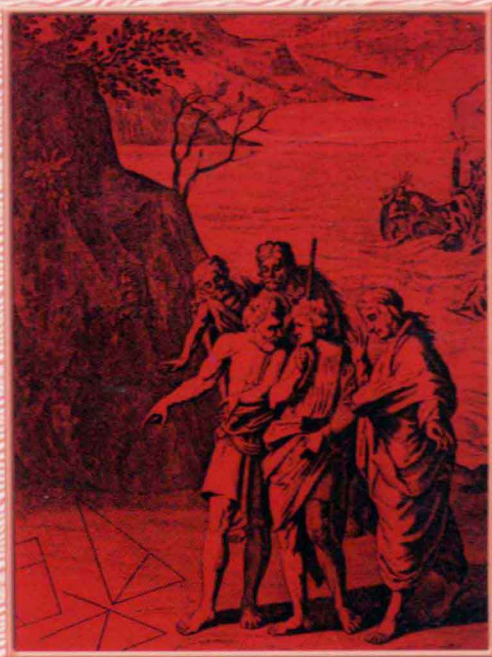


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

卡塔兰二猜想

——从一道普特南竞赛试题谈起

刘培杰数学工作室 编译



◎ 与 Catalan 猜想有关的竞赛题

◎ 问题的历史

◎ Waleńsich 友

◎ Catalan 猜想的证明概述

◎ $P=2$ 时的 Catalan 方程

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

卡塔兰二猜想

——从一道普特南竞赛试题谈起

刘培杰数学工作室 编译



◎ 与 Catalan 猜

◎ 问题的历史

◎ Wieferich 对

◎ Catalan 猜想的证明概述

◎ $P=2$ 时的 Catalan 方程



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道普特南数学竞赛试题谈起,详细地介绍了卡塔兰猜想的产生、证明方法及其在数学竞赛试题中的广泛应用.并且针对学生和专业学者,以不同的角度介绍了卡塔兰猜想的历史与证明历程.

本书可供大、中学生及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

卡塔兰猜想:从一道普特南竞赛试题谈起/刘培杰
数学工作室编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,
2013.5

ISBN 978-7-5603-4042-5

I. ①卡… II. ①刘… III. ①数论—研究
IV. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 067577 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王 慧
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 6 字数 62 千字
版 次 2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4042-5
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
三角形中的角格点问题	2013-01	88.00	207
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
平面几何天天练上卷·基础篇(直线型)	2013-01	58.00	208
平面几何天天练中卷·基础篇(涉及圆)	2013-01	28.00	234
平面几何天天练下卷·提高篇	2013-01	58.00	237
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
俄罗斯初等数学万题选——三角卷	2012-11	38.00	222
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82, 83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
无穷分析引论(上)	2013-04	88.00	247
无穷分析引论(下)	2013-04	98.00	245
数学分析中的一个新方法及其应用	2013-01	38.00	231
数学分析例选:通过范例学技巧	2013-01	88.00	243
三角级数论(上册)	2013-01	38.00	232
三角级数论(下册)	2013-01	48.00	233
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
随机过程(I)	2012-12	78.00	224
随机过程(II)	2013-01	68.00	235
整数的性质	2012-11	38.00	192
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144, 145
算术探索	2011-12	158.00	148



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出版时间	定 价	编 号
初等数论(I)	2012-01	18.00	156
初等数论(II)	2012-01	18.00	157
初等数论(III)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172
平面几何与数论中未解决的新老问题	2013-01	68.00	229
历届IMO试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届CMO试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(上编)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(下编)	2012-04	38.00	170
整函数	2012-08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012-05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
模糊分析与特殊泛函空间	2013-01	68.00	241
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009卷(第1辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010卷(第2辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011卷(第3辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012卷(第4辑)	2012-07	48.00	190



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程一折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135
近代拓扑学研究	2013-04	38.00	239
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
新编640个世界著名数学智力趣题	2013-02	88.00	242
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
我怎样解题	2013-01	48.00	227
2011年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
全国中考数学压轴题审题要津与解法研究	2013-04	78.00	248
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	2012-12	18.00	228
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	2012-10	18.00	221
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	2013-04	38.00	238
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	2013-03	38.00	236
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	2013-06	18.00	256
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克斯定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-08	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	2012-10	28.00	218
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	2013-04	38.00	244
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	2012-10	18.00	220
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考题谈起	2012-10	38.00	219
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	2013-01	38.00	240
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013-04	58.00	246
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道日本数学奥林匹克试题谈起	2013-04	48.00	249
李天岩-约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克隆耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特-莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道(美国数学月刊)征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	176
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
非光滑优化及其变分分析	2013-01	48.00	230
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
古典数学难题与伽罗瓦理论	2012-11	58.00	223
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187
矩阵论(上)	2013-06	58.00	250
矩阵论(下)	2013-06	48.00	251
三角级数论(哈代)	2013-06	48.00	254
圆锥曲线习题集(上)	2013-06	68.00	255
抽象代数:方法导引	2013-06	38.00	257
闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
高等数学解题全攻略(上卷)	2013-06	58.00	252
高等数学解题全攻略(下卷)	2013-06	58.00	253
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@163.com

