来看数学，丰富他们的知识. 本丛书得到了作者本人及海外出版公司的诸多帮助，我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
2013 年 6 月

中译本序*

自本书第一版出版到现在已经 15 年了. 从那以后我曾多次参阅立足于本书的讲义教材, 并收集了一大批本课题教学中难以解释与难以理解的材料. 在本书的这一版中我对所有这些关键点从教学的角度作了更多扩充, 有时候这些扩充还特别详细.

中国的青年科学工作者属于当代数学最富有希望的一代. 当追求享乐和一夜暴富式成功的思想俘获了越来越多有才华的西方青年时, 许多科学家相信, 真正的高水平数学的延续与繁荣要依赖亚洲的、首先是中国未来的数学家. 对于那些在这条困难而愉快道路上刚刚起步的人, 如果我的书能帮得上忙, 那将善莫大焉.

V. A. Vassiliev

2012 年 6 月 2 日

*译者按: 本书中译本的翻译完成后, 译者获悉本书将有修订本出版, 但与作者联系后得知修订本的出版近期难以实现. 感谢作者寄来本书详细的修改稿, 译者根据修改稿进行了补译, 因此中译本与原著略有不同, 敬请读者注意.

前言

本书源自作者为莫斯科独立大学一二年级大学生开设课程的讲义.

拓扑学是一门非常美丽的科学. 它在几何与代数之间架起了一座桥梁. 它的理念与设想在几乎所有近代数学中扮演着关键角色: 诸如微分方程、力学、复分析、代数几何、泛函分析、数学量子物理、表示论乃至 —— 以一种令人吃惊的方式介入的 —— 数论、组合论及复杂性理论.

近年来从拓扑学涌现出来的大部分数学新理念来自几何图像, 并以更加代数化的方式体现出来. 由于这种原因, 拓扑学知识对任何数学研究的必要性的呼声极高. 可惜, 在俄罗斯以及其他一些国家, 即使是今天, 拓扑学仍不包含在多数大学数学系的基本课程里. 别的学科中一些严格的老师不得不在他们的课程中提供拓扑学的只言片语, 而大学生们在研究诸如分析学中的 Stokes 公式、复分析中的辐角原理与 Riemann 曲面、微分方程中的压缩映射原理与向量场奇点指标、组合数学中的 Euler 示性数、最优控制论中的区域定理、数学经济中的不动点定理等理论时, 还都不知道他们是在讨论同一个理论. 他们只能独自学习基本拓扑知识. (当然也有例外, 我的同辈莫斯科数学家们无疑受到极大的影响, 那是缘于我们的数

学教育得益于国立莫斯科大学力学数学系由 D.B. Fuchs 于 1976—1977 年间所开设的特殊拓扑学 (非必修) 课程.)

几年以后 (晚于 20 世纪 80 年代, 早于 90 年代), 我在专门数学学院里为本科生与高等学院的大学生开设了引论性的拓扑学课. 我应当感谢莫斯科独立大学的管理部门给我这个机会, 将此课程在 1996 年的第二和第三学期列为独立大学的基本课程的一部分.

我更要感谢收录我的讲义并形成本书初稿的 V. V. Prasolov, 以及主动建议出版本书的 Phasis 出版社的负责人 V. B. Filippov.

本书保留了原始讲义的打印格式. 书中很少包含详细证明; 我尽可能多给一些例子, 并指出哪些内容在拓扑学中经常出现, 但通常并不去解释为什么会出现. 作为约定, 只有对那些本质上有意义以及有重要推广作用的材料才介绍它们的证明 (或证明概要).

最后, 下面是我建议的一批参考资料.

[1] J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965; Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[2] A. H. Wallace, Differential Topology, W. A. Benjamin, New York, 1968.

[3] V. V. Prasolov, Intuitive Topology, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[4] C. Kosniowski, A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, 1980.

[5] A. T. Fomenko and D. B. Fuchs, A Course in Homotopic Topology, Nauka, Moscow, 1989; 初版英译本, A. T. Fomenko, D. B. Fuchs, and V. L. Gutenmakher, Homotopic Topology, Akademiai Kiado, Budapest, 1986.

[6] V. A. Rokhlin and D. B. Fuchs, Beginner's Course in Topology. Geometric Chapters, Nauka, Moscow, 1977; 英译本, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.

