Xianxing Daishu Tongbu Fudao

线性代数同步辅导

主编 于燕燕

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

线性代数同步辅导

主　编　于燕燕
副主编　张红雷　焦　琳　苏　莹

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是学习线性代数的辅助教材，为了与教学需求保持同步，本书按同济大学数学系编《线性代数》第五版的编排顺序逐章编写，主要面向使用该教材的学生，也可供有关教师参考。全书共分五章：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型。每章内容包括基本要求、知识结构、内容概要、典型例题、习题解答、自测试题、自测题答案七个栏目，其中部分例题和习题给出了多种解法，配以详细的讲解、点评，帮助读者深入理解，触类旁通，开拓思维。

本书读者对象为理工、经管、农林、医药等专业的大学生以及复习应试和备考研究生的人员。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导 / 于燕燕主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2011.12

ISBN 978-7-5646-1265-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①于… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 201991 号

书　　名　线性代数同步辅导
主　　编　于燕燕
责任编辑　潘俊成
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 13.25　**字数** 331 千字
版次印次　2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　25.00 元
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

目　　录

第一章　行列式…………………………………………………………………… 1

第二章　矩阵及其运算 ……………………………………………………… 44

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 ………………………………… 85

第四章　向量组的线性相关性………………………………………………… 116

第五章　相似矩阵及二次型…………………………………………………… 168

第一章 行 列 式

一、基本要求

1. 了解 n 阶行列式的定义；

2. 掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开的方法；

3. 熟练掌握二阶、三阶和四阶行列式的计算法，会计算简单的 n 阶行列式；

4. 了解克拉默法则.

二、知识结构

$$
\text{行列式}\begin{cases}\text{行列式定义}\\ \text{行列式性质}\\ \text{行列式展开}\\ \text{克拉默法则}\end{cases}
$$

三、内容概要

一个(n 阶行列式)概念；九类可直接求出的行列式；三种计算行列式的主要方法.

1. n 阶行列式的定义

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}
$$

2. 行列式的性质

值不变

(1) $D=D^{\mathrm{T}}$ 即行列式与它的转置行列式相等.

(2) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

值为零

(3) 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

(4) 若行列式中某行(列)元素全为零，则此行列式为零.

(5) 若行列式中有两行(列)元素成比例，则此行列式为零.

恒等变形

(6) 互换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

(7) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式或行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(8) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和.

例如第 i 列的元素都是两数之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 行列式按行(列)展开(拉普拉斯定理)

余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

拉普拉斯定理

n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}A_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$$

注 (1) 行列式的展开定理可记忆为"行列式可以按任一行或任一列展开，错行或错列展开为零".

(2) 两个常用公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in} \qquad (*)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \qquad (**)$$

4. 克拉默法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，则式(1)有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$，其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 的第 j 列的元素用方程右端的常数项代替所得的 n 阶行列式.

推论 如果齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ (2)

的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组(2)只有零解.

九类可直接求出的行列式

利用行列式的定义或性质可直接求出的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}，\text{特别} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix} = (-1)^{kn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{kn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

范德蒙德行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

三种计算行列式的主要方法

(1) 化为上述九类行列式的表达式之一，利用上述结果求得；

(2) 降阶：利用行列式的性质把行列式的某行(列)化为尽可能多的零，然后按该行(列)展开，逐次降阶，直到 3 阶或 2 阶行列式，计算出值；

(3) 递推：在降阶过程中找出高阶行列式 D_n 与低阶行列式 $D_r(r<n)$ 的关系，即递推公式，利用递推公式推出 D_n .

实际计算时，还有许多方法，如加边法(升阶法)、拆元法、做辅助函数等方法，根据题目的不同特点，采用不同的方法和技巧，灵活综合使用上述方法，可起到简化计算的作用.

四、典型例题

【题型一】 利用行列式定义直接计算

此法适用于行列式元素中零比较多的行列式.

