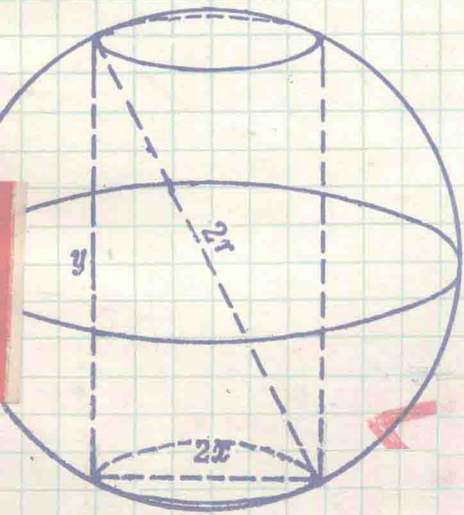
列方程解应用题

周正中　吕学礼　编



人民教育出版社

列方程解应用题

周正中　吕学礼　编

人民教育出版社

内容提要

本书阐述了列方程解应用题的一般步骤与思考方法，在此基础上，对几种常见的特殊类型的应用题作了比较详细的说明，并对初中各年级中有关列方程解应用题的课题作了教学研究.

本书以列方程解应用题的基本方法为主，指出关键问题在于找出等量关系列出方程。本书取材内容接近于通用教材，举例比较丰富.

本书可供中学数学教师特别是初中数学教师以及小学高年级数学教师参考，也可供初高中学生及师范院校学生阅读.

列方程解应用题

周正中　吕学礼　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 3.5 字数 72,000

1987 年 3 月第 1 版　1988 年 2 月第 1 次印刷

印数　1—25,400

ISBN 7-107-10028-9/G·92

7012·01209　定价0.51元

编者的话

列方程解应用题是中学数学课程中比较有用、比较重要的一个课题，但也是中学数学教学中的一个难点.

本书系统阐明了布列方程的基本知识，包括列方程解应用题的一般步骤与思考方法. 指出列方程解应用题的关键问题是找出等量关系列出方程.

在此基础上，本书又对几种常见的特殊类型的应用题，如行程问题、浓度问题等作了比较详细的研究，分别说明了各类中的特殊数量关系及各类的解法.

本书还对初中各年级中有关列方程解应用题的课题作了教学研究，以通用教材为例，说明了教材的前后联系及教法中的一些注意事项. 特别是对开头部分说明得比较详细.

希望能对读者掌握列方程解应用题的基本方法以及了解列方程解应用题的教材教法问题有所帮助. 但因限于编者水平，书中疏漏、错误在所难免，敬请读者批评指正.

编写过程中，承周嘉章同志协助，在资料的搜集和整理方面，做了不少工作，特在此致谢.

本书可供中学数学教师特别是初中数学教师以及小学高年级数学教师参考，也可供初高中学生及师范院校学生阅读。

编　者

1986年8月

目　录

列方程解应用题

§1. 列方程解应用题的步骤

列方程解应用题，首先要充分理解题意. 在此基础上，设法把实际问题中的普通语言翻译成数学语言：用字母 x，y 等来代替实际问题中的未知数；再用运算符号将未知数与已知数联系起来，建立所需要的代数式；接着根据问题中的等量关系，将相应的代数式用等号连结起来，这样就列出了方程. 然后就是解方程，选取合乎题意的方程的根，便得所求的解答. 但是要熟练地掌握布列方程去解实际问题，并不是一件轻而易举的事，为此我们先来详细地说明有关列方程解应用题的步骤.

一、理解题意（审题）

1. 仔细阅读题目　先要仔细阅读题目，弄清题意，明确题目的要求.

2. 分析题目 弄清下列各点：

（1）给出的已知数有哪些；

（2）要求的未知数有哪些；

（3）涉及到的其他未知数有哪些；

（4）有关的各已知数和未知数之间的关系有哪些（包括

题目里没有指出的一些数量之间的关系，比如，每天工作量×工作天数=总工作量）.

二、未知数的选择（选元）

根据第一步的分析，从各个未知数里选出一个未知数（或多个），这个未知数必须和已知数、其他未知数的关系比较多，而且用它来表示其他未知数和布列方程比较方便，把它作为“元”，一般用字母 x（多个用 x, y 等）来表示. 下面我们把确定为“元”的未知数称为未知元，以便区别于一般未知数.

选择未知元是布列方程过程中非常重要的一环，它关系到所列方程的简与繁，所以我们要十分重视它.

