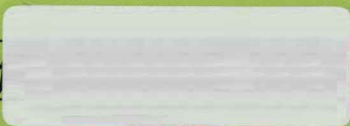




彭林 / 编著

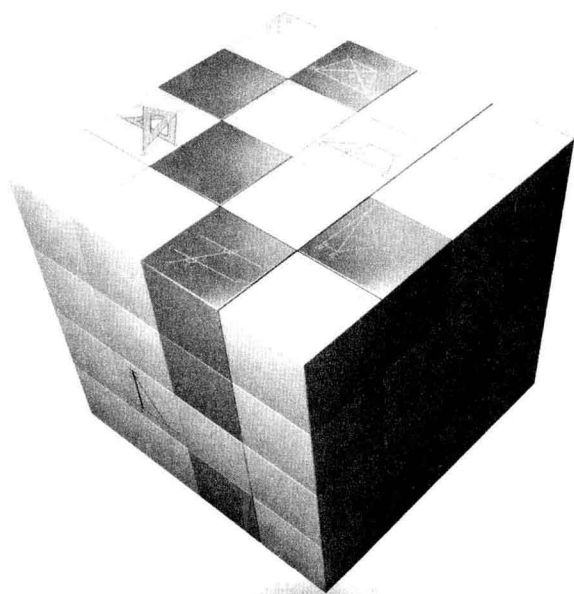
中考数学中档题

必考难点详解  高分题剖析

实战真题演练



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



彭林 / 编著

中考数学中档题

必考难点详析

丢分题剖析

实战真题演练



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

中考数学中档题:必考难点详解+丢分题剖析+实战真题演练/彭林编著. —上海:
华东理工大学出版社, 2013. 6

(给力数学)

ISBN 978 - 7 - 5628 - 3564 - 6

I. ①中… II. ①彭… III. ①中学数学课-初中-升学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 114768 号

给力数学

中考数学中档题:必考难点详解+丢分题剖析+实战真题演练

编 著 / 彭 林

策划编辑 / 庄晓明

责任编辑 / 庄晓明

责任校对 / 李 晔

封面设计 / 裘幼华

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话: (021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真: (021)64252707

网 址: press. ecust. edu. cn

印 刷 / 常熟华顺印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 12

字 数 / 300 千字

版 次 / 2013 年 6 月第 1 版

印 次 / 2013 年 6 月第 1 次

书 号 / ISBN 978 - 7 - 5628 - 3564 - 6

定 价 / 27.80 元

联系我们: 电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝网 <http://shop61951206.taobao.com>





2

目 录



从容应对 笑迎中考	〈1〉
① 第一单元 数与式	〈1〉
② 第二单元 方程与方程组、不等式与不等式组	〈17〉
③ 第三单元 函数	〈30〉
④ 第四单元 三角形与四边形	〈61〉
⑤ 第五单元 相似形与锐角三角函数	〈89〉
⑥ 第六单元 圆	〈110〉
⑦ 第七单元 图形变换	〈126〉
⑧ 第八单元 概率与统计	〈146〉
⑨ 参考答案	〈160〉



数与式



命题趋势

数与式是初中数学中最为基础的内容,包括数与式的有关概念、数与式的运算和变形、数与式性质的应用、列式的能力,在中考试卷中大多以容易题和中档题的形式出现.但从近年全国中考试题来看,对这一部分内容的考查又有了新的变化,出现了一些以数与式为载体考查数学思维和数学学习能力的新做法.

考点剖析

考点1 数与式的有关概念

例1 (1)若 m, n 互为相反数,则 $5m+5n-5=$ _____.

(2)一个数的相反数的倒数是 $-2\frac{1}{2}$,则这个数是().

A. $-\frac{2}{5}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $-\frac{5}{2}$

(3)已知 $|x|=3, |y|=2$,且 $xy<0$,则 $x+y$ 的值等于_____.

【解题锦囊】

在解决与倒数、相反数、绝对值有关的试题时,首先要全面、深刻地把握概念的意义.比如,乘积为1的两个数互为倒数,只有符号不同的两个数叫做相反数.其次要善于把握概念的不同表达形式.比如,正数的绝对值等于它本身,零的绝对值等于零,负数的绝对值是它的相反数.而从数轴上看,一个实数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点到原点的距离.

