全国部分重点院校

研究生试题解答

（数学部分）

2

哈尔滨船舶工程学院

内部交流
供参考

全国部分重点院校

研究生试题解答

（数学部分）

2

哈尔滨船舶工程学院

前　言

本书第二册的内容包括部分一九七九年度理科院校和一九八〇年度工科院校的研究生入学数学试题及解答。

参加本册书解题工作的有刘泉善、刘云清、周振荣、鞠正卫、唐向浦、王秀云、施久玉、张国庆、曹希真、凌明生等同志。最后由刘泉善、刘云清、周振荣、鞠正卫、唐向浦五位同志组织编审和校核。插图由李文林同志绘制。

本书在编写过程中，还得到有关单位的帮助和支持，在此一并表示诚恳的谢意。

限于水平，又因编印时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

一九八一年四月

目　　录

北 京 大 学（一）

数学分析专业用

一、证明：当 $x>0$时，$e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$.

二、设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 满足拉普拉斯方程，

$\Delta u=0$，$\Delta v=0$，其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，令 $|F|=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$，

证明：当$P\geqslant 2$时，在 $|F|\neq 0$的点，有

$$\Delta(|F|^p)\geqslant 0$$

三、一底半径为 a，高为 h 的无盖园柱容器，倾斜地支放在桌面上，其轴线与桌面成45°，试就 a、h 的不同情况，求容器的最大贮水量。

四、对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$，证明存在一个数$r(-\infty\leqslant r\leqslant+\infty)$，使当$x<r$时，级数发散，当$x>r$时，级数收敛。

五、设x_n是(0,1)内的一个序列，$0<x_n<1$，且$x_i\neq x_j$(当$i\neq j$)，试讨论函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在(0,1)中的连续性，其中

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ 1 & x<0\end{cases}$$

六、设对每一个 n，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。又对$[a,b]$中每

个 x，序列 $f_n(x)$ 有界，证明：在$[a,b]$中存在一个小区间，使 $f_n(x)$在其上一致有界。

解　　答

一、令　$f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)\quad(0\leqslant x<+\infty)$

则　$f(0)=0$

$f'(x)=e^x-1-\ln(1+x)$

$f'(0)=0$

又　$f''(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}>0$

所以　$f'(x)>0\qquad(0<x<+\infty)$

从而　$f(x)>0\qquad(x>0)$

即　$e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$

二、
$$\Delta(|F|^p)=\frac{\partial^2(|F|^p)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(|F|^p)}{\partial y^2}$$

今
$$\frac{\partial(|F|^p)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}}\right]$$

$$=p(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2(|F|^p)}{\partial x^2}=2p\left(\frac{p}{2}-1\right)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+p(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\quad(1)$$

同样可得

$$\frac{\partial^2(|F|^p)}{\partial y^2}=2p\left(\frac{p}{2}-1\right)^{\frac{p}{2}-2}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+p(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \quad (2)$$

(1),(2) 两式相加，得

$$\Delta(|F|^p)=2p\left(\frac{p}{2}-1\right)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}$$

$$\times\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$+p(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\geqslant 0 \qquad (p\geqslant 2 \qquad |F|\neq 0)$$

三、1. $h>2a$

记园柱$ABCD$的体积为V_1，园柱$CDEF$的体积为V_2，则

$$V_1=\pi a^2(h-2a)$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a=2\pi a^3$$

容器的最大贮水量$=V_1+\frac{1}{2}V_2=\pi a^2(h-a)$

2. $h=2a$

$$V_1=0 \qquad V_2=2\pi a^3$$

容器的最大贮水量$=\pi a^3=\pi a^2(h-a)$

3. $h<2a$

选择坐标系如图30.

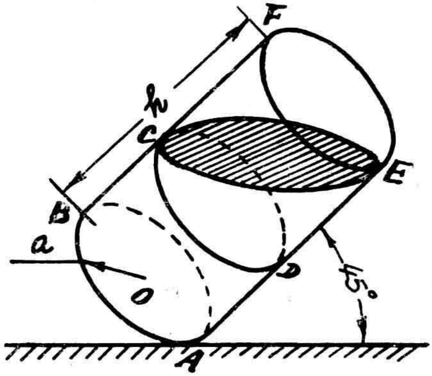

图 29

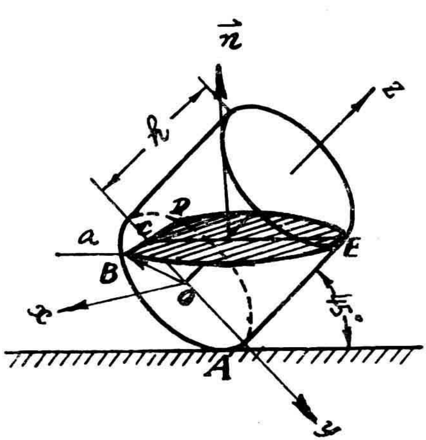

图 30

显然，平面BDE的法线矢量

$$\vec{n}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

点E的坐标为$(0,a,h)$，因此平面BDE的方程为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(y-a)+\frac{\sqrt{2}}{2}(z-h)=0$$