未知元的选择通常有两种方法，一种叫做直接设元法，就是指实际问题中要求什么数，就选它为未知元；有几个未知数，就设几个未知元. 在多数情况下都是采用直接设元法. 另一种叫做间接设元法，它不是直接将问题中所求的数设为未知元，而是根据题意选定和几个未知数都有密切关系的未知数作为未知元，使解题简便. 下面我们通过实例来讨论未知元的选择问题.

例 1 一个正方形的边长增加 4 厘米，面积就比原来的面积多 96 平方厘米. 求原来正方形的边长.

解： 设原来正方形的边长为 x 厘米，则原来正方形的面积为 x^2 平方厘米；后来的边长为 $x+4$ 厘米，面积为 $(x+4)^2$ 平方厘米. 根据题意，列方程

$$(x+4)^2=x^2+96.$$

解得： $x=10$（厘米）.

答：原来正方形的边长为10厘米.

例1中要求原来正方形的边长，就设原来正方形的边长为x,这是直接设元法.

例2 一个正方形的边长增加4厘米，面积就比原来的面积多96平方厘米. 求原来正方形的面积.

在例2中,如果用直接设元法,按照问题要求，设原来正方形的面积为x平方厘米，那么布列方程就比较困难.

因此在解例2时，可以不设原来正方形的面积为x平方厘米，而设原来正方形的边长为x厘米. 然后与例1完全相同，解得原来正方形的边长为10厘米. 最后再按问题要求，求得原来正方形的面积为100平方厘米.这就是间接设元法.

有时在给定的实际问题中，需要设两个或两个以上的未知元,这时也可用直接设元法或用间接设元法.

例3 某两位数被十位数字和个位数字的和所整除，得商数7,如果两个数字的位置互换后减12的差被原十位数字减个位数字的差所整除,得商数9,求这个数.

这题用直接设元法不易列式,可用间接设元法.

解: 设十位数字为x,个位数字为y，那么两位数可表示为$10x+y$,如果将两个数字的位置互换，那么所得的两位数可表示为$10y+x$,依题意,得

$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=7,\\[2ex]\dfrac{10y+x-12}{x-y}=9.\end{cases}$$

解得：$x=8$，$y=4$.

答：这个数是84.

三、代数式的组成

在上一段中，我们已经看出，一旦选定了未知元，那么其他的未知数应该用它表示出来．即将实际问题中的要求的数(或被选定的未知元)和别的未知数之间的关系用代数式表示出来．也就是将实际问题中关键性的语言译成代数式．

例如上一段例 1 中要把原来正方形的面积表示为 x^2 平方厘米，后来正方形的边长表示为 $x+4$ 厘米，面积表示为 $(x+4)^2$ 平方厘米，等等；例 3 中要把原来的两位数表示为 $10x+y$，这个数除以数字的和所得的商表示为$\frac{10x+y}{x+y}$，两个数字位置互换后减 12 的差除以原十位数字减去个位数字的差所得的商表示为$\frac{10y+x-12}{x-y}$，等等．

在组成代数式的过程中，往往用到一些基本的数量关系，如果对这些数量关系比较熟悉，建立代数式就比较容易，在解应用题中常用的数量关系有：

1. 设一个工程要 x 天完成，则每天完成的工程量为$\frac{1}{x}$，k 天完成的工程量为$\frac{k}{x}$．

2. 在匀速运动中的速度 v、距离 s 和时间 t，有 $s=vt$，$v=\frac{s}{t}$，$t=\frac{s}{v}$等关系．

3. 单价、数量、总价之间有基本关系：

$$总价=单价\times数量.$$

4. 完成任务数＝计划数＋增产数，

或　　完成任务数=计划数−减产数;

$$\frac{完成任务数-计划数}{计划数}\times 100\%=增长率,$$

$$\frac{计划数-完成任务数}{计划数}\times 100\%=减产率.$$

5.　　$$工作效率=\frac{总工作量}{工作时间};$$

或　　$$工作效率=\frac{总工作量}{参加工作人数};$$

或　　$$工作效率=\frac{总工作量}{机器台数}.$$

6.　　$$密度=\frac{质量}{体积}.$$

7. 混合物的质量=混合物中各种物质的质量和.

$$某种物质所占的比例=\frac{该物质的质量}{混合物的质量}.$$

8. 含药量=浓度×总量,

$$浓度=\frac{溶质质量}{溶液质量}\times 100\%,其中$$

溶液质量=溶剂质量+溶质质量.

9. 船在静水中的速度=顺流速度−水流速度=逆流速度+水流速度. 故得

$$船在静水中的速度=\frac{顺流速度+逆流速度}{2},$$

$$水流速度=\frac{顺流速度-逆流速度}{2}.$$

10. 几何中的数量关系:如面积公式、体积公式、弧长公式、直角三角形的勾股定理等.