【思路分析】

(1)根据互为相反数的意义,得出 $m+n=0$.

(2)这道题可以用逆推的方法做,即 $-2\frac{1}{2}$ 的倒数的相反数就是原来这个数.

(3)要正确解答这类题目,一定要注意绝对值的双值性,以及题目中的隐含条件,本题中就隐含 x, y 异号这一条件.



【规范解答】

(1)由题意可知, $m+n=0$,

所以, $5m+5n-5=5(m+n)-5=5\times 0-5=-5$.

(2)解法 1: $-2\frac{1}{2}$ 的倒数是 $-\frac{2}{5}$,而 $-\frac{2}{5}$ 的相反数是 $\frac{2}{5}$,即这个数是 $\frac{2}{5}$,选 C.

解法 2:设这个数为 x ,则 $-\frac{1}{x}=-2\frac{1}{2}$,所以 $x=\frac{2}{5}$,选 C.

(3)由 $|x|=3$,得 $x=\pm 3$.

由 $|y|=2$,得 $y=\pm 2$.

因为 $xy<0$,所以 x,y 异号,

故 $x=3,y=-2$ 或 $x=-3,y=2$,

所以 $x+y=1$ 或 -1 .

【解后反思收获大】

(1)有些同学只会死记硬背概念,而缺乏对概念的深刻理解,不善于把握概念的不同表达形式.比如,第(1)小题只会背“只有符号不同的两个数叫做互为相反数”,不知道由已知条件 m,n 互为相反数得到 $m+n=0$.

(2)解决第(2)小题这类问题还可以用列方程的方法求解,如上述解法 2.

(3)对绝对值的内涵要全面认识,绝对值的定义是: $|a| = \begin{cases} a(a>0) \\ 0(a=0) \\ -a(a<0) \end{cases}$,绝对值具有非负

性: $|a|\geq 0$,双值性:若 $|x|=a(a\geq 0)$,则 $x=\pm a$,遇到绝对值的问题请记住:一般要分类讨论.

温馨小提示

每一位考生都必须明确,在别人都很难进入高效的学习状态的时候,你如果能够做到高效学习,会迅速提升自己的相对实力,从而笑到最后,笑得最甜.

考点 2 数与式的运算和变形

例 2 化简:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}\right)\div\frac{2ab}{(a-b)(a+b)^2}.$$

【解题锦囊】

解决分式的运算的试题,关键是准确运用法则,分式的加减法法则是: $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$, $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$;分式的乘除法法则是: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$;分式乘方法则是: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (n 为正整数).“准确”与“灵活”运用这些法则是正确迅速地解决分式运算的有效



策略.

【思路分析】

这道题化简的方法可以用以下三种方法来进行,首先准确运用法则,还可以灵活地运用分配律,再则,利用除法(或分式)的基本性质,被除式和除式都乘以 $(a-b)(a+b)^2$.

【规范解答】

$$\begin{aligned}\text{解法 1:原式} &= \left[\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} - \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} \right] \cdot \frac{(a-b)(a+b)^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)^2}{2ab} \\ &= \frac{2ab}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)^2}{2ab} \\ &= a+b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法 2:原式} &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b} \right) \cdot [(a-b)(a+b)] \cdot \frac{a+b}{2ab} \\ &= [a^2+b^2-(a-b)^2] \cdot \frac{a+b}{2ab} \\ &= a+b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法 3:原式} &= [(a^2+b^2)(a+b)-(a-b)^2(a+b)] \div 2ab \\ &= (a+b)(a^2+b^2-a^2+2ab-b^2) \div 2ab \\ &= 2ab(a+b) \div 2ab \\ &= a+b.\end{aligned}$$

【解后反思收获大】

按一般步骤计算,解此题就显得烦琐,易出错,这是经验之谈,若能分解因式,并用分配律计算,其成功率要大得多.

例 3 (1)已知 $a+b=5$, $ab=3$, 求 a^2+b^2 的值.

(2)代数式 $3x^2-4x+6$ 的值是 9, 则 $x^2-\frac{4}{3}x+6$ 的值是().

A. 7

B. 18

C. 12

D. 9

【解题锦囊】

代数式求值技巧性比较高,我们在掌握一般方法,即先把代数式化简(整式化简可应用乘法公式,分式化简应注意通分、分解因式、约分),再代入求值以外,还要善于针对题目的特征,寻找简捷解法.