即 $$z=y-a+h$$

又点C的坐标为$(0,a-h,0)$，于是，容器的最大贮水量Q计算如下：

$$Q=\int_{a-h}^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}(y-a+h)dx$$

$$=\int_{a-h}^{a}[yx-(a-h)x]\Big|_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy$$

$$=2\int_{a-h}^{a}\left(y\sqrt{a^2-y^2}-(a-h)\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-2(a-h)$$

$$\times\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big]_{a-h}^{a}$$

$$=\frac{2}{3}h(2a-h)\sqrt{h(2a-h)}+(a-h)^2\sqrt{h(2a-h)}$$

$$-\frac{\pi}{2}a^2(a-h)+a^2(a-h)\arcsin\frac{a-h}{a}$$

$$=\left(a^2-\frac{2}{3}ah+\frac{1}{3}h^2\right)\sqrt{h(2a-h)}$$

$$-a^2(a-h)\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a-h}{a}\right)$$

四、这是迪里赫利级数，先证下面的结论：

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在某一值 $x=\overline{x}$ 时收敛，则它对于任何 $x>\overline{x}$ 都收敛。

事实上，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\overline{x}}}\cdot\frac{1}{n^{x-\overline{x}}}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\overline{x}}}$ 收敛，而当 $x>\overline{x}$ 时，序列 $\left\{\frac{1}{n^{x-\overline{x}}}\right\}$ 是正的单调下降序列，因此，由阿贝尔判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛。

1） 设 $\overline{x}$ 是有限数，由前面的证明可知，当 $x>\overline{x}$ 时，从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\overline{x}}}$ 收敛，推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛。

记 $r=\inf\{\overline{x}\}$，现证：当 $x>r$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛，当 $x<r$ 时，级数发散。

事实上，设 $x>r$，记 $x=r+\varepsilon$，由下确界定义知，一定存在某一 $\overline{x}$，使 $\overline{x}<r+\varepsilon=x$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\overline{x}}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$

收敛。

设 $x<r$，则一定存在$\overline{x}$，使$x<\overline{x}$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$收敛，则必有$x\geqslant r$，得出矛盾，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$发散。

2） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$处处收敛，则$r=-\infty$。

3） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$处处发散，则$r=+\infty$。

五、对于（0.1)中任一点x，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<+\infty \tag{1}$$

因此，函数$f(x)$在(0.1)内有定义，为考察$f(x)$的连续性，分两种情况：

1） $x_0\overline{\in}\{x_n\}$，考察函数级数的一般项$u_n(x)$，有

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & \text{当}\quad x>x_n\\ 0 & \text{当}\quad x=x_n\\ -\dfrac{1}{2^n} & \text{当}\quad x<x_n\end{cases}$$

当$x_0\overline{\in}\{x_n\}$时，对任何n，$u_n(x)$在x_0处连续，又由（1）知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$函数级数在(0.1)上一致收敛，所以$f(x)$在$x_0$处连续

2） 对于$\{x_n\}$中任一点x_i，

$$f(x)=\sum_{n\neq i}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}+\frac{\operatorname{sgn}(x-x_i)}{2^i}$$

前项在x_i处连续，后项在x_i处间断，故$f(x)$在x_i处间断。

六、记 $R=[a、b]$，考察R中子集$B_{n\cdot k}$，其中

$$B_{n\cdot k}=\{x\mid |f_n(x)|\leqslant K,\ x\in R,\ K\text{整数}\}$$

由于 $f_n(x)$ 在R上连续，所以对固定的K，$B_{n\cdot k}$ 是闭集 $(n=1,2,\cdots)$，又令

$$B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{n\cdot K}$$

则 B_K 是闭集，$(K=1,2,\cdots)$，由于对各个固定的 $x\in R$，$\{f_n(x)\}$有界，因此，x一定属于某一个B_K之中，这样必有

$$R=\bigcup_{K=1}^{\infty}B_K$$

但是R不是第一类型的集，所以，R不能表示成可列个疏朗集之并集，必有这样的K_0，使得B_{K_0}在某个区间H $(H\subset R)$内稠密，又B_{K_0}是闭集，$\overline{B}_{K_0}\supseteq H$，即$B_{K_0}=H$，这样$f_n(x)$在$B_{K_0}$上一致有界。

事实上，对任何$x\in B_{K_0}$，有

$$|f_n(x)|\leqslant K_0\qquad n=1,2,\cdots$$

命题证毕。

注：本题亦可用数学分析中的方法证明，今表述如下。

引进上确界函数$M(x)$，表为

$$M(x)=\sup_{1\leqslant n<\infty}\{|f_n(x)|\},\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

由假设条件，在 $[a、b]$上，$0\leqslant M(x)<\infty$，不难知道，$M(x)$在$[a、b]$的某一子区间上有界与$\{f_n(x)\}$在该子区间上一致有界是等价的。