[7] M. M. Postnikov, Lectures in Algebraic Topology, Homotopy Theory of Cell Spaces, Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).

[8] J. R. Munkres, Elementary Differential Topology, Ann. of Math. Studies, no. 54, Princeton University Press, 1966.

[9] J. W. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963.

[10] J. W. Milnor, Lectures on the h-Cobordism Theorem, Princeton University Press, 1965.

[11] J. W. Milnor, Characteristic Classes, Notes by J. Stasheff, Princeton University, 1957.

[12] S. P. Novikov, Topology-1, Contemporary Problems of Mathematics, Fundamental Directions, Vol. 12, VINITI, Moscow, 1986; 英译本, Encyclopedia Math. Sci., Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[1]–[4] 提供了拓扑学的几何直观基础, 宜于推荐给初学入门者.

[5] 的第 1, 2 章包含了诸如同伦群、胞腔空间的同伦理论和基本的 (上) 同调理论等材料. [8] 提供了光滑流形的一个引论, 而有关 Morse 理论的一个漂亮的解释包含在 [9] 和 [10] 中. [6] 对初学者来说不易读懂, 但我还是小心地推荐给读者; 因为它可以当作阅读本书前半部的详尽的手册或词典, 而在不多的情况下 [7] 能有助于补充 [6] 的不足. [11] 可能是目前最好的代数拓扑学教科书之一, 我希望读者能对之手不释卷. 最后, [12] 是一份有关拓扑学近代面貌的出色而广博的综述.

郑重声明

目录

第一章 拓扑空间及其运算

每一个宣讲拓扑学的人一开始都会言不由衷地说, 拓扑学乃是研究几何对象的与距离、曲率以及其他度量无关的性质, 即研究几何对象在连续形变下保持不变的性质. 但我们宁可在本章末解释这番话的意义.

我们在前言中曾许诺过的有关拓扑学漂亮的几何构造与思想也将稍后给以解释, 我们从一些定义开始.

拓扑学研究拓扑空间与它们的连续映射.

1.1 拓扑空间与同胚

定义 一个拓扑空间 X 是一个具有拓扑结构 τ (称为拓扑) 的集合. 而一个拓扑结构 τ 是 X 的某子集族 $\tau \subset 2^X$, 其元称为开集. 开集族将满足下列性质:

(1) 任意族开子集的并为一开子集;

(2) 开集有限族的交为一开集;

(3) 空集 $\varnothing$ 与全集 X 为开集.

下面是一些拓扑空间的例子.

例 $\tau = 2^X$, 即将 X 中任一子集视为开集. 这等价于说每一点 $x \in X$ 为一开子集. 此拓扑称为*离散拓扑*.

有时候用拓扑基的方法引进拓扑 τ 是方便的. 一个拓扑 $\tau = \{V_\alpha\}$ 的基是一个子集 $\{W_\lambda\} \subset \tau$, 使得每一开集可以表示成 W_λ 的 (可能是无限的) 集族的并.

我们记得一个*度量空间*是一个集合 M, 其上允许定义一个满足下面性质的实值函数 $\rho : M \times M \to \mathbb{R}_+$:

(1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

例 (度量空间的拓扑) 对任意的 $x \in M$ 以及 $\varepsilon > 0$, 我们取所有开球

$$V_{\varepsilon,x} = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

的集合作为一个度量空间的拓扑基.

空间 $\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}^n$ 是度量空间. 这些空间中的标准拓扑便是相应度量空间的拓扑.

在空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑中还可以选择另一个基. 这个基由半径为有理数、中心具有有理坐标的球组成. 这两个基确定了相同的拓扑, 但相比于前一个, 后者为一可数基.

练习 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中由棱平行于坐标轴的平行多面体组成的基. 此拓扑是否定义另一个不同的拓扑?

例 ($\mathbb{R}^1$ 上一个另类拓扑) 对 $\mathbb{R}^1$ 中的开集, 我们取开集为通常意义下的开集, 但具有周期为 1 的周期性 (即对每一开集 U 有 $t \in U \Leftrightarrow t + 1 \in U$).

定义 一个子集 $A \subset X$ 称为闭集, 若其补集 $X \backslash A$ 为开集. 一个子集 $A \subset X$ 的闭包 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

定义 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 $f : X \to Y$ 称为对已给拓扑是*连续的*, 若 Y 中每一开集的原像在 X 中为开集.