【思路分析】

(1)已知两数和与两数积,求由这两数组成的某些代数式的值,这是中考常见的题型,关键在于将代数式化成由两数和与两数积表达的式子.

(2)运用整体代入法求代数式的值,此方法一般用于较难求出未知数具体的值时,此时可将含未知数的多项式看成一个整体求值,再代入所求式求值.

【规范解答】

$$(1) a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 6 = 19.$$



(2)由题意, $3x^2 - 4x + 6 = 9$, 所以 $3x^2 - 4x = 3$.

即 $x^2 - \frac{4}{3}x + 6 = \frac{1}{3}(3x^2 - 4x) + 6 = \frac{1}{3} \times 3 + 6 = 7$, 选 A.

【解后反思收获大】

(1)应熟练掌握完全平方公式的各种变形:

$$\textcircled{1} (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2,$$

$$\textcircled{2} (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2,$$

$$\textcircled{3} (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

$$\textcircled{4} (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

例如,若实数 x, y, z 满足 $(x-z)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$, 则下列式子一定成立的是().

$$\text{A. } x+y+z=0$$

$$\text{B. } x+y-2z=0$$

$$\text{C. } y+z-2x=0$$

$$\text{D. } z+x-2y=0$$

本题考查完全平方公式的变形使用,有一定的灵活性,难度较大. 原方程可变形为 $[(x-y)+(y-z)]^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$, 应用上述完全平方公式②变形,有 $(x+z-2y)^2 = 0$, 所以 $x+z-2y=0$, 选 D.

(2)应用整体代入求代数式的值,要注意代入时机的选择.

例如,已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 3$, 求 $\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}$ 的值.

本题可以这样解:由 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 3$ 变形得 $a-b = -3ab$, 代入所求式得:

$$\text{原式} = \frac{2(a-b)+3ab}{(a-b)-2ab} = \frac{-6ab+3ab}{-3ab-2ab} = \frac{3}{5}.$$

本题还可以将 $\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b}$ 的分子、分母同时除以 ab , 凑 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 的形式.

$$\frac{2a+3ab-2b}{a-2ab-b} = \frac{\frac{2}{b} + 3 - \frac{2}{a}}{\frac{1}{b} - 2 - \frac{1}{a}} = \frac{-2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + 3}{-\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - 2} = \frac{3}{5}.$$

温馨小提示

数学是不怎么需要记忆的一门学科,一般数学有很多公式,但是这些公式你若能理解就会用了,你用得越来越熟练,就不需要额外费劲去记忆了.

例4 如果一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差,那么称这个正整数为“神秘数”,如: $4=2^2-0^2$, $12=4^2-2^2$, $20=6^2-4^2$. 因此 4, 12, 20 这三个数都是神秘数.

(1)28 和 2012 这两个数是神秘数吗? 为什么?

(2)设两个连续偶数为 $2k+2$ 和 $2k$ (其中 k 取非负整数),由这两个连续偶数构造的神秘数是 4 的倍数吗? 为什么?

(3)两个连续奇数的平方差(取正数)是神秘数吗? 为什么?



【解题锦囊】

解答这道题,首先需要准确理解题目中所定义的“神秘数”的含义;其次就是要准确、灵活地运用平方差公式和整数的奇偶性.

【思路分析】

解答第(1)小题时,应注意题目中给出的三个例子的启示:

$$4=4 \times 1=2^2-0^2,$$

$$12=4 \times 3=4^2-2^2, 20=4 \times 5=6^2-4^2,$$

$$\text{所以 } 28=4 \times 7=8^2-6^2, 2012=4 \times 503=504^2-502^2.$$

利用平方差公式,结合整数的奇偶性,可以解决第(2)(3)小题.

【规范解答】

$$(1) \text{找规律: } 4=4 \times 1=2^2-0^2,$$

$$12=4 \times 3=4^2-2^2,$$

$$20=4 \times 5=6^2-4^2,$$

$$28=4 \times 7=8^2-6^2,$$

...

$$2012=4 \times 503=504^2-502^2,$$

所以 28 和 2012 都是神秘数.