用反证法来证明，即假设$M(x)$在$[a、b]$的任一子区间中都无界。此时有下面的结论：对于任意给定的正数N和$[a、b]$的任一子区间$[\alpha、\beta]$，总存在$[\alpha、\beta]$的子区间$[r、\delta]$，使得$M(x)$在$[r、\delta]$上恒不小于N，即

$$M(x) \geqslant N \qquad (r \leqslant x \leqslant \delta)$$

事实上，若不然，则$[\alpha、\beta]$的任一子区间中总有使$M(x) < N$之点x，从而对于$[\alpha、\beta]$中任意一点$\overline{x}$，总存在收敛于$\overline{x}$之点列$\{x_K\}$（$\alpha \leqslant x_K \leqslant \beta$，$K=1,2,\cdots$）使

$$M(x_K) < N \qquad (K=1.3\cdots)$$

于是

$$|f_n(x_K)| < N \qquad (n, K=1,2,\cdots)$$

由f_n的连续性可知

$$|f_n(\overline{x})| \leqslant N \qquad (n=1,2,\cdots)$$

所以$[\alpha、\beta]$中任意一点$\overline{x}$处恒有$M(\overline{x}) \leqslant N$，这样便得到了矛盾。

应用上述结论和区间套原理，便不难得出证明。对于$N=1$，$[a、b]$中有子区间$[a_1、b_1]$，使

$$M(x) \geqslant 1 \qquad (a_1 \leqslant x \leqslant b_1)$$

对于$N=2$，$[a_1、b_1]$中有子区间$[a_2、b_2]$，使

$$M(x) \geqslant 2 \qquad (a_2 \leqslant x \leqslant b_2)$$

对于$N=3$，$[a_2、b_2]$中有子区间$[a_3、b_3]$，使

$$M(x) \geqslant 3 \qquad (a_3 \leqslant x \leqslant b_3)$$

为此继续下去。得到一列递减的闭区间$[a_n、b_n]$，$[n=1,2\cdots]$使得

$$M(x) \geqslant n \qquad (a_n \leqslant x \leqslant b_n)$$

由区间套原理，至少存在一点$\overline{x}$在一切$[a_n、b_n]$中，于是

$$M(\overline{x}) \geqslant n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

这与$M(\overline{x})<\infty$矛盾，问题证明完毕。

北 京 大 学（二）

（固体物理、加速器物理、激光物理、实验核物理、电子物理、波谱及量子电子学、核物理专业用）

一、计算积分

$$\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt, \qquad (m, n\text{为正整数})。$$

二、（1）计算下列定积分：

（i）$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$，　　（ii）$\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$。

（2）求曲面 $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ 所围成的体积。

三、判别级数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$$

的敛散性，是绝对收敛还是条件收敛？并求级数的和。

四、设A、B均为$n\times n$矩阵，且$\det A\neq 0$，$\det B\neq 0$，试问下列结论哪些正确，哪些不正确。

（1）若　$AB=0$，则$A=0$或$B=0$.

（2）　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

（3）　$(AB)^*=A^*B^*$.

（4）　$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

（5）　$(\widetilde{AB})=\widetilde{A}\,\widetilde{B}$.

（6）　$(AB)^+=A^+B^+$.

(7) $\det(kA)=k\det A.$

(8) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B.$

(9) AB和BA的特征值完全相同.

(10) AB和BA的特征矢量完全相同。

其中，$\det A=A$ 的行列式的值，$A^*=A$ 的复数共轭，$A^{-1}=A$ 的逆，$\widetilde{A}=A$的转置，$A^+=A$的厄米特共轭。

五、用高斯公式（或任何其它方法）

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV=\iint_S \vec{n}\cdot\vec{A}\,ds,$$

证明下列公式

$$\iiint_V \nabla\times\vec{A}\,dV=\iint_S \vec{n}\times\vec{A}\,ds,$$

其中 s 是体积V的包面，$\vec{n}$为 s 上外法线方向的单位矢量。

六、求下列弦振动方程的解$u(x,t)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Ax \qquad (0<x<l,\ t>0)$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ u(x,0)=0$$

（两端固定的弦，初始时处于平衡位置，速度为零）

解　　答

一、这是第一型欧拉积分，

$$\beta(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$

$$=\frac{1}{m}t^m(1-t)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-2}dt$$

$$=\frac{n-1}{m}\int_0^1[t^{m-1}-t^{m-1}(1-t)](1-t)^{n-2}dt$$

$$=\frac{n-1}{m}\beta(m,n-1)-\frac{n-1}{m}\beta(m,n),$$

于是

$$\beta(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\beta(m,n-1)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}\beta(m,1)$$

但

$$\beta(m,1)=\int_0^1 t^{m-1}dt=\frac{1}{m},$$

所以

$$\beta(m,n)=\frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(m+n-1)!}$$

二、(1) (i)令$x=ut\quad(u>0)$，则

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt$$

$$J^2=J\int_0^\infty e^{-u^2}\ du=\int_0^\infty ue^{-u^2}du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt$$

$$=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

故

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$