还有其他力学公式、电学公式等等.

四、方程的建立

方程的建立是列方程解应用题中的关键一步，根据等量关系将表示“等量”的两个含有未知元的代数式用等号连结起来，就是所列的方程.

一般地说，设一个未知元则列一个方程，设两个未知元则列两个方程，如此等等.

例如，在本节第二段的例 1 和例 2 中，根据后来的正方形的面积比原来的正方形的面积多 96 平方厘米，即后来的正方形的面积与原来的正方形的面积加上 96 平方厘米的和是相等的这一等量关系，可以列出方程

$$(x+4)^2=x^2+96.$$

在例 3 中，根据两位数被数字的和所除的商与 7 相等，以及数字互换后的两位数减 12 的差被原十位数字减个位数字的差所除的商与 9 相等这两个等量关系，可以列出两个方程

$$\frac{10x+y}{x+y}=7,$$

及

$$\frac{10y+x-12}{x-y}=9.$$

由于一个问题中往往不仅仅只包含一个等量关系，因此，列方程时可以选取不同的等量关系，根据不同的等量关系所列出的方程也是不同的. 为了说明问题，下面我们举一个例子：

例 1 一架飞机飞行于甲乙两个城市之间，顺风需要 5 小时半，逆风需要 6 小时，已知风速是每小时 24 公里，求两个

城市之间的距离.

如果设两个城市之间的距离为 x 公里，飞机的原速为 y 公里/小时，根据

（1）飞机顺风飞行的时间 $=5\frac{1}{2}$ 小时，

（2）飞机逆风飞行的时间 $=6$ 小时

这两个等量关系，按照飞机顺风时的速度为飞机原速与风速的和，逆风时的速度为飞机原速与风速的差，以及飞行时间为距离除以速度的商，可以建立方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y+24}=5\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x}{y-24}=6.\end{cases}$$

由此解得：$x=3168$，$y=552$． 即两个城市之间的距离为 3168 公里.

如果只设两个城市之间的距离为 x 公里这一个未知元，而根据等量关系

（3）风速 $\times 2=$ 飞机顺风飞行的速度 $-$ 飞机逆风飞行的速度，

并利用飞行速度为距离除以飞行时间的商，可以建立方程

$$24\times 2=\frac{x}{5\frac{1}{2}}-\frac{x}{6},$$

即

$$48=\frac{2x}{11}-\frac{x}{6},$$

由此解得：$x=3168$. 同样可得两个城市之间的距离为 3168 公里.

再如运用间接设元法，只设飞机的原速为 x 公里/小时这一个未知数，利用顺风速度乘以顺风所需时间与逆风速度乘以逆风所需时间都是两个城市之间的距离，即

（4）顺风速度乘以顺风所需时间＝逆风速度乘以逆风所需时间

这一等量关系，还可建立方程

$$(x+24)\times 5\frac{1}{2}=(x-24)\times 6,$$

由此解得：$x=552$. 即飞机的原速为552公里/小时. 于是容易求得两个城市之间的距离为3168公里.

从上例可以看出，选取不同的等量关系可以列出不同的方程，从而解法的繁简也不同. 因此，选择什么样的等量关系是十分重要的. 这是列方程解应用题的一个关键环节.

在列方程的过程中，还应注意以下几点：

（1）方程两边所表示的量应该相同，而且各项的单位应该相同.

（2）方程的个数与所设的未知元的个数相等，否则会出现“不定解”的情况.

（3）问题中给出的条件在所列方程中都要考虑到.

（4）列方程找等量关系时，除了我们在本节第三段所提到的一些关系外，还要特别强调在给定的实际问题中要注意关键字眼如“多”、“少”、“快”、“慢”、“提前”、“超过”、“共”、“追上”、“注满”等，从这些字眼来发掘等量关系.

下面我们结合一些例题，来阐明这些关键字眼的重要性.

例2 某厂今年十月份生产机器205台，这比去年十月

份产量的2倍还多15台，这个厂去年十月份生产机器多少台?(见原通用教材)

关键字眼是：比去年十月份产量的2倍还多15台的"多"字.

等量关系是：今年十月份生产的机器205台＝去年十月份产量的2倍＋15台.

设这个厂去年十月份生产机器x台，由等量关系得：

$$2x+15=205.$$

解得：$x=95$.

答：这个厂去年十月份生产机器95台.