(2) $(2k+2)^2-(2k)^2=4(2k+1)$, 因此由这两个连续偶数 $2k+2$ 和 $2k$ 构造的神秘数是 4 的倍数.

(3) 由(2)知,神秘数可以表示成 $4(2k+1)$, 因为 $2k+1$ 是奇数, 因此神秘数是 4 的倍数, 但一定不是 8 的倍数. 另一方面, 设两个连续奇数为 $2n+1$ 和 $2n-1$, 则 $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$, 即两个连续奇数的平方差是 8 的倍数. 因此, 两个连续奇数的平方差不是神秘数.

【解后反思收获大】

(1) 解决这类新定义数的试题, 题目中往往在新定义之后, 给出若干个例子, 解题时应结合这些例子, 充分理解新定义数, 找到解题途径.

(2) 掌握平方差公式的特点是正确记忆平方差公式的关键. 平方差公式的特点是: 公式左边是两个二项式的积, 在这两个二项式中, 有一项都是 a , 是完全相同的, 另一项分别是 b 与 $-b$, 互为相反数, 即只差一个符号, 而绝对值相同, 公式的右边是平方差的形式. 本题是逆用平方差公式.

例 5 (1) 新定义一种运算: $a * b = \frac{a+b}{1-ab}$, 则 $2 * 3 =$ _____.

(2) 定义运算“@”的运算法则为: $x @ y = \sqrt{xy+4}$, 则 $(2 @ 6) @ 8 =$ _____.

(3) 在实数的原有运算法则基础上我们又定义运算“ $\oplus$ ”如下:

当 $a \geq b$ 时, $a \oplus b = b^2$; 当 $a < b$ 时, $a \oplus b = a$.

则当 $x=2$ 时, $(1 \oplus x) \cdot x - (3 \oplus x)$ 的值为 _____. (“ $\cdot$ ”和“ $-$ ”仍为实数运算中的乘号和减号)

【解题锦囊】

解答这类定义新运算的试题, 首先需要准确理解题目中所定义的新运算的含义, 其次就是



准确、灵活地运用法则和公式.

【思路分析】

中考试题中不少数、式运算问题以“非标准”形式给出,核心策略是先将其转化为“标准”算式,然后计算.而这个“转化”就提高了对运算的灵活性和准确性的要求.

【规范解答】

$$(1) 2 * 3 = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = -1.$$

$$(2) \text{因为 } 2 @ 6 = \sqrt{2 \times 6 + 4} = 4, \text{ 所以 } (2 @ 6) @ 8 = \sqrt{4 \times 8 + 4} = 6.$$

(3) 根据新运算 $\oplus$ 的规定, $x=2$ 时, 有

$$(1 \oplus x) \cdot x - (3 \oplus x) = (1 \oplus 2) \cdot 2 - (3 \oplus 2) = 1 \times 2 - 2^2 = -2.$$

【解后反思收获大】

解此类题目的关键在于,会将新的运算程序转化为已学过的运算的程序,比如,第(3)小题,新运算 $a \oplus b$ 是分类给出的,所以在求 $a \oplus b$ 值时,首先判断 a 和 b 的大小.当 $a \geq b$ 时, $a \oplus b$ 就是 b^2 ,只要把已知的 b 的值代入就可以了;当 $a \leq b$ 时, $a \oplus b$ 就是 a ,只要把已知的 a 的值代入就可以了.

温馨小贴士

数学学习的方法总的来说就是:1. 突出一个“思”字;2. 在学习过程中必须有“二动”:一是动手,二是动脑;3. 在平时要做到“三个一遍”:上课认真听一遍,下课动手推一遍,考试前想一遍;4. 要重视“四个依据”:教科书、笔记、习题集和错题本.



考点3 数与式性质的应用

例6 (1) 已知 $\sqrt{a+2} + |b-1| = 0$, 那么 $(a+b)^{2011}$ 的值为().

- A. -1 B. 1 C. 3^{2011} D. -3^{2011}

(2) 若 $(a+\sqrt{2})^2$ 与 $|b+1|$ 互为相反数, 则 $\frac{1}{b-a}$ 的值为().

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}+1$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $1-\sqrt{2}$

【解题锦囊】

应用非负数性质的基础在于灵活运用非负数的概念,熟练准确地进行运算以及恰当的变形.