问题 试证明, 对于具有通常拓扑的空间 $X = Y = \mathbb{R}^1$, 此连续性定义与分析学中的 (ε, δ) 定义等价.

具有离散拓扑的空间 X 的任一映射 $f: X \to Y$ 均为连续.

定义 拓扑空间 X 的一个无限点列 $x_1, x_2, \cdots$ 收敛于点 $x \in X$, 若对含有 x 的任意开子集 $U \subset X$, 有数 n 使此列中所有满足 $i \geqslant n$ 的点 x_i 均属于 U.

诱导拓扑 令 Y 为一拓扑空间, 而 $X \subset Y$ 为一子集. 可以在 X 中引进一个拓扑, 办法是将 X 与 Y 中开子集的交集视为 X 中的开子集. 此拓扑称为诱导拓扑.

在更一般的框架下, 诱导拓扑的定义如下. 令 Y 为一拓扑空间, $f: X \to Y$ 为一映射. X 中的诱导拓扑由 Y 中开集的所有原像组成. (从而此映射对于诱导拓扑为连续.) 对于一个子集 $X \subset Y$ 的包含映射 f, 我们重又得到上文所说的诱导拓扑.

有关图形的注 当我们画出一张图, 例如平面上的曲线或空间中的曲面, 则意味着这些曲线或曲面上的拓扑由背景空间 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中通常拓扑所诱导.

定义 一个映射 $f: X \to Y$ 称为同胚, 若此映射为连续且为一对一, 并且其逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 亦为连续. 如果同胚 $X \to Y$ 存在, 则空间 X 与 Y 称为同胚. 此时可写成 $X \approx Y$.

拓扑学研究拓扑空间以及连续映射, 乃至同胚映射.

例 正方形的边界与圆的边界同胚 (见图 1, 此时同胚便是让点 A 对应于点 B).

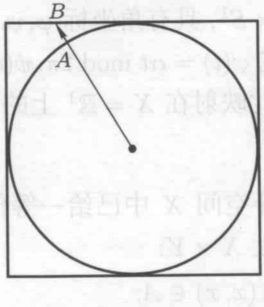

图 1

练习 a) 证明线段 [0,1] 与区间 (0,1) 在两者均具有离散拓扑的情形下同胚.

b) 证明线段与区间在两者均具有通常拓扑情形下不同胚.

c) 图 2 中的两个图形是否同胚?

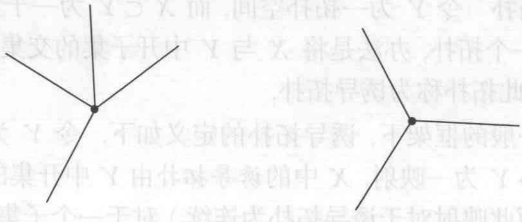

图 2

Hausdorff 性质 一个拓扑空间称为 Hausdorff 空间, 若两个不同的点 $x, y \in X$ 具有不相交的邻域 (所谓一个点 x 的邻域意即任一含有 x 的开集).

1.2 拓扑空间上的拓扑运算

积空间 $X \times Y$ 令 X 与 Y 为两个拓扑空间. 那么我们可以赋予笛卡儿积 $X \times Y$ (即点偶 (x, y) 的集, 其中 $x \in X, y \in Y$) 以通常的积拓扑, 办法是取 X 与 Y 中开集的笛卡儿积为拓扑基的元.

问题 令 $X = \mathbb{R}^1$ 具有坐标 t (暂不假定 $\mathbb{R}^1$ 上有拓扑), 再令 Y 为一环面 $T^2 = S^1 \times S^1$, 具有角坐标 φ, ψ. 可以把环面设想成面包圈的表面. 取表达式 $\varphi(t) = \alpha t \bmod 2\pi, \psi(t) = \beta t \bmod 2\pi$ 给出的映射 $X \to Y$. 试描述此映射在 $X = \mathbb{R}^1$ 上的诱导拓扑. 再问此拓扑如何依赖于数 α 与 β?

商拓扑 设在拓扑空间 X 中已给一等价关系 $\sim$, 即给出一个由下法选择的子集 $A \subset X \times Y$:

(1) 对所有 $x \in X, (x, x) \in A$;

(2) $(x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A$;

(3) $(x, y), (x, z) \in A \Rightarrow (y, z) \in A$.