例 1 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 D_n中不为零的项用一般形式表示为

$$a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} = n!$$

该项列标排列 $n-1\ n-2\ \cdots\ 1\ n$ 的逆序数 $t=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$，故

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

例 2 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & x-2 \\ 1 & -2 & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 4 \\ x & 1 & 2x & 3 \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 根据行列式的定义，能够出现 x^4 和 x^3 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 和 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \boxed{x-2} \\ 1 & -2 & \boxed{x} & 3 \\ 1 & \boxed{x} & 2 & 4 \\ \boxed{x} & 1 & 2x & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \boxed{x-2} \\ \boxed{1} & -2 & x & 3 \\ 1 & \boxed{x} & 2 & 4 \\ x & 1 & \boxed{2x} & 3 \end{vmatrix}$$

而这两项列标排列分别为 4321，4123，其逆序数分别为 $t=6, t=3$，故

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + \cdots \\ &= (x-2)\cdot x\cdot x\cdot x - (x-2)\cdot 1\cdot x\cdot (2x) + \cdots \\ &= x^4 - 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 中 x^4, x^3 的系数分别是 1，−4.

评注 本题如果把 $f(x)$ 全部计算出来是很复杂的，只需计算能够出现 x^4，x^3 的项就简便得多了．按照行列式的定义：行列式等于取自不同行不同列的 n 个元素乘积项的代数和，通过分析即可知只有上面两种情况．

例 3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

（1992 年数学（五）考研题，3 分）

解 主对角线上 n 个 a 正好是位于行列式的不同行不同列上的 n 个元，它们的积 a^n 为行列式的一项，符号为正，同理，与主对角线平行线上的 $n-1$ 个 b 与第 n 行第一列的 b 的积，也是行列式的一项，符号为负，即 $(-1)^{n-1}b^n$，此外，行列式展开式中再无非零项了，所以原式为 $a^n+(-1)^{n-1}b^n$．

评注 只要掌握行列式展开式中各项的结构，就能计算出行列式；本题也可利用行列式按某行或列展开计算（如可按 c_1 展开）．

【题型二】 利用行列式的性质计算

例 4 一个 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称 D_n 为反对称行列式，证明：奇数阶反对称行列式为零．

证明 由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 知 $a_{ii}=-a_{ii}$，即

$$a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$$

故行列式 D_n 可表示为

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质 $D=D^{\mathrm{T}}$，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n D_n$$

当 n 为奇数时，得 $D_n = -D_n$，因而得 $D_n = 0$.

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 & \cdots & n+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 & \cdots & n+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 & \cdots & n+a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 2+a_n & 3+a_n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

解
$$D_n \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 & \cdots & n+a_1 \\ 1+a_2 & 1 & 2 & \cdots & n+a_2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 & \cdots & n+a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 1 & 2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} = 0$$

由行列式的性质可知：两列成比例其值为零.

例 6 计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}$.

解 原式 $\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

由行列式的性质：两行元素相同，其值为零.

例 7 计算 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

解
$$\text{原式} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-bc_1]{c_2-ac_1} 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b+c+a & 0 \\ 1 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

【题型三】 化为三角形行列式计算

若能把一个行列式经过适当变换化为三角形行列式，其结果为行列式主对角线上元素的乘积. 因此，化三角形是行列式计算的一个重要方法.

例 8 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 原式 $\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_{i-1}-c_i} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & 2n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解Ⅰ 这个行列式的特点是每行(列)元素之和均相等，根据行列式的性质，把第 2，3，…，n 列都加到第 1 列上，行列式不变，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

解Ⅱ

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{n} c_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

评注 同样的解法还可求出本例的变形

$$D_n = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 10 计算 n 阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解 D_n 的构造是:主对角线元全为 2,主对角线上方第一条次对角线与下方第一条次对角线的元全为 1,其余的元全为 0.将其化为三角行列式,为此把 D_n 中主对角线下方第一条次对角线的元 1 全部消成 0,所得的行列式为

$$D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n-\frac{n+1}{n}r_{n-1}}]{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1 \\ r_3-\frac{2}{3}r_2 \\ r_4-\frac{3}{4}r_3}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix}$$

上面的行列式是上三角形行列式,故

$$D_n = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

评注 一般的三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

也可以按上述方法把次对角线元 $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 全部化为零，得到一个三角形行列式，它的值等于该三角形行列式的主对角线元的连乘积. 后面还有其他方法.