【思路分析】

(1) 绝对值、算术平方根都是非负数,所以利用非负数的性质:若两个非负数之和为0,则这两个数均为0.

(2) 需要首先利用相反数的概念,得到 $(a+\sqrt{2})^2 + |b+1| = 0$,然后再利用非负数性质



求解.

【规范解答】

$$(1) \because \sqrt{a+2} \geq 0, |b-1| \geq 0, \sqrt{a+2} + |b-1| = 0,$$

$$\therefore \sqrt{a+2} = 0, |b-1| = 0.$$

$$\therefore a = -2, b = 1, a+b = -1.$$

$$\therefore (a+b)^{2011} = (-1)^{2011} = -1, \text{选 A.}$$

$$(2) \text{由题意知, } (a+\sqrt{2})^2 + |b+1| = 0,$$

$$\therefore a+\sqrt{2} = 0, b+1 = 0,$$

$$\text{即 } a = -\sqrt{2}, b = -1.$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{-1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1, \text{选 B.}$$

【解后反思收获大】

* 第(2)小题在求 $\frac{1}{b-a}$ 的值时,需要进行分母有理化. 分母有理化的关键是准确地确定它的有理化因式. 比如, $\sqrt{2}-1$ 的有理化因式是 $\sqrt{2}+1$, $3+\sqrt{6}$ 的有理化因式是 $3-\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ 的有理化因式是 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

例 7 (1) 已知 m, n 是两个连续自然数($m < n$), 且 $q = mn$, 设 $p = \sqrt{q+n} + \sqrt{q-m}$, 则 p ().

A. 总是奇数

B. 总是偶数

C. 有时是奇数, 有时是偶数

D. 有时是有理数, 有时是无理数

(2) 已知 $x+y=7$, $xy=12$, 且 $x < y$, 则 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 的值等于_____.

【解题锦囊】

应用二次根式性质的基础在于灵活运用二次根式的概念, 熟练准确地进行运算以及恰当的变形.

【思路分析】

(1) 要讨论数 p 的奇偶性, 应先将式中的根号消去, 化成整式形式, 如 $2n$ 或 $2n+1$.

(2) 已知 $x+y=7$, $xy=12$, 而 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$, 无法将其化成 $x+y$ 和 xy 所组成的代数式, 这时只有考虑求 $y-x$ 的值. 怎么办? 利用恒等式 $(y-x)^2 = (y+x)^2 - 4xy$ 可达到求出 $y-x$ 的值的目的; 因为 $x < y$, 所以 $y-x > 0$, $y-x = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$.

【规范解答】

(1) $\because m, n$ 是两个连续自然数且 $m < n$,

$$\therefore m+1=n, n-1=m.$$

$$\therefore p = \sqrt{q+n} + \sqrt{q-m}$$

$$= \sqrt{mn+n} + \sqrt{mn-m}$$

$$= \sqrt{n(m+1)} + \sqrt{m(n-1)}$$



$$= \sqrt{n \cdot n} + \sqrt{m \cdot m}$$

$$= \sqrt{n^2} + \sqrt{m^2}$$

$$= n + m$$

$$= m + 1 + m$$

$$= 2m + 1, \text{是奇数. 选 A.}$$

$$(2) \because x < y, \therefore y - x > 0.$$

$$\because (y - x)^2 = (y + x)^2 - 4xy,$$

$$\therefore y - x = \sqrt{(y + x)^2 - 4xy} = \sqrt{7^2 - 4 \times 12} = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy} = \frac{1}{12}.$$

【解后反思收获大】

解决与二次根式有关的试题时，一要牢固掌握二次根式的性质，如 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0). \end{cases}$ 二要注意已知条件和隐含条件，将两者结合解题。

例 8 (1) 观察表 1，寻找规律。表 2、表 3 分别是表 1 中选取的一部分，则 $a + b$ 的值为_____。

0	1	2	3	...
1	3	5	7	...
2	5	8	11	...
3	7	11	15	...
...	...	...	...	...