◎
目
录

第 1 章 Catalan 猜想与竞赛试题	1
1.1 引言	1
1.2 与 Catalan 猜想有关的竞赛题	5
1.3 利用 Catalan 猜想编拟的竞赛训练题	10
1.4 几个集训队试题	16
1.5 关于 Catalan 猜想的一些进展	23
第 2 章 Catalan 猜想面向中学生的历史简介	28
2.1 问题的历史	29
2.2 某些预备结论	30
2.3 Cassels-Nagell 定理	32
2.4 论问题 M2032	33
2.5 反素数	35

第 3 章 Catalan 猜想面向专业人士的证明综述	36
.....	36
3.1 引言	36
3.2 早期和随后的历史	38
3.3 Cassels 和情形 I	40
3.4 有可能用计算机来解决这一问题吗?	42
3.5 Wieferich 对	44
3.6 起关键作用的零化子	47
3.7 特殊的零化子	49
3.8 Catalan 猜想的证明概述	52
3.9 Mihailescu 定理	54
3.10 再回到零化子	56
3.11 最后,一个矛盾	59
3.12 结束语	60
附录 I $p=2$ 时的 Catalan 方程	61
附录 II Cassels 定理	67
编辑手记	77



Catalan^① 猜想与竞赛试题

第

1

章

1.1 引言

1976年12月4日举行的第37届普特南数学竞赛上午试题A₃为:

试题1 求方程

$$|p^r - q^s| = 1 \quad (1)$$

的整数解,其中 p, q 是素数, r, s 是大于1的正整数,并证明你所得到的解是全部解.

1978年1月号的《美国数学月刊》发表了A. P. Hillman, G. L. Alexanderson,

① 译为卡特兰.——编者注

卡塔兰猜想

L. F. Klosimeki 的总结文章,他们给出的解法为:

我们证明只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 所给出的解,即 $(p, r, q, s) = (3, 2, 2, 3)$ 或 $(2, 3, 3, 2)$.

明显地, p 或 q 是 2, 假如 $q = 2$, 则 p 是一个适合 $p^r \pm 1 = 2^s$ 的奇素数. 假如 r 是奇数, 则 $\frac{p^r \pm 1}{p \pm 1}$ 是奇整数 $p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp p^{r-4} + \cdots + 1$. 因此 $r > 1$, 故它大于 1. 这就与 2^s 没有这样的因子这个事实相矛盾.

现在我们尝试 r 是一个偶数 $2t$, 则 $p^r + 1 = 2^s$, 可推出

$$2^s = (p^t)^2 + 1 = (2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2$$

这是不可能的, 因为对于 $s > 1$ 有 $4 \mid 2^s$, 而 $4 \nmid (4n^2 + 4n + 2)$, 还有 $r = 2t$ 和 $p^r - 1 = 2^s$, 导出

$$(p^t)^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n + 1) = 2^s$$

因为 n 或 $n + 1$ 是奇数, 所以仅对 $n = 1, s = 3, p = 3$ 与 $r = 2$ 这才是可能的.

我们说这个解答固然简单, 但是开始的断言: 只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 给出的解, 这点是怎样想到的?

实际上试题 1 不过是著名的 Catalan 猜想的一个特殊形式.

Catalan(1814—1894), 是比利时著名数学家, 1814 年 5 月 30 日生于布鲁日. 毕业于巴黎多科工艺学校. 1856 年任列日大学分析学教授, 布鲁塞尔科学院院士, 共写有 200 多篇关于各种数学问题的研究报告.

Catalan 曾于 1842 年提出猜想: 除开 $8 = 2^3, 9 = 3^2$ 外, 没有两个连续自然数都是正整数的乘幂. 即在整数 $x > 1, y > 1, m > 1, n > 1$ 时, 除 $m = y = 2, n = x = 3$ 外, 方程 $x^m - y^n = 1$ 无解. 或者, 不定方程 $x^p - y^q = 1$,

p, q 是素数, 除开 $p=2, x=3, q=3, y=2$ 外, 没有其他的正整数解.

这一猜想是由 Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 最先从 Catalan 处知到的, 并于 1849 年发表. Catalan 当时是巴黎 I'École Polytechnique 的一位老师, 由于解决了一个组合问题而出名. 仍在使用的术语“Catalan 数”就是关于那个组合问题的. Catalan 的工作是多方面的. 在微分几何方面, 他证明了对于直纹面, 只有当它是平面或为正常的螺旋面的时候, 才可能是实的(此即 Catalan 定理). 至于这个猜想 Catalan 写道: 他至今还未能完全证明它, 也从未发表过有关它的任何严肃的部分结果.

其实比 Catalan 提出这一猜想早大约 100 年, Euler 证明了 8 和 9 是仅有的相邻平方数和立方数, 即 Diophantine 方程: $x^3 - y^2 = \pm 1 (x > 0, y > 0)$ 的仅有解, Euler 的证明是精巧的, 其中用到了 Fermat 无限递降法及 Gauss 整数环.

如果事先并不知道这个背景去解试题 1 就要从头开始, 费一些周折了.

首先去掉绝对值符号, 因 p 与 q, r 与 s 的对称性, 故不妨设 $p^r > q^s$, 可以只考虑方程

$$p^r - q^s = 1 \quad (2)$$

的整数解.

显然, p, q 不能全为奇素数, 否则, $1 = p^r - q^s$ 是偶数, 矛盾.

$p \neq q$, 否则 $1 = p^r - q^s$, 有大于 1 的约数 p , 矛盾. 故 p, q 一定有一个是唯一的偶素数 2.

(1) 当 $p=2$ 时, 如果 $s=2s'$ 是偶数, 设 $q=2q'+1$,