例3 解放前，贫农李大爷租种地主霸占的土地，辛勤劳动一年，被迫交租后只剩下粮食120斤，这比他收的粮食的$\frac{2}{5}$还少40斤，李大爷全年收粮食多少斤?(见原通用教材)

关键字眼是：比李大爷收的粮食的$\frac{2}{5}$还少40斤的"少"字.

等量关系是：李大爷只剩下的粮食120斤＝他收的粮食的$\frac{2}{5}-40$斤.

设李大爷全年收粮食x斤，则得

$$\frac{2}{5}x-40=120.$$

解得：$x=400$.

答：李大爷全年收粮食400斤.

例4 甲、乙两人骑自行车，同时从相距65公里的两地相

向而行，2 小时后相遇，已知甲比乙每小时多走 2.5 公里，求乙每小时走多少公里.（见原通用教材）

关键字眼是：相向而行，2 小时后相遇的“相遇”，即两人在 2 小时中所走路程的和等于原来相距的距离.

等量关系是：甲 2 小时所走的路程＋乙 2 小时所走的路程＝65.

设乙每小时走 x 公里，则得

$$2(x+2.5)+2x=65.$$

解得：$x=15.$

答：乙每小时走 15公里.

例 5 某工厂接受一批农具的定货任务，按计划天数，如果每天平均生产 20 件，就差 100 件不能完成任务；如果每天平均生产 23 件，就可超额 20 件完成任务，这批任务有多少件？原计划几天完成？（见原通用教材）

关键字眼是：差 100 件不能完成任务的“差”字，与可超额 20 件完成任务的“超额”.

等量关系是：每天生产 20 件乘以原计划天数＝计划完成任务的件数－100 件，与

每天生产 23 件乘以原计划天数＝计划完成任务的件数＋20 件.

设这批任务有 x 件，原计划完成任务的天数为 y 天，则得

$$20y=x-100 \text{ 与 } 23y=x+20.$$

解方程组 $\begin{cases}20y=x-100,\\23y=x+20,\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x=900,\\y=40.\end{cases}$

答：这批任务有 900 件，原计划 40 天完成.

例 6 （我国古代问题）好马每天走 240 里，劣马每天走 150 里．劣马先走 12 天，好马几天可以追上劣马？（见原通用教材）

关键字眼是：好马追上劣马的“追上”两字．

等量关系是：好马追上劣马所走过的路程＝劣马先走的路程＋在好马追赶期间劣马所走的路程．

设好马 x 天追上劣马，则得

$$240x = 150 \times 12 + 150x.$$

解得：$x = 20$.

答：好马 20 天追上劣马．

例 7 一个蓄水池装有甲、乙、丙三个进水管．单独开放甲管，45 分钟可以注满全池；单独开放乙管，60分钟可以注满全池；单独开放丙管，90 分钟可以注满全池．如果三管一齐开放，几分钟可以注满全池？（见原通用教材）

关键字眼是：甲、乙、丙三管分别用 45 分、60 分、90 分钟就可注满全池的“注满”二字．

等量关系是：三管开放各自工效的和＝这三管一齐开放的工效．

在第三段我们已经指明：$工效 = \frac{总工作量}{工作时间}$.

设三管一齐开放，x 分钟可以注满，又设水的总量为 1，则得

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{1}{x}.$$

解得：$x = 20$.

答：三管一齐开放，20 分钟可以注满全池．

例 8 一件工作，由甲单独做 20 小时完成，由乙单独做 12 小时完成，现在先由甲单独做 4 小时，剩下的部分由甲、乙合做，剩下部分需几小时完成？（见原通用教材）

关键字眼是：剩下的部分由甲、乙合做中的“剩下”与“合做”.

等量关系是：甲、乙各自工效的和＝甲、乙合做剩下部分工作的工效.

设甲、乙合做剩下部分工作，需 x 小时完成，则得

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{12}=\frac{1-\frac{4}{20}}{x}.$$

解得：$x=6$.

答：甲、乙合做剩下部分工作，需 6 小时完成.

本题也可从工作量考虑，把等量关系列为：

甲先前单独做的工作量＋甲、乙后来合做的工作量＝全部工作量.

设甲、乙合做剩下部分工作，需 x 小时完成，则得

$$\frac{4}{20}+x\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}\right)=1.$$

同样解得 $x=6$.

从最后的两个例题，我们已经看出，只从有关数量比较的关键字眼，还不能发掘等量关系，而要借助于其他的等量关系，特别是要借助于数学、物理、化学中的定理、原理、公式去发掘等量关系，这一点我们已在本节第三段叙述过，这里就不再重复.