表 1

11
14
a

表 2

11	13
17	b

表 3

(2) 如图 1-1 所示，在长和宽分别是 a, b 的矩形纸片的四个角都剪去一个边长为 x 的正方形。

- ① 用 a, b, x 表示纸片剩余部分的面积；
- ② 当 $a = 6, b = 4$ ，且当剪去部分的面积等于剩余部分的面积时，求正方形的边长。

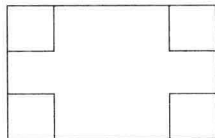


图 1-1

【解题锦囊】

列代数式的关键是找出实际问题中的数量关系，并把它用字母表示出来，而这种“数量关系”，有的是根据“核心”词句来确定，有的则需要从题目给出的表格或图形中寻找。

**【思路分析】**

(1)由表1可知每一竖列中上、下相邻两数字之差都相等.

(2)第①小题直接要求列式,第②小题可由直接列式求得,也可借助列出方程求得.

【规范解答】

$$(1)a=14+3=17, b=13+(17-11+1)=20,$$

$$\text{故 } a+b=37.$$

$$(2)① ab-4x^2;$$

$$② \text{依题意有: } ab-4x^2=4x^2,$$

$$\text{将 } a=6, b=4, \text{ 代入上式, 得 } x^2=3,$$

$$\text{解得 } x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}(\text{舍去}).$$

$$\text{即正方形的边长为 } \sqrt{3}.$$

【解后反思收获大】

在列代数式时,关键是要有代数观念,先确定出所求式子的基本表示(可用文字、数字、字母混合的形式表示),然后对其中的每一项逐步拆解,依次用题目中提供的已知数量来替换.

例9 (1)先观察下列等式,然后用你发现的规律解答下列问题.

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

...

$$① \text{计算 } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$② \text{探究 } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}. (\text{用含有 } n \text{ 的式子表示})$$

$$③ \text{若 } \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \text{ 的值为 } \frac{17}{35}, \text{ 求 } n \text{ 的值.}$$

(2)观察下列各式:

$$① \sqrt{2 \frac{2}{3}} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$② \sqrt{3 \frac{3}{8}} = 3 \sqrt{\frac{3}{8}},$$

$$③ \sqrt{4 \frac{4}{15}} = 4 \sqrt{\frac{4}{15}},$$

$$④ \sqrt{5 \frac{5}{24}} = 5 \sqrt{\frac{5}{24}},$$

...

针对上述各式反映的规律,写出用 n (n 为任意自然数,且 $n \geq 2$) 表示的等式,并给出证明.



🔧【解题锦囊】

解答用代数式表示规律这类试题，一般是通过分析与研究提供的“变化片段”——一些连续的特殊情况，归纳概括出整个变化过程所体现的规律，并用代数式将其表示出来. 在实际运用中，又根据题目的实际情况，可分为三种形式：一般归纳型、分类归纳型、递推归纳型. 一般归纳型的思考特点是：第一，系统考察所提供的一系列特殊情况，从每个特殊情况与其位次的对应关系上找共同的规律；第二，特别注意研究相邻两项之间的相关性. 分类归纳型的思考特点是：第一，先根据背景与问题的特点，选准标准并按其分类；第二，将问题按所属类别做出解答. 递推归纳型的思考特点是：找到由前一项（或前几项）表示该项的规律. 这样，只要知道第一项（或前几项），就可以逐个地将随后的项推出. 这两道小题就属于一般归纳型试题.

🔧【思路分析】

第(1)题先由阅读、观察、求和得到 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} = 1 - \frac{1}{6}$ ；再由数的规律得到一般规律： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ ；最后由等量关系得到数量解.

第(2)题是根据已知的几个等式，探索与自然数 $n(n \geq 2)$ 有关的问题. 等式左边的二次根式中的被开方数是一个带分数，可写成一个整数与一个真分数的和，等式的右边是这个整数与这个真分数的算术平方根的积.

🔧【规范解答】

$$(1) \textcircled{1} \frac{5}{6};$$

$$\textcircled{2} \frac{n}{n+1};$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{n}{2n+1} = \frac{17}{35},$$

解得 $n=17$,

经检验 $n=17$ 是方程的根， $\therefore n=17$.

$$(2) \text{规律: } \sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} = n \sqrt{\frac{n}{n^2-1}} \quad (n \text{ 为任意自然数, } n \geq 2).$$

$$\text{证明: } \sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}} = n \sqrt{\frac{n}{n^2-1}}.$$

🔧【解后反思收获大】

正确解答这类题目的关键在于对所给的例示进行观察与分析，从中归纳与概括出所体现的规律来. 进一步，学会对数学知识的归纳和总结，才有可能使学习达到一个新的层次. 从某种



意义上说,不会归纳和总结的人,就不是一个会学习的人.所以,归纳和总结能力的培养应引起同学们的重视.