例 11 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

解 把所有的第 $i+1(i = 1, 2, \cdots, n)$ 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍加到第一列，得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i c_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_n$$

评注 对于这种箭形行列式都可以用此种方法化为三角形行列式来计算. 还有

$$\begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_2 & & b_2 \\ & & & a_1 & b_1 \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 & a_0 \\ & & & a_1 & c_1 \\ & & a_2 & & c_2 \\ & \iddots & & & \vdots \\ a_n & & & & c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & & & & a_n \\ \vdots & & & \iddots & \\ c_2 & & a_2 & & \\ c_1 & a_1 & & & \\ a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_n$$

也可扩展到可化为箭形行列式的情形. 如教材习题一 8(6)，再如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

只要将第 1 行的(−1)倍加到第 i 行($i=2,3,\cdots,n$),可将该行列式化为箭形行列式. 形如下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b_{n-2} & \\ & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} (b_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n-1)$$

可化为三角形行列式来计算.

【题型四】 降为低阶的行列式计算

此法也称降阶法,是按某一行(列)展开行列式,这样可以降低一阶,更一般地是用拉普拉斯定理,这样可以降低多阶. 为了使运算更加简便,往往是先利用行列式的性质化简,使行列式中有较多的零出现,然后再展开.

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解 将 D_n 按第 1 行展开

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}(-1)^n a^{n-2}$$

$$= a^n - a^{n-2}$$

例 13 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

解 行列式的特点是后 $n-1$ 行的大部分元素相同,为此将行列式的第 $n-1$ 行的(−1)倍加到第 n 行……第 2 行的(−1)倍加到第 3 行,第 1,2 行不动,得

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & a & \cdots & a & a\\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta\\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha & 0\end{vmatrix}\quad \text{（按第 1 列展开）}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta\\ \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha & \alpha-\beta\end{vmatrix}-$$

$$b\begin{vmatrix}a & a & a & \cdots & a & a\\ \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha & \alpha-\beta\end{vmatrix}$$

对于上面的 2 个行列式都采用 $C_i+C_{i+1}\quad(i=n-2,\cdots,2,1)$ 得

$$=\lambda\begin{vmatrix}\alpha+(n-2)\beta & (n-2)\beta & (n-3)\beta & \cdots & 2\beta & \beta\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta\end{vmatrix}-$$

$$b\begin{vmatrix}(n-1)a & (n-2)a & (n-3)a & \cdots & 2a & a\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[\alpha+(n-2)\beta]\,(\alpha-\beta)^{n-2}-b(n-1)a\,(\alpha-\beta)^{n-2}$$

$$=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]$$

评注 本题先降阶再化为三角形行列式来计算，这是计算行列式的两种最基本的方法. 这两种方法通常是交叉使用的.

【题型五】 递推公式法

递推公式法：对 n 阶行列式 D_n 找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_n 与 D_{n-1}，D_{n-2} 之间的一种关系——递推公式（其中 D_n，D_{n-1}，D_{n-2} 等结构相同），再由递推公式求出 D_n 的方法称为递

推公式法.

例 14 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$
$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(n\geqslant 2)$$

证明 将 D_n按第 1 列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}+$$
$$(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$
$$=a_n+xD_{n-1}$$

由此得递推公式 $D_n=a_n+xD_{n-1}$，利用此递推公式可得

$$\begin{aligned} D_n &= a_n+xD_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2}) \\ &= a_n+a_{n-1}x+x^2D_{n-2} \\ &= \cdots=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n \end{aligned}$$

例 15 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 这是例 9 中的行列式，现在用递推公式法计算，为此将第 1 列改写为

$$D_n=\begin{vmatrix} (a-b)+b & b & b & \cdots & b \\ 0+b & a & b & \cdots & b \\ 0+b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a-b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$