温馨小提示

中考是通过中考试卷完成的,每一个中考考生,理应对中考试卷如数家珍,弄清才行.静下心来,准备好纸、笔,认真阅读、解答本书中的经典考题,就从这里备战中考数学.你会发现,你越来越明白中考数学考什么,怎么考.到了最后,你一定会充满自信地说:中考数学,也就那么点事儿!



中档真题演练

- (哈尔滨)若 x 的相反数是 3, $|y|=5$, 则 $x+y$ 的值为().
A. -8 B. 2 C. 8 或 -2 D. -8 或 2
- (绵阳)已知 $\sqrt{12-n}$ 是正整数, 则实数 n 的最大值为().
A. 12 B. 11 C. 8 D. 3

友情提示

充分利用选择题的特点,做到小题不要大做,具体方法有:直接法、排除法、代入法、特殊值法和图像法.

比如,解答第 2 题就采用代入法,把四个选项中的数值从大到小依次代入 $\sqrt{12-n}$ 中,发现 11 是符合题意的最大值,故选 B.

代入法适用于题设复杂,结论简单的选择题,若能根据题意确定代入顺序,则有可能大大提高解题速度.

- (荆门)若 $\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=(x+y)^2$, 则 $x-y$ 的值为().
A. -1 B. 1 C. 2 D. 3
- (枣庄)若 $m+n=3$, 则 $2m^2+4mn+2n^2-6$ 的值为().
A. 12 B. 6 C. 3 D. 0
- (长春)若分式 $\frac{b^2-1}{b^2-2b-3}$ 的值为 0, 则 b 的值是().
A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 2

友情提示

(1)求解分式的值为 0 的题目时,一定要验证分母是否为 0,即要保证分式有意义.陷阱隐藏得并不深,只要细心,肯定能避免失误.

(2)由于忽视了“0”的存在而导致错误的运算屡见不鲜,常见的有:字母表示的零指数幂的底数不能为“0”;不等式整数解中的“0”;字母表示的二次根式被开方数中的“0”;字母表示的一次方程中的系数;字母表示



的二次方程中的系数；字母表示的一次函数中的系数；字母表示的反比例函数中的系数；字母表示的二次函数中的系数，等等.

6. (烟台)学完分式运算后,老师出了一道题“化简: $\frac{x+3}{x+2} + \frac{2-x}{x^2-4}$ ”小明的做法是:原式= $\frac{(x+3)(x-2)}{x^2-4} - \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x^2+x-6-x-2}{x^2-4} = \frac{x^2-8}{x^2-4}$;小亮的做法是:原式= $(x+3)(x-2) + (2-x) = x^2+x-6+2-x = x^2-4$;小芳的做法是:原式= $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x+2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+3-1}{x+2} = 1$. 其中正确的是().

- A. 小明
B. 小亮
C. 小芳
D. 没有正确的

7. (江苏)下面是按一定规律排列的一列数:

第1个数: $\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right)$;

第2个数: $\frac{1}{3} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right)$;

第3个数: $\frac{1}{4} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \left(1 + \frac{(-1)^4}{5}\right) \left(1 + \frac{(-1)^5}{6}\right)$;

...

第n个数: $\frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right)$.

那么,在第10个数、第11个数、第12个数、第13个数中,最大的数是().

- A. 第10个数
B. 第11个数
C. 第12个数
D. 第13个数

8. (南通)设 $m > n > 0$, $m^2 + n^2 = 4mn$, 则 $\frac{m^2 - n^2}{mn}$ 的值等于().

- A. $2\sqrt{3}$
B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{6}$
D. 3

9. (攀枝花)已知实数 x, y 满足 $|x-4| + \sqrt{y-8} = 0$, 则以 x, y 的值为两边长的等腰三角形的周长是().

- A. 20 或 16
B. 20
C. 16
D. 以上答案均不对

10. (怀化)若 $|a-2| + \sqrt{b-3} + (c-4)^2 = 0$, 则 $a-b+c$ _____.

11. (黔西南)已知 $-2x^{m-1}y^3$ 与 $\frac{1}{2}x^ny^{m+n}$ 是同类项, 那么 $(n-m)^{2012} =$ _____.

12. (呼和浩特)实数 a, b 在数轴上的位置如图 1-2 所示, 则 $\sqrt{(a+b)^2} + a$ 的化简结果为_____.



图 1-2

13. (常德)分解因式: $m^2 - mn + mx - nx =$ _____.

14. (宁波)若 $x+y=3, xy=1$, 则 $x^2+y^2 =$ _____.



15. (河北)若 m, n 互为倒数, 则 $mn^2 - (n-1)$ 的值为_____.

16. (宁夏)已知 $a+b=\frac{3}{2}, ab=1$, 化简 $(a-2)(b-2)$ 的结果是_____.

17. (江苏)若 $3a^2 - a - 2 = 0$, 则 $5 + 2a - 6a^2 =$ _____.

18. (遵义)已知 $m^2 + m - 1 = 0$, 则 $m^3 + 2m^2 - 2010 =$ _____.

友情提示

转化与化归思想是中学数学最基本的思想方法, 也是最基本的思维策略, 是解决数学问题的出发点. 转化与化归思想解题的原则应是化难为易、化生为熟、化繁为简、化抽象为直观, 尽量是等价转化.

初中数学中常见的转化情形有: 高次转化为低次、多元转化为一元、式子转化为方程、分式与整式的转化、三角形与四边形的转化、空间与平面相互转化(几何体的展开与折叠)、次元转化为主元、正面转化为反面、分散转化为集中、未知转化为已知、动转化为静、部分转化为整体, 还有一般与特殊、数与形、相等与不等之间的相互转化、实际问题与数学问题的转化, 等等.

第18题如果把 m 的值求出代入计算, 运算麻烦而且容易出错. 正确的解法是把低次转化为高次, 运用整体思想快速而简捷地求解.

因为 $m^2 + m - 1 = 0$, 所以 $m^2 = -m + 1$, $m^3 = -m^2 + m$, 所以 $m^3 + 2m^2 - 2010 = -m^2 + m + 2m^2 - 2010 = m^2 + m - 2010 = 1 - 2010 = -2009$.

本题也可以把结论降次: 因为 $m^2 + m - 1 = 0$, 所以 $m^2 = -m + 1$, 所以 $m^3 + 2m^2 - 2010 = m \cdot m^2 + 2m^2 - 2010 = m(-m + 1) + 2m^2 - 2010 = -m^2 + m + 2m^2 - 2010 = m^2 + m - 2010 = 1 - 2010 = -2009$.

19. (济宁)若代数式 $x^2 - 6x + b$ 可化为 $(x-a)^2 - 1$, 则 $b-a$ 的值是_____.

20. (安徽)定义运算 $a \otimes b = a(1-b)$, 下面给出了关于这种运算的几个结论:

① $2 \otimes (-2) = 6$;

② $a \otimes b = b \otimes a$;

③ 若 $a+b=0$, 则 $(a \otimes a) + (b \otimes b) = 2ab$;

④ 若 $a \otimes b = 0$, 则 $a=0$.

其中正确结论的序号是_____.

21. (肇庆)观察下列单项式: $a, -2a^2, 4a^3, -8a^4, 16a^5, \dots$ 按此规律, 第 n 个单项式是_____ (n 是正整数).

22. (中山)用同样规格的黑白两种颜色的正方形瓷砖, 按图 1-3 的方式铺地板, 则第(3)个图形中有黑色瓷砖_____块, 第 n 个图形中需要黑色瓷砖_____块(用 n 的代数式表示).

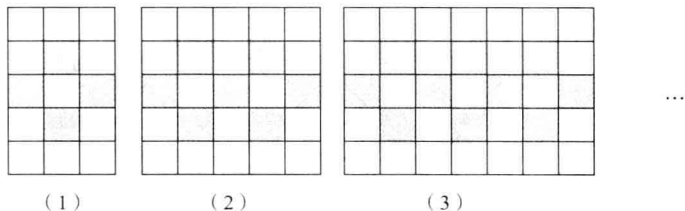


图 1-3

23. (抚顺)观察图 1-4 中的图形(每幅图中最小的三角形都是全等的), 请写出第 n 个图中最小的三角形的个数